Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών,

Σχεδίαση και Ανάλυση Αλγοριθμων (ΕΜ 202),

Εαρινό Εξάμηνο 2008 - 2009 (Π. Λεκέας),

Τελική Εξέταση, Ιούνιος 2009

---

**Ερώτηση 1 (10 μονάδες)**: Υποθέστε ότι σας δίνεται αλγόριθμος εύρεσης διάμεσου ο οποίος έχει γραμμικό χρόνο χειρότερης περιπτωσης ($O(n)$). Δώστε αλγόριθμο που να βρίσκει την $i$-στατιστική, για τυχαίο $i$, σε γραμμικό χρόνο.

**Απάντηση**: Έστω πίνακας $A[p..r]$ του οποίου θέλουμε σε γραμμικό χρόνο να υπολογίσουμε τη $i$-στατιστική. Φτιάχνουμε τον εξής αλγόριθμο: Βρίσκουμε σε γραμμικό χρόνο το διάμεσο $\mu$ του $A[p..r]$, οπότε αν $i = \mu$ τελειώσαμε, αλλιώς διαμερίζουμε με την Partition ως προς το $\mu$ και επαναλαμβάνουμε τα πιο πάνω για τον ένα από τους δύο υποπίνακες που προκύπτουν, στον οποίο θα βρίσκεται το $i$. Στη χειρότερη περιπτωση θα έχουμε $T(n) \leq T(n/2) + O(n) = O(n)$ ($\sum_{i=0}^{lgn} n/2^i = O(n)$).

**Ερώτηση 2 (10 μονάδες)**: Θεωρείστε σκακιέρα (πίνακα) $n \times n$ και μία συνάρτηση κόστους $c(i,j)$ για κάθε τετράγωνο του πίνακα ($i$ οι γραμμές, $j$ οι στήλες). Υποθέστε οτι κάποιος ξεκινά από τυχαίο τετράγωνο της πρώτης γραμμής και μπορεί να κινηθεί κατά ένα τετράγωνο είτε μπροστά, είτε λοξά δεξιά, είτε λοξά αριστερά (λοξά = διαγώνια) (π.χ. αν βρισκόμαστε στο κελί $(2,2)$ τότε οι επιτρεπτές κινήσεις είναι να πάμε είτε στο $(3,2)$, είτε στο $(3,1)$, είτε στο $(3,3)$). Αν κάθε φορά το κόστος του τετραγώνου που επισκέπτομαι προστίθεται στο συνολικό κόστος που πρέπει να πληρώσω, ποιό είναι το ελάχιστο κόστος για να φτάσω στην τελευταία γραμμή του πίνακα;

**Απάντηση**: Έστω $q(i,j)$ το ελάχιστο (minimum) κόστος για να φθάσω το $(i,j)$. Προφανώς το πρόβλημα παρουσιάζει την ιδιότητα της βέλτιστης υποδομής. Δηλ. η λύση ολόκληρου του προβλήματος εξαρτάται από τις λύσεις των υποπροβλημάτων. Αν $(i,j) = A$ τότε στο $A$ μπορώ να φθάσω είτε από το $(i-1, j-1)$ είτε από το $(i-1, j)$ είτε από το $(i-1, j+1)$.

Άρα $q(i,j) = \begin{cases} \infty & , j < 1 \text{ ή } j > n \\ c(i,j) & , i = 1 \\ min(q(i-1,j-1), q(i-1,j), q(i-1,j+1)) + c(i,j) & , \text{αλλιώς.} \end{cases}$

**Ερώτηση 3 (10 μονάδες)**: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δώσουμε ρέστα σε κάποιον ένα ποσό $n$ λεπτών κάποιου (υποθετικού) νομίσματος, χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο αριθμό κερμάτων. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η ονομαστική αξία του κάθε κέρματος είναι ένας ακέραιος αριθμός (π.χ. διαθέτουμε εικοσιπεντάλεπτα, δεκάλεπτα, πεντάλεπτα και μονόλεπτα σε άπειρη προμήθεια).

**α)** Αποδείξτε ότι το πιο πάνω προβλημα έχει την ιδιότητα της βέλτιστης υποδομής.

Ένας άπληστος αλγόριθμος για το πιο πάνω πρόβλημα είναι ο εξής: Αν $n = 0$, τότε δεν χρειάζεται να δώσω κανένα κέρμα για ρέστα. Αν $n > 0$, βρίσκω το μεγαλύτερης αξίας $c$, κέρμα μικρότερο ή ίσο του $n$ και το βάζω στα ρέστα που είναι να δώσω, και λύνω το πρόβλημα για ρέστα $n - c$.

