Ερώτηση 1 (4 μονάδες): Ποιός ο χρωματικός αριθμός ενός πλήρους διμερούς γράφου $K_{m,n}$ όπου m, n θετικοί ακέραιοι; Ποιός ο χρωματικός αριθμός του γράφου C_n, όπου $n \geq 3$; (C_n είναι ο κύκλος με n κορυφές.) Αιτιολογείστε.

Απάντηση: $\chi(K_{m,n}) = 2$, διότι σε ένα διμερή γράφο υπάρχουν ακμές μόνο μεταξύ των δύο συνόλων m και n κορυφών, άρα χρωματίζω το ένα σύνολο με ένα χρώμα και το άλλο με ένα δεύτερο. $\chi(C_n) = 2$ αν n άρτιος και $\chi(C_n) = 3$ αν n περιττός (προφανές με διαχωρισμό των δύο περιπτώσεων).

Ερώτηση 2 (7 μονάδες): Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

Απάντηση: Επαγωγή στο n. Βάση, $n = 1$ ισχύει διότι $1 > 2(\sqrt{2} - 1)$. Υποθέτω ότι ισχύει για k, τότε:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2(\sqrt{k+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Αρκεί να δειξω ότι:

$$2(\sqrt{k+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2(\sqrt{k+2} - 1) \Leftrightarrow 2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow$$

$$2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}) < \frac{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 2 < 1 + \frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k+1}}$$

που ισχύει. Άρα ισχύει και για $k + 1$ άρα και για κάθε n.

Ερώτηση 3 (10 μονάδες):

α) είναι ο $(Z, \geq)$ μερικά διατεταγμένος χώρος; Το ίδιο για τον $(Z, \neq)$,

β) Είναι οι μερικά διατεταγμένοι χώροι $(\{1,2,3,4,5\}, |)$, $\{1,2,4,8,16\}, |)$ δικτυωτά; (Αποδείξτε τις απαντήσεις σας)

Απάντηση:

α) Για να είναι πρέπει η σχέση να είναι μερική διάταξη, δηλαδή ανακλαστική, μεταβατική και αντισυμμετρική. Ο πρώτος είναι ο δεύτερος όχι (δεν ισχύει π.χ. η ανακλαστικότητα).

β) Ο πρώτος δεν είναι, διότι τα 2 και 3 δεν έχουν ελάχιστο άνω φράγμα στο χώρο. Ο δεύτερος είναι, διότι κάθε ζευγάρι στοιχείων έχει ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κατω φράγμα στο χώρο.

Ερώτηση 4 (5 μονάδες): Έστω G συνεκτικός και επίπεδος γράφος με 8 κορυφές βαθμού 4 η κάθε μία. Πόσες περιοχές ορίζει μία επίπεδη αναπαράσταση του G;

Απάντηση: Ο G έχει $4 \cdot 8/2 = 16$ ακμές. Από τύπο Euler ο αριθμός των επιφανειών είναι $r = e + 2 - v = 16 + 2 - 8 = 10$

Ερώτηση 5 (6 μονάδες): Έστω m θετικός ακεραιος με $m > 1$. Είναι η σχέση:

$$R = \{(a, b) \mid a \equiv b \,(mod\, m)\}$$

σχέση ισοδυναμίας ; Αποδείξτε την απάντησή σας (δίνεται: $a \equiv b \,(mod\, m)$ ανν m διαιρεί το $a - b$).

Απάντηση: Είναι σχέση ισοδυναμίας διότι: είναι ανακλαστική αφού $a - a = 0 \mid m$ άρα $a \equiv b \,(mod\, m)$. Είναι συμμετρική διότι αν ο $a - b$ διαιρείται με τον m, τότε και ο $b - a$ διαιρείται με τον m. Είναι τέλος και μεταβατική, διότι αν m διαιρεί τους $a - b$ και $b - c$, τότε υπάρχουν ακέραιοι $\varkappa, \lambda$ τέτοιοι ώστε $a - b = \varkappa m$ και $b - c = \lambda m$. Προσθέτωντας κατά μέλη βρίσκω ότι $a - c = (\varkappa + \lambda)m$ άρα m διαιρεί τον $a - c$.

