

1.1 Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο A , ισχύουν οι ιδιότητες: (i) $\emptyset \subseteq A$, (ii) $S \subseteq S$

1.2 Αν A και B είναι σύνολα, τότε ορίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ να είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων δυάδων (a, b) , όπου $a \in A$ και $b \in B$. Σε ποιές περιπτώσεις ισχύει $A \times B = B \times A$;

1.3 Αν A, B σύνολα, αποδείξτε ότι, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.4 Έστω $A_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$ για $i = 1, 2, 3, \dots$. Βρείτε τα $\cup_{i=1}^n A_i$ και $\cap_{i=1}^n A_i$

1.5 Δείξτε ότι το σύνολο των θετικών ρητών είναι αριθμήσιμο.

1.6 Δείξτε ότι το σύνολο όλων των προγραμμάτων που μπορούν να γραφτούν σε μια γλώσσα προγραμματισμού είναι αριθμήσιμο. Θεωρήστε ότι ένα πρόγραμμα μπορεί να απεικονιστεί σαν μία ακολουθία (string) από σύμβολα ενός πεπερασμένου αλφάβητου.

1.7 Χρησιμοποιώντας επαγωγή δείξτε ότι για κάθε φυσικό n , $n < 2^n$.

1.8 Αποδείξτε με επαγωγή την ανισότητα του Bernoulli: Αν $h > -1$, τότε $1 + nh \leq (1 + h)^n$, n φυσικός.

1.9 Χρησιμοποιώντας Ισχυρή επαγωγή δείξτε ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

1.10 Σας δίνεται ο ακόλουθος κώδικας υπολογιστή:

```
k := 0
for i1 := 1 to n1
  for i2 := 1 to n2
    .
    .
    .
  for im := 1 to nm
    k := k + 1
```

Ποιά είναι η τιμή του k όταν ο πιο πάνω κώδικας εκτελεστεί;

1.11 Πόσα υποσύνολα ενός συνόλου με 10 στοιχεία a) έχουν λιγότερα από 5 στοιχεία; b) έχουν περισσότερα από 7 στοιχεία; c) έχουν περιττό πλήθος στοιχείων;

1.12 Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 6 αντικείμενα σε 5 κουτιά εάν a) και τα αντικείμενα και τα κουτιά είναι αριθμημένα; b) τα αντικείμενα είναι αριθμημένα αλλά τα κουτιά όχι; c) τα κουτιά αριθμημένα αλλά τα αντικείμενα όχι; d) ούτε τα κουτιά ούτε τα αντικείμενα είναι αριθμημένα;