ΤΕΜ, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Διακριτά Μαθηματικά (ΕΜ 201),

Χειμερινό Εξάμηνο 2008 (Π. Λεκέας),

Διαγώνισμα 3

Ερώτηση 1 (14 μονάδες): Εκφράστε την αριθμητική συνάρτηση $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ με τους όρους a_n, ∇a_n, $\nabla^2 a_n$ (Σημείωση: $\nabla^2 a_n = \nabla(\nabla a_n)$).

Απάντηση: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_n - \nabla a_n) + (a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n) = 2a_n - 3\nabla a_n + \nabla^2 a_n \Rightarrow a_n = 3\nabla a_n - \nabla^2 a_n$.

Ερώτηση 2 (15 μονάδες): Έστω συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(x)$ από τους θετικούς ακεραίους στους θετικούς πραγματικούς και έστω $f_1(x) = f_2(x) = \Theta(g(x))$. Ισχύει ότι $(f_1 - f_2)(x) = \Theta(g(x))$; Είτε αποδείξτε ότι ισχύει είτε δώστε αντιπαράδειγμα.

Απάντηση: Δεν ισχύει. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f_1(x) = x^3 + 4x$, $f_2(x) = x^3 + x$ και $g(x) = x^3$. $f_1(x) = f_2(x) = \Theta(x^3)$, αλλά $(f_1 - f_2)(x) = \Theta(x)$.

Ερώτηση 3 (11 μονάδες):

Λύστε την αναδρομική εξίσωση: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 2$ και $\alpha_1 = 1$

Απάντηση: $a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

Ερώτηση 4 (15 μονάδες): Ποιός ο ρυθμός αύξησης της $f(n) = 3nlog(n!) + (n^2 + 3)logn$; Αποδείξτε την απάντησή σας.

Απάντηση: $O(n^2 logn)$

Ερώτηση 5 (14 μονάδες): Λύστε την: $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$ με $a_1 = 4$.

Απάντηση: $a_n = (n+1)2^n$.

Ερώτηση 6 (11 μονάδες): Ποιά είναι η γενική μορφή της λύσης μίας αναδρομικής εξίσωσης της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση έχει για ριζες τις: 1,1,1,1,-2,-2,-2,3,3,-4 ;

Απάντηση: $a_n = (a_{1,0}+a_{1,1}n+a_{1,2}n^2+a_{1,3}n^3)+(a_{2,0}+a_{2,1}n+a_{2,2}n^2)(-2)^n+(a_{3,0}+a_{3,1}n)3^n+a_{4,0}(-4)^n$

Ερώτηση 7 (20 μονάδες): Λύστε την $a_n = a_{n-1} + 1$, $a_0 = 0$ με γεννήτριες συναρτήσεις.

Απάντηση: Πολλαπλασιάζοντας με z^n και παίρνοντας αθροίσματα έχουμε $A(z) = zA(z) + \frac{z}{1-z}$ και $A(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. $A(z) = z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$. Άρα $a_n = n$.