**β)** Ποιά είναι η άπληστη επιλογή που κάνει ο πιο πάνω αλγόριθμος; Αποδείξτε ότι υπάρχει πάντα βέλτιστη λύση που περιέχει την άπληστη επιλογή. Ποιός ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου;

**Απάντηση**: α) Έστω μία βέλτιστη λύση η οποία δίνει ρέστα $n$ λεπτών και στην οποία χρησιμοποιείται νόμισμα αξίας $c$ λεπτών. Έστω ότι η λύση χρησιμοποιεί $k$ νομίσματα. Αν αφαιρέσουμε το νόμισμα των $c$ λεπτών, τότε θα έχουμε μία λύση με $k-1$ νομίσματα για το ποσό των $n-c$ λεπτών. Η τελευταία λύση είναι βέλτιστη, διότι εάν δεν ήταν, τότε θα υπήρχε μία άλλη με λιγοτερα από $k-1$ νομίσματα την οποία εάν χρησιμοποιούσαμε θα μπορούσαμε να φτιάξουμε λύση για το ποσό $n$ με λιγότερα από $k$ νομίσματα, πράγμα άτοπο, διότι γνωρίζουμε ότι η βέλτιστη χρησιμοποιεί $k$ νομίσματα, β) Η άπληστη επιλογή είναι να επιλέγει πάντα το νόμισμα με τη μεγαλύτερη αξία, το οποίο δεν ξεπερνά το ποσό για ρέστα. Υπάρχει πάντα βέλτιστη λύση που περιέχει τη βέλτιστη επιλογή, διότι: περίπτωση 1): αν $1 \leq n < 5$, τότε η λύση έχει μόνο μονόλεπτα, άρα περιέχεται η άπληστη επιλογή $c = 1$, περίπτωση 2): αν $5 \leq n < 10$, τότε στη λύση που δίνει μονόλεπτα αφαιρώ πέντε και δίνω ένα πεντάλεπτο, άρα πάλι περιέχεται η άπληστη επιλογή, περίπτωση 3): αν $10 \leq n < 25$, τότε κι εδώ εάν δεν υπήρχε στα ρέστα νόμισμα των 10 λεπτών και υπήρχαν μόνο μονόλεπτα και πεντάλεπτα, μπορούσα να μαζέψω όσα αθροίζαν στο 10 και να τα αντικαταστήσω με ένα δεκάλεπτο άρα να φτιάξω μία καλύτερη λύση (με μικρότερο αριθμό νομισμάτων για ρέστα). Παρόμοια και η άλλη περίπτωση 4): $25 \leq n$. Άρα πάντα υπάρχει βέλτιστη λύση που χρησιμοποιεί την άπληστη επιλογή, γ) Ο αλγόριθμος χρειάζεται χρόνο $\Theta(n)$, διότι χρησιμοποιούνται $k$ νομίσματα στη βέλτιστη λύση και $k < n$.

**Ερώτηση 4 (10 μονάδες)**: **α)** Στην αντισταθμιστική ανάλυση ποιά είναι η διαφορά της αθροιστικής από τη χρεωπιστωτική μεθοδο; **β)** περιγράψτε εν' συντομία την ενεργειακή μέθοδο αντισταθμιστικής ανάλυσης του χρόνου εκτέλεσης ενός αλγορίθμου.

**Απάντηση**: Θεωρία.

**Ερώτηση 5 (10 μονάδες)**: Χρησιμοποιώντας την κεντρική μέθοδο λύστε τίς πιο κάτω αναδρομικές σχέσεις:
α) $T(n) = 9T(n/3) + n$, β) $T(n) = T(2n/3) + 1$, γ) $T(n) = 3T(n/4) + nlgn$.

**Απάντηση**: α) $\Theta(n^2)$, β) $\Theta(lgn)$, γ) $\Theta(nlgn)$.

**Ερώτηση 6 (10 μονάδες)**: Για τη λύση ενός προβλήματος απαιτείται να παράγουμε οποιαδήποτε μετάθεση της εισόδου πλην της ταυτοτικής. Σας προτείνουν τον ακόλουθο αλγόριθμο $PWI$ τον οποίο καλείστε να ελέγξετε εάν ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος:

PWI(A)
$n \longleftarrow$ *length*[A]
**for** $i \longleftarrow$ **1 to** $n$
    **do** swap $A[i] \longleftarrow A[\text{RANDOM}(i+1, n)]$

Όπου η $A[\text{RANDOM}(a, b)]$ επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό μεταξύ $a$ και $b$ (συμπεριλαμβανομένων των $a, b$).

**Απάντηση**: Ο $PWI$ όντως δεν παράγει την ταυτοτική μετάθεση, όμως δεν παράγει και άλλες μεταθέσεις που θα όφειλε. Για παράδειγμα όταν $n = 3$ θα πρέπει να παράγει 3!-1=5 μεταθέσεις (όλες πλην της ταυτοτικής). Όμως είναι εύκολο να δούμε ότι παράγει μόνο τρεις. Άρα ο $PWI$ δεν είναι ο κατάλληλος αλγόριθμος για το πρόβλημά μας.