ΤΕΜ, Πανεπιστήμιο Κρήτης,

Διακριτά Μαθηματικά (ΕΜ 201),

Σεπτέμβριος 2009 (Π. Λεκέας),

Ερώτηση 1 (5 μονάδες): Αν A, B σύνολα, αποδείξτε ότι, $\overline{A \cap B}$=$\overline{A} \cup \overline{B}$.

Απάντηση: Ένας τρόπος είναι να αποδείξει κανείς ότι $\overline{A \cap B}$ $\subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ και επιπλέον ότι $\overline{A} \cup \overline{B}$ $\subseteq \overline{A \cap B}$. Για τον πρώτο εγκλεισμό έστω $x \in \overline{A \cap B}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $x \notin A \cap B$, το οποίο σημαίνει ότι $x \in \overline{A}$ ή $x \in \overline{B}$, δηλαδή $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Παρομοίως και ο άλλος εγκλεισμός.

Ερώτηση 2 (5 μονάδες): Χρησιμοποιώντας επαγωγή δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο k, $k < 2^k$.

Απάντηση: <u>Βάση</u>: Για $k = 1$ ισχύει, διότι $1 < 2^1 = 2$. <u>Επαγωγική υπόθεση</u>: υποθέτουμε ότι ισχύει για τον θετικό ακέραιο k, δηλ. $k < 2^k$. <u>Επαγωγικο Βήμα</u>: Ίσχύει ότι $k < 2^k$ (από επαγωγική υπόθεση). Προσθέτω μία μονάδα και στα δύο μέλη, οπότε έχω $k + 1 < 2^k + 1$. Όμως $1 \leq 2^k$, άρα $k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. Άρα ισχύει και για $k + 1$ και για κάθε θετικό ακέραιο k.

Ερώτηση 3 (10 μονάδες): Σας δίνεται ο ακόλουθος κώδικας υπολογιστή:

$k := 0$

`for` $i_1 := 1$ `to` n_1

  `for` $i_2 := 1$ `to` n_2

.

.

.

    `for` $i_m := 1$ `to` n_m

      $k := k + 1$

Ποιά είναι η τιμή του k όταν ο πιο πάνω κώδικας εκτελεστεί;

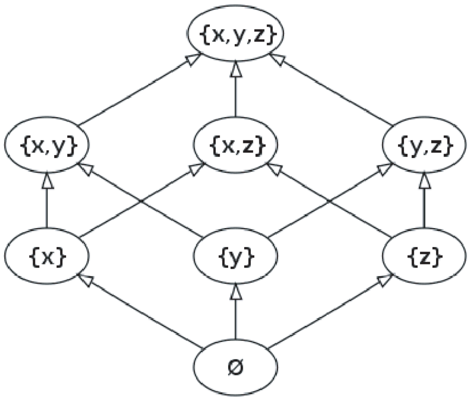
Απάντηση: Κάθε φορά που ο εμφωλευμένος βρόχος εκτελείται, στο k προστίθεται 1. Ορίζουμε το ενδεχόμενο T_i: "εκτελείται ο i-th βρόχος." Οι φορές που εκτελείται ο βρόχος T_j, $j = 1, 2, \cdots, m$, είναι n_j, διότι ο j-th βρόχος εκτελείται μία φορά για κάθε ακέραιο i_j, $1 \leq i_j \leq n_j$. Όμως εμείς διαθέτουμε m ενδεχόμενα $T_1, T_2, \cdots, T_m$. Άρα από κανόνα του γινομένου η τιμή του k είναι το γινόμενο των τρόπων που μπορεί να εκτελεστούν τα ενδεχόμενα, άρα $k = n_1 n_2 \cdots n_m$.

Ερώτηση 4 (15 μονάδες): Πόσα υποσύνολα ενός συνόλου με 10 στοιχεία a) έχουν λιγότερα από 5 στοιχεία; b) έχουν περισσότερα από 7 στοιχεία; c) έχουν περιττό πλήθος στοιχείων;

Απάντηση: a) $\binom{10}{4} + \binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{1} + \binom{10}{0} = 386, b) \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 56, c) \binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{7} + \binom{10}{9} = 512.$

Ερώτηση 5 (10 μονάδες): Φτιάξτε το διάγραμμα Hasse της μερικής διάταξης $\{(A, B)|A \subseteq B\}$ η οποία ορίζεται στο δυναμοσύνολο τριών στοιχειων: $(\wp(\{x, y, z\}), \subseteq)$. Το $\wp(.)$ συμβολίζει το δυναμοσύνολο.

Απάντηση:



Ερώτηση 6 (10 μονάδες): a) Ο γράφος

$$G(\{(a, b, c, d, e, f, g\}, \{(a, g), (a, f), (a, e), (b, f), (b, e), (b, c), (c, d), (d, g), (d, e), (d, f)\})$$

είναι διμερής; Αιτιολογείστε την απάντησή σας, b) ισχύει ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας με 0 και 1, που έχει 0 στη διαγώνιο και είναι συμμετρικός ως προς αυτήν, είναι πίνακας γειτνίασης απλού γράφου; Εξηγείστε.

