ΤΕΜ, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Διακριτά Μαθηματικά (ΕΜ 201),

Χειμερινό Εξάμηνο 2008 (Π. Λεκέας),

Ασκήσεις, Σετ 2

2.1 Σε ένα σύνολο n στοιχείων πόσες ανακλαστικές σχέσεις μπορούν να υπάρξουν;

2.2 Έστω $R_2 = \{(a,b) \in R^2 | a \geq b\}$, $R_3 = \{(a,b) \in R^2 | a < b\}$, $R_3 = \{(a,b) \in R^2 | a \leq b\}$, $R_4 = \{(a,b) \in R^2 | a = b\}$, $R_5 = \{(a,b) \in R^2 | a \neq b\}$. Βρείτε τα a) $R_2 \cup R_4$, b) $R_3 \cup R_6$, c) $R_3 \cap R_6$, d) $R_4 \cap R_6$, e) $R_3 - R_6$, f) $R_6 - R_3$, g) $R_2 \oplus R_6$, h) $R_3 \oplus R_5$.

2.3 Δείξτε ότι αν M_R είναι ο πίνακας που αναπαριστά τη σχέση R, τότε $M_R^{[n]}$ είναι ο πίνακας που αναπαριστά την R^n.

2.4 Έστω R σχέση στο A. Πώς μπορεί το κατευθυνόμενο γράφημα που αναπαριστά την R να μετατραπεί στο κατευθυνόμενο γράφημα που αναπαριστά την R^{-1} ;

2.5 Αποδείξτε ότι: Αν R σχέση στο A, τότε υπάρχει μονοπάτι μήκους n, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος, από το a στο b ανν $f(a,b) \in R^n$.

2.6 Έστω A σύνολο n στοιχείων, και R σχέση στο A. Δείξτε ότι αν υπάρχει μονοπάτι μήκους τουλάχιστον 1 στην R από το a στο b, τοτε υπάρχει ένα τέτοιο μονοπάτι με μήκους όχι μεγαλύτερο του n. Επιπρόσθετα, όταν $a \neq b$, αν υπάρχει μονοπάτι μήκους τουλάχιστον 1 στην R από το a στο b, τότε υπάρχει ένα τέτοιο μονοπάτι με μήκουν όχι μεγαλύτερο του $n-1$.

2.7 Έστω R σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των πραγματικών έτσι ώστε: "aRb ανν $a-b$ είναι ακέραιος". Είναι η R σχέση ισοδυναμίας;

2.8 Έστω σχέση R από το A στο B. Η αντίστροφη σχέση από το B στο A, που δηλώνεται με R_{-1}, είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζεύγων $\{(a,b) | (a,b) \in R\}$. Επίσης το συμπλήρωμα $\overline{R}$ της R είναι το $\{(a,b) | (a,b) \in R\}$.

Έστω $R = \{(a,b) | a \text{ διαιρεί } b\}$ στο σύνολο των θετικών ακεραίων. Βρείτε τα R^{-1},$\overline{R}$.

2.9 Έστω R σχέση ισοδυναμίας στο A. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: i) aRb , ii) $[a]_R = [b]_R$, iii) $[a]_R \cup [b]_R \neq 0$.

2.10 Αποδείξτε το Θεώρημα της επαγωγικής αρχής της καλής διάταξης.

2.11 Φτιάξτε το διάγραμμα Hasse των μερικά διατεταγμένων χώρων: $(\{1,2,3,4,6,8,12\}, |)$, $(\wp(\{a,b,c\}), \subseteq)$. Το $\wp(.)$ συμβολίζει το δυναμοσύνολο.

2.12 Βρείτε, άν υπάρχουν, το μέγιστο άνω φράγμα και το ελάχιστο κάτω φράγμα των συνόλων $\{3,9,12\}$ και $\{1,2,4,5,10\}$, στο μερικά διατεταγμενο χώρο $(Z^+,|)$.

2.13 Υποθέστε ότι σε ένα εργαστήριο Η/Υ υπάρχουν 15 σταθμοί εργασίας και 10 server. Ένα καλώδιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συνδέσει απευθείας ένα σταθμό με ένα server. Για κάθε server μόνο μία ενεργή σύνδεση προς αυτόν μπορεί να υπάρχει κάθε φορά. Αν θέλαμε να εξασφαλίζαμε ότι κάθε στιγμή 10 ή λιγοτεροι σταθμοί εργασίας να μπορούν να έχουν απευθειας προσβαση σε καποιον server ποιός είναι ο μικρότερος αριθμός καλωδίων που μπορούμε να βάλουμε;

(Προφανώς μπορούμε κάθε σταθμό να τον συνδέσουμε με κάθε server οπότε τότε θα βάζαμε 150 καλώδια, αλλά θα θέλουμε να αποφύγουμε αυτή τη λύση).

2.14 Ο Κοκκινοκιτρινοπρασιναϊκός πρόκειται για 30 μερες να προετοιμαστεί για την επόμενη αγωνιστική χρονιά στη Γερμανία παίζοντας τουλάχιστον ένα φιλικό παιχνίδι την ημέρα, αλλά όχι πάνω από 45 συνολικά παιχνίδια στις 30 ημέρες της προετοιμασίας. Δείξτε ότι αναγκαστικά υπάρχει περίοδος συνεχόμενων ημερών στην οποία οι κοκκινοκιτρινοπράσινοι θα δώσουν ακριβώς 14 φιλικά ματς.

2.15 Αν $n \geq 2$ θετικός ακέραιος δείξτε ότι, ο αριθμός Ramsey $R(2,n) = 2$.

2.16 Δείξτε ότι σε ομάδα 5 ατόμων (όπου οποιοιδήποτε 2 είναι είτε φίλοι, είτε εχθροί), δεν υπάρχουν πάντα 3 αναμεταξύ τους φίλοι ή εχθροί.