Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Εξέταση Σεπτεμβρίου 2008
Διακριτά Μαθηματικά (ΕΜ 201)
ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1 α) (μονάδες 3): Είναι το σύνολο των πρώτων αριθμών αριθμήσιμο; Γιατί;

Λύση: Είναι, διότι υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των πρώτων αριθμών και των στοιχείων του N. Για παράδειγμα αντιστοιχίζω το n-οστό πρώτο αριθμό στο n-οστό φυσικό. Ένας άλλος τρόπος είναι να πούμε οτι επειδή το σύνολο των πρώτων υποσύνολο του N το οποίο είναι αριθμήσιμο, άρα και το σύνολο των πρώτων αριθμήσιμο.

ΘΕΜΑ 1 β) (μονάδες 4): Θεωρείστε τους αριθμούς Fibonacci οι οποίοι αναδρομικά ορίζονται ως εξής: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, i \geq 2$. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε το ακόλουθο θεώρημα:

$$\forall n \geq 1, F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Λύση: Βάση, $F_0 F_1 = 0 \cdot 1 = 0$.

Υποθέτω οτι ισχύει για $m \geq 0$, δηλαδή ότι: $\sum_{i=1}^{m} F_i^2 = F_m F_{m+1}$.

Θέλω να αποδείξω ότι: $\sum_{i=1}^{m+1} F_i^2 = F_{m+1} F_{m+2}$.

Από ορισμό αριθμών Fibonacci: $F_m + F_{m+1} = F_{m+2} \Rightarrow F_{m+1}^2 = F_{m+1}F_{m+2} - F_m F_{m+1}$. Από επαγωγική υπόθεση έχω: $F_{m+1}^2 + \sum_{i=1}^{m} F_i^2 = F_{m+1}F_{m+2} - F_m F_{m+1} + F_m F_{m+1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m+1} F_i^2 = F_{m+1}F_{m+2}$. Άρα ισχύει $\forall m \in N$.

ΘΕΜΑ 1 γ) (μονάδες 8): Μία δεσμιδα 10 καρτών, οι οποίες φέρουν διαφορετικούς μεταξύ τους αριθμούς από το 1 έως το 10, ανακατεύεται έτσι ώστε οι κάρτες να αναμειχθούν εντελώς. Στη συνέχεια, αφαιρούνται από τη δεσμίδα τρεις κάρτες, η μία κατόπιν της άλλης. Ποιά είναι η πιθανότητα οι αριθμοί των τριών καρτών να ειναι διατεταγμένοι κατά αύξουσα σειρά;

Λύση: Έστω x, y, z αριθμοί από το 1 έως το 10 διαφορετικοί μεταξύ τους ($x \neq y \neq z$). Τα ευνοϊκά γεγονότα είναι όλες οι τριάδες (x, y, z) έτσι ώστε $x < y < z$. Για x=10 δεν έχω καμία ευνοϊκή τριάδα, παρομοίως για x=9. Για x=8 έχω 1 τριάδα, την (8,9,10). Για x=7 έχω 3 τριάδες κ.λπ. Αθροίζοντας όλες τις τριάδες βρίσκω οτι τα ευνοϊκά γεγονότα είναι 120. Όμως όλες οι τριάδες, που είναι $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ είναι ισοπίθανες να εμφανιστούν. Άρα η πιθανότητα να μου έρθει ταξινομημένη τριάδα είναι $\dfrac{120}{720} = 0,16666$.

ΘΕΜΑ 2 α) (μονάδες 6): Δίνονται 25 σημεία στο ίδιο επίπεδο τέτοια ώστε μεταξύ οποιονδήποτε 3 σημείων να υπάρχει ζευγάρι σε απόσταση μικρότερη της μονάδος. Υπάρχει κύκλος ακτίνας 1 που να περιέχει τουλάχιστον 13 από τα 25 σημεία; Αιτολογείστε την απάντησή σας.

Λύση: Έστω ένα σημείο από τα 25 με όνομα Α. Φέρνω κύκλο κέντρου Α και ακτίνας 1. Έστω σημείο Β (από τα 25) που δεν ανήκει στον προηγούμενο κύκλο (αν δεν υπάρχει τέτοιο σημείο τότε αποδείχτηκε). Φέρνω άλλο κύκλο με κέντρο το Β και ακτίνα 1. Εξ' ορισμού η απόσταση μεταξύ των Α και Β είναι μεγαλύτερη του 1. Όμως, από εκφώνηση, για κάθε σημείο Γ, είτε η απόστασή του από το Α, είτε από το Β είναι μικρότερη του 1. Άρα από την αρχή του περιστερεώνα, τουλάχιστον 13 σημεία βρίσκονται σε κάποιον από τους δύο κύκλους, άρα το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 2 β) (μονάδες 11): Έστω G γράφος. Έστω οι ακόλουθες προτάσεις:

1. Ο G είναι ελεύθερο δένδρο.
2. Ο G δεν περιέχει κύκλους και έχει $n-1$ ακμές.
3. Ο G συνεκτικός και έχει $n-1$ ακμές.

