ΤΕΜ231, Χειμερινό εξάμηνο 2012-2013

2η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ
(Διδάσκων: Δ. Τσαγκαρογιάννης)
Παράδοση: 28.01.13 (στην εξέταση)

Άσκηση 1η:
Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned}&\min(2x_1^3 + 4x_1^2 + 2x_2^2 - 20x_1 - 16x_2 + 5)\\&-2x_1 - 2x_2 \geq -4, \quad x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

είναι πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού και να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ΚΚΤ.

Άσκηση 2η:
Να αποδειχθεί ότι η μέθοδος Newton - Raphson συγκλίνει σε ακριβώς ένα βήμα όταν εφαρμόζεται για τη μεγιστοποίηση γνήσιας κοίλης τετραγωνικής (δηλαδή πολυωνυμικής δευτέρου βαθμού) συνάρτησης.
Να επιλυθεί το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού (χωρίς περιορισμούς)

$$\max(2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2)$$

με τη μέθοδο Newton - Raphson.

Άσκηση 3η:
Να βρεθεί το σημείο $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση

$$f(x_1, x_2) = 14x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2 + 7$$

υπό τους περιορισμούς $x_1 + x_2 \leq 2$ και $x_1 + 2x_2 \leq 3$.

Άσκηση 4η: Έστω το π.μ.γ.π.

$$\begin{aligned}&\min c^T x\\&\text{τ.ώ. } \frac{1}{2}x^T M x \leq m\end{aligned}$$

όπου $x, c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ και ο $M \in \mathbb{M}_{n\times n}$ είναι θετικά ορισμένος. Να γράψετε τη Lagrangian $L(x, \lambda)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $\theta(\lambda) := \inf_{x\in\mathbb{R}} L(x, \lambda)$ η δυϊκή συνάρτηση Lagrange.
(1) Να δείξετε ότι $\theta(0) = -\infty$.
(2) Να δείξετε ότι ο πίνακας λM είναι αντιστρέψιμος και ότι

$$\theta(\lambda) = -m\lambda - \frac{1}{2}c^T(\lambda M)^{-1}c.$$

Άσκηση 5η: Έστω το πρόβλημα

$$\min \frac{1}{2}\|c - x\|^2$$

$$\text{τ.ώ. } Ax = 0$$

όπου $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ βαθμού m και για $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\|^2 := y_1^2 + \ldots + y_n^2$.

(1) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος.

(2) Να δείξετε ότι ο πίνακας AA^T είναι αντιστρέψιμος.

(3) Να δείξετε ότι το $x^* := c - A^T(AA^T)^{-1}Ac$ ικανοποιεί τις συνθήκες KKT.

(4) Να δείξετε ότι το x^* είναι ολικό ελάχιστο.

(5) Να δείξετε ότι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μηδέν αν και μόνο αν $Ac = 0$.

Άσκηση 6η: Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, κυρτή, και η συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή και γνήσια αύξουσα. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $g(x) := \phi(f(x))$. Τα προβλήματα ελαχιστοποίησης της $f(x)$ και της $g(x)$ είναι ισοδύναμα με τις ίδιες βέλτιστες λύσεις. Επίσης υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f, g και ϕ είναι λείες.

(1) Να δείξετε ότι οι κατευθύνσεις κατά τις οποίες κινούνται οι αλγόριθμοι βαθμίδας για τις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παράλληλες.

(2) Να συγκρίνετε τις κατευθύνσεις του αλγορίθμου Newton - Raphson για τις f και g.

(Βοήθημα: αν ο $n \times n$ πίνακας M είναι αντιστρέψιμος και το a είναι ένα διάνυσμα με διάσταση n, τότε:

$$(M + aa^T)^{-1} = M^{-1} - \frac{1}{1 + a^T M^{-1} a} M^{-1} a a^T M^{-1}$$

αν $1 + a^T M^{-1} a \neq 0$.)