Ερώτηση 6 (8 μονάδες): Μπορούν να υπάρξουν συναρτήσεις f και g από τους θετικούς ακέραιους στους πραγματικούς για τις οποίες $f(n)$ δεν είναι $O(g(n))$ και ταυτόχρονα $g(n)$ δεν είναι $O(f(n))$; Αποδείξτε την απάντησή σας.

Απάντηση: Ισχύει για παράδειγμα πάρτε τις πιο κάτω συναρτήσεις: $f(n) = n$ αν n περιττός και 1 αν n άρτιος, $g(n) = 1$ αν n περιττός και n αν n άρτιος.

Ερώτηση 7 (6 μονάδες): Ένας διμερής γράφος με περιττό αριθμό κορυφών έχει κύκλωμα Hamilton ή όχι ; Αποδείξτε την απάντησή σας.

Απάντηση: Έστω $G(V, E)$ διμερής γράφος με $V = V_1 \cup V_2$. Έστω ο G έχει περιττό αριθμο κόμβων. Αν ο G είχε κύκλωμα Hamilton, τότε το κύκλωμα αυτό θα είχε τη μορφή $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_k, b_k, a_1$, όπου τα $a_i \in V_1$ και $b_i \in V_2$. Το πλήθος των διαφορετικών κόμβων του πιο πάνω κυκλώματος είναι άρτιος αριθμός (έχουμε $2k$ διαφορετικούς κομβους), όμως ο G από υπόθεση έχει περιττό αριθμό κομβων, άρα άτοπο. Άρα δεν έχει κύκλωμα Hamilton.

Ερώτηση 8 (10 μονάδες): Καταγράψτε τα στοιχεία των συνόλων:
α) $\Delta_2 = \{\{0,1\}^2 - \{t\} | t \in \{0,1\}^2\}$
β) $\Delta_2^H = \{\{0,1\}^2 - \{t\} | t \in \{0,1\}^2, t$ έχει το πολύ ένα $0\}$
($\{0,1\}^k$ είναι το σύνολο με στοιχεία από το καρτεσιανό γινόμενο: $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \{0,1\}$, k φορές)

Απάντηση:
α) Δ_2={{(0,0),(0,1),(1,0)},{(0,0),(0,1),(1,1)},{(0,0),(1,0),(1,1)},{(0,1),(1,0),(1,1)}}
β) Δ_2^H={{(0,0),(1,0),(1,1)},{(0,0),(0,1),(1,1)},{(0,0),(0,1),(1,0)}}

Ερώτηση 9 (4 μονάδες): Ποιός ο συντελεστής του $x^{12}y^{13}$ στο ανάπτυγμα $(2x - 3y)^{25}$;

Απάντηση: $\begin{pmatrix} 25 \\ 12 \end{pmatrix} 2^{12}(-3)^{13}$.

Ερώτηση 10 (10 μονάδες): Λύστε την $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + 1$ αν $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 8$.

Απάντηση: Η λύση της χαρακτηριστικής της ομογενούς είναι $x = 1$ (τριπλή ρίζα), άρα η ομογενής θα έχει τη μορφή $a_n^{(h)} = (A + Bn + Cn^2) \cdot 1^n$. Για τη λύση της μερικής επειδή ο σταθερός όρος είναι της μορφής: $F(s) = (0+1) \cdot 1^n = 1$, το s ισούται με μονάδα, που είναι ρίζα της χαρακτηριστικής της ομογενούς με πολλαπλότητα 3. Για αυτό το λόγο, από το θεώρημα, η μερική θα έχει τη μορφή $a_n^{(p)} = n^3 \cdot D \cdot 1^n$. Αντικαθιστώντας την $a_n^{(p)}$ στην εκφώνηση βρίσκουμε $D = 1/6$. Άρα $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A + Bn + Cn^2 + n^3/6$. Με χρήση αρχικών συνθηκών παίρνουμε $A = 2, B = 4/3, C = 1/2$, άρα $a_n = 2 + 4n/3 + n^2/2 + n^3/6$.