Απάντηση: a) Είναι, διότι το σύνολο των κορυφών του μπορεί να χωριστεί σε δύο υποσύνολα, έτσι ώστε να μην υπάρχουν ακμές μεταξύ κορυφών που ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο, π.χ. {a,b,d}, {c,e,f,g} b) αφού ο γράφος απλός δεν υπάρχουν ακμές από κόμβο προς τον εαυτό του άρα τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα μηδέν. Επιπλέον εάν στο γράφο ο κόμβος i ενώνεται με τον j, τα συμμετρικά ως προς τη διαγώνιο ζευγάρια (i, j) και (j, i) του πίνακα γειτνίασης θα έχουν την τιμή 1, άρα ισχύει.

Ερώτηση 7 (10 μονάδες): Έχει ο γράφος της Figure 1 κύκλωμα Hamilton;

Απάντηση: Έχει, βλέπε Figure 2.

Ερώτηση 8 (20 μονάδες): a) Βρείτε την αναδρομική σχέση που ικανοποιείται από την R_n, όπου R_n είναι ο αριθμός των περιοχών στις οποίες χωρίζεται το επίπεδο από n ευθείες, εάν κανένα ζευγάρι από τις ευθείες δεν είναι παράλληλες και καμία τριάδα από αυτές δεν περνούν από το ίδιο σημείο, b) Λύστε την αναδρομική εξίσωση $a_n = a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$.

Απάντηση: a) $R_n = n + R_{n-1}$, $R_0 = 1$, b) Η ομογενής της a_n είναι η $a_n = a_{n+1}$ και έχει χαρακτηριστική την $r - 1 = 0$ με λύση $r = 1$, άρα $a^h(n) = A(1^n) = A$, όπου A μία σταθερά. Βρίσκουμε τώρα μία μερική λύση ως εξής: επειδή $f(n) = n = n \cdot (1)^n$ και $s = 1$ είναι ρίζα πολλαπλότητας 1 της χαρακτηριστικής της ομογενούς, η μερική λύση θα έχει τη μορφή: $n(Bn + C)$. Εισάγοντας τη μερική στην a_n βρίσκουμε $B = C = 1/2$. Άρα $a^p(n) = n(n+1)/2$, άρα $a_n = A + n(n+1)/2$. Όμως $a_0 = 1$, άρα $A = 1$, και τελικά $a_n = 1 + n(n+1)/2$.

Ερώτηση 9 (10 μονάδες): Λύστε την $a_k = 3a_{k-1}$, $a_0 = 2$ για $k = 1, 2, 3, ...$ με γεννήτριες συναρτήσεις. (Σημ. δινεται ότι $1/(1 - ax) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$).

Απάντηση: Έστω $G(x)$ η γεννήτρια της a_k. Εξ' ορισμού ισχύει ότι $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Πολλαπλασιάζουμε με x και έχουμε $xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$. Από αναδρομική εξίσωση έχουμε: $G(x) - 3xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - 3a_{k-1})x^k = 2$. Άρα $(1 - 3x)G(x) = 2$, άρα $G(x) = 2/(1 - 3x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 3^k \cdot x^k$, οπότε $a_k = 2 \cdot 3^k$.

Ερώτηση 10 (5 μονάδες): Είναι το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(Z^+, |\,)$ δικτυωτό; ($|$ είναι η πράξη της διαίρεσης στους ακέραιους).

Απάντηση: Έστω a, b δύο θετικοί ακέραιοι. Το ελαχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα αυτών των δύο ακεραίων είναι το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ αντίστοιχα. Άρα αφού κάθε τυχαίο ζευγάρι του συνόλου έχει εαφ και μκδ, είναι δικτυωτό.

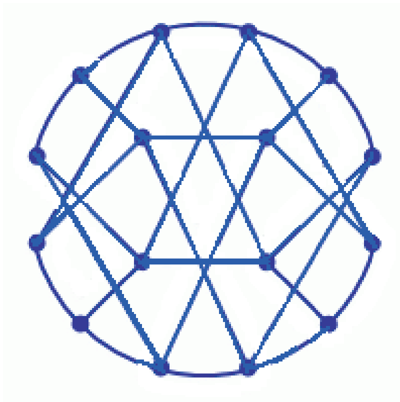


Figure 1: Έχει ο γράφος κύκλωμα Hamilton;

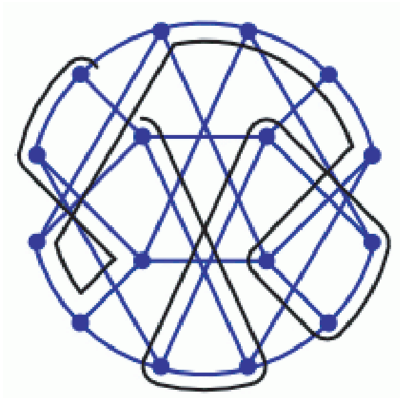


Figure 2: Ένα κύκλωμα Hamilton του γράφου της Figure 1.