

4.1 (Οι πύργοι του Ηανοί) Υπάρχουν 3 στύλοι Α, Β, Γ, και n δίσκοι διαφορετικής διαμέτρου περασμένοι στον Α στύλο κατά φθίνουσα διάμετρο. Επιθυμούμε να μεταφέρουμε όλους τους δίσκους στο στύλο Γ, χρησιμοποιώντας σαν βοηθητικό τον Β. Οι κανόνες είναι ότι σε κάθε κίνηση μεταφέρω έναν δίσκο και ότι δεν επιτρέπεται ένας δίσκος μεγαλύτερης διαμέτρου να τοποθετηθεί επάνω από ένα δίσκο μικρότερης. Αν H_n ο αριθμός των κινήσεων που απαιτούνται για να μεταφερθούν n δίσκοι βρείτε την αναδρομική εξίσωση που πρέπει να υπακούει το H_n και λύστε την.

4.2 Έστω $n + 1$ αριθμοί $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ τους οποίους θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε. Έστω C_n οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να εισάγουμε παρενθέσεις στο γινόμενο για να δηλώσουμε την προτεραιότητα των πολλαπλασιασμών (π.χ. $C_3 = 5$). Βρείτε μία αναδρομική σχέση για το C_n .

4.3 Βρείτε την αναδρομική σχέση που ικανοποιείται από την R_n , όπου R_n είναι ο αριθμός των περιοχών στις οποίες χωρίζεται το επίπεδο από n ευθείες, εάν κανένα ζευγάρι από τις ευθείες δεν είναι παράλληλες και καμία τριάδα από αυτές δεν περνούν από το ίδιο σημείο

4.4 Λύστε τις αναδρομικές εξισώσεις:

a) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$

b) $a_n = a_{n-2}/4, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$

4.5 Λύστε την $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}, a_0 = 9, a_1 = 10, a_2 = 32$

4.6 Λύστε την $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}, a_0 = 7, a_1 = -4, a_2 = 8$

4.7 Λύστε την $a_n = 2a_{n-1} + 3^n, a_1 = 5$

4.8 Λύστε την $a_k = 3a_{k-1}$, για $k = 1, 2, 3, \dots$ με γεννήτριες συναρτήσεις.

4.9 Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις δείξτε ότι:

$$\sum_{k=0}^n C(n, k)^2 = C(2n, n)$$

όπου n θετικός ακέραιος.

4.10 Βρείτε τις γεννήτριες συναρτήσεις των ακολουθιών:

a) $a_n = 5, n = 0, 1, 2, \dots$

b) $a_n = 3^n, n = 0, 1, 2, \dots$

c) $a_n = 2, n = 3, 4, 5, \dots$, και $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

d) $\alpha_n = 2n + 3, n = 0, 1, 2, \dots$

e) $\alpha_n = \binom{8}{n}, n = 0, 1, 2, \dots$

4.11 Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις βρείτε τον τύπο των αριθμών Fibonacci.

4.12 Ποιά ακολουθία έχει γεννήτρια συνάρτηση την:

a) $G(x) = \frac{1 + 2x - x^2 - x^3}{1 + x - x^2 - x^3}$

b) $G(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 + 2x}$

c) $G(x) = \frac{2}{1 - 4x^2}$