ΤΕΜ, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Διακριτά Μαθηματικά (ΕΜ 201),

Χειμερινό Εξάμηνο 2008 (Π. Λεκέας),

Διαγώνισμα 1

Ερώτηση 1 (5 μονάδες): Έστω τα σύνολα $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $B = \{x | x$ υποσύνολο του $\{a, b\}\}$. Ισχύει οτι $A = B$; Αποδείξτε την απάντησή σας.

Ερώτηση 2 (7 μονάδες): Έστω A, B σύνολα. Είναι δυνατόν ποτέ να ισχύει $A \in B$ και $A \subseteq B$; Είτε αποδείξτε ότι δεν ισχύει, είτε δώστε δύο σύνολα A, B για τα οποία ισχύει.

Ερώτηση 3 (12 μονάδες): Έστω A_i το σύνολο όλων των μή κενών ακολουθιών από bits μήκους που δεν ξεπερνά το i. Βρείτε τα $\cup_{i=1}^{n} A_i$ και $\cap_{i=1}^{n} A_i$.

Ερώτηση 4 (12 μονάδες): Δείξτε ότι, το σύνολο όλων των πεπερασμένων δυαδικών ακολουθιών μήκους m είναι αριθμήσιμο.

Ερώτηση 5 (10 μονάδες): Χρησιμοποιώντας επαγωγή δείξτε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 4$, $2^n < n!$

Ερώτηση 6 (5 μονάδες): Ποιός είναι ο συντελεστής του $x^{101}y^{99}$ στο ανάπτυγμα του $(2x - 3y)^{200}$;

Ερώτηση 7 (12 μονάδες): α) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να τοποθετηθούν 6 όμοιες σφαίρες σε 9 διαφορετικά κουτιά; (το κάθε κουτί χωρά όσες μπάλες θέλουμε). β) Πόσοι 10-ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν, οι οποίοι περιέχουν τα ψηφία 0, 1 και 2 και στους οποίους εμφανίζονται 2 μηδέν, 3 άσσοι και 5 διπλά;

Ερώτηση 8 (15 μονάδες): Έστω $m > 1$ ακέραιος. Είναι η σχέση R=$\{(a, b) | a \equiv b \pmod{m}\}$ σχέση ισοδυναμίας στους ακεραίους; ($a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ ανν m διαιρεί το $a - b$)

Ερώτηση 9 (11 μονάδες): Βρείτε, αν υπάρχουν, το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ στο μερικά διατεταγμένο χώρο: (Z^+, |), (υπόδειξη: σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse).

Ερώτηση 10 (11 μονάδες): α) Πόσα χαρτιά πρέπει κάποιος με κλειστά μάτια να τραβήξει από μία τράπουλα 52 φύλλων ώστε να είναι σίγουρος ότι έχει στα χέρια του τουλάχιστον 3 χαρτιά από το ίδιο είδος; (π.χ. κούπες ή σπαθιά κ.λπ.), β) Πόσα πρέπει πάλι με κλειστά μάτια να διαλέξει ώστε να είναι σίγουρος ότι έχει διαλέξει 3 κούπες;