

**3.1** Ο γράφος  $G(\{(a, b, c, d, e, f, g), \{(a, g), (a, f), (a, e), (b, f), (b, e), (b, c), (c, d), (d, g), (d, e), (d, f)\})$  είναι διμερής;

**3.2** Δείξτε ότι ένας απλός γράφος είναι διμερής αν και μόνο αν είναι δυνατόν να χρωματιστούν οι κόμβοι του με δύο διαφορετικά χρώματα έτσι ώστε οποιοδήποτε δύο γειτονικοί κόμβοι να μην έχουν το ίδιο χρώμα.

**3.3** Έστω ότι οι ακμές ενός πλήρους γράφου με έξι κορυφές χρωματίζονται είτε κόκκινες είτε μπλε. Δείξτε ότι για οποιοδήποτε αυθαίρετο τρόπο χρωματισμού των ακμών, υπάρχει είτε ένα κόκκινο είτε ένα μπλε τρίγωνο στο γράφο. Τί σχέση υπάρχει μεταξύ του προηγούμενου ερωτήματος και του αριθμού Ramsey(3,3);

**3.4** Δείξτε ότι σε κάθε γράφο, του οποίου όλες οι κορυφές είναι βαθμού τουλάχιστον 3, υπάρχει ένας τουλάχιστον κύκλος με άρτιο αριθμό ακμών.

**3.5** Ισχύει ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας με 0 και 1 που έχει 0 στη διαγώνιο και είναι συμμετρικός ως προς αυτήν, είναι πίνακας γειτνίασης απλού γράφου;

**3.6** Δείξτε ότι, ένας απλός γράφος  $G$  είναι διμερής αν και μόνο αν δεν έχει κυκλώματα με περιττό αριθμό ακμών.

**3.7** Αποδείξτε ότι αν γράφος  $G$  έχει όλες του τις κορυφές με άρτιο βαθμό, τότε έχει κύκλωμα Euler.

**3.8** Δείξτε ότι ο  $K_n$  έχει κύκλωμα Hamilton όταν  $n \geq 3$ .

**3.9** Δείξτε ότι υπάρχει πάντα ένα μονοπάτι Hamilton σε ένα κατευθυνόμενο και πλήρες γράφο.

**3.10** Έστω  $G$  συνεκτικός επίπεδος και απλός γράφος με  $e$  ακμές και  $v$  κορυφές. Αν  $r$  είναι ο αριθμός των περιοχών σε μία επίπεδη αναπαράσταση του  $G$ , δείξτε ότι  $r = e - v + 2$  [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε επαγωγή στον αριθμό των ακμών].

**3.11** Ποιός είναι ο χρωματικός αριθμός του πλήρους διμερούς γράφου  $K_{m,n}$ , όπου  $m, n$  θετικοί ακέραιοι.

**3.12** Επτά μεταβλητές  $t, u, v, w, x, y, z$  εμφανίζονται στο βρόγχο ενός προγράμματος Η/Υ. Τα βήματα στα οποία πρέπει αυτές να αποθηκευτούν είναι:  $t : 1$  έως 6,  $u : 2$ ,  $v : 2$  έως 4,  $w : 1, 3$  και

5,  $x : 1$  και 6,  $y : 3$  έως 6,  $z : 4$  και 5. Πόσους διαφορετικούς καταχωρητές χρειαζόμαστε για να αποθηκεύσουμε τις μεταβλητές κατά την εκτέλεση του προγράμματος;

**3.13** Ποιά η τιμή της prefix έκφρασης:  $* + 3 + 3 \uparrow 3 + 333$  ; Ποιά η τιμή της postfix έκφρασης:  $32 * 2 \uparrow 53 - 84 / * -$  ;

**3.14** Ποιοί συνεκτικοί απλοί γράφοι έχουν ακριβώς ένα επικαλύπτον δένδρο;.

**3.15** Για ποιούς γράφους η αναζήτηση κατά βάθος και κατά πλάτος παράγουν ταυτόσημα επικαλύπτοντα δένδρα ανεξαρτήτως αρχικής επιλογής της ρίζας;