Αποδείξτε τις ακόλουθες συνεπαγωγές: $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$.

Λύση: $1 \Rightarrow 2$: Έστω G δένδρο και v_n κόμβος που πρόσκειται μόνο σε έναν άλλο κόμβο (έστω τον v_{n-1}). Αν διαγράψω τον v_n και την ακμή $v_n v_{n-1}$, ο γράφος G' που προκύπτει είναι δένδρο (διότι ο κόμβος που μόλις αφαιρέσαμε εμφανίζεται είτε στην αρχή είτε στο τέλος ενός απλού μονοπατιού, οπότε όταν αφαιρέθηκε ο κόμβος το μονοπάτι δεν χάλασε απλώς μειώθηκε το μήκος του κατά 1). Το πιο πάνω επιχείρημα αποδεικνύει (επαγωγικά στο n) οτι ο G έχει $n-1$ ακμές.

$2 \Rightarrow 3$: Έστω v_n κόμβος που πρόσκειται μόνο στον v_{n-1}. Αφαιρώ τον v_n και την ακμή $v_n v_{n-1}$, οπότε ο G' που προκύπτει έχει $n-2$ ακμές και $n-1$ κόμβους. Επαγωγικά (αφαιρώντας έναν έναν κόμβο) βλέπω οτι ο G συνεκτικός, αφού από τον τυχαίο v_n μπορώ να πάω σε κάθε κόμβο του G'.

ΘΕΜΑ 2 γ) (μονάδες 3): Ένας μη κατευθυνόμενος πλήρης γράφος 19 κορυφών έχει κύκλωμα Euler;

Λύση: Έχει διότι είναι συνεκτικός και κάθε κορυφή του είναι άρτιου βαθμού.

ΘΕΜΑ 3 α) (μονάδες 6): Δείξτε οτι για οποιεσδήποτε πραγματικές σταθερές a, b, όπου $b > 0$ ισχύει: $(n+a)^b = \Theta(n^b)$.

Λύση: Πρέπει να βρούμε σταθερές c_1, c_2, $n_0 > 0$ τέτοιες ώστε $0 \le c_1 n^b \le (n+a)^b \le c_2 n^b$, $\forall n \ge n_0$. Ισχύει οτι $n + a \le n + |a| \le 2n$, όταν $|\alpha| \le n$, και $n + a \ge n - |a| \ge n/2$, όταν $|\alpha| \le n/2$. Άρα όταν $n \ge 2|a|$, $0 \le n/2 \le n + a \le 2n$. Επειδή $b > 0$ ισχύει οτι:

$$0 \le (n/2)^b \le (n+a)^b \le (2n)^b \Rightarrow$$

$$0 \le (1/2)^b n^b \le (n+a)^b \le 2^b n^b$$

Άρα για $c_1 = (1/2)^b$, $c_2 = 2^b$, και $n_0 = 2|a|$ το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 3 β_1**)** (μονάδες 4): Επενδυτής "κλείνει" σε βιβλιάριο 10,000 euro από τις καταθέσεις του με 5% ετήσιο επιτόκιο. Υπολογείστε χρησιμοποιώντας αναδρομικές σχέσεις τον τύπο που δίνει το ποσό που περιέχει το βιβλιάριο μετά από n έτη.

Λύση: Έστω a_n το ποσο του βιβλιαρίου μετά από n έτη. Ισχύει οτι $a_n = a_{n-1} + 0.05a_{n-1} = 1.05a_{n-1}$. Όμως $a_0 = 10{,}000$, άρα $a_n = 1.05^n a_0 = 10,000 \cdot 1.05^n$.

ΘΕΜΑ 3 β_2**)** (μονάδες 4): Ποιά η λύση της $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 6$;

Λύση: Η χαρακτηριστική $\rho^2 - 6\rho + 9 = 0$ έχει διπλή ρίζα $\rho = 3$. Άρα η λύση της αναδρομικής σχέσης είναι $a_n = \lambda_1 3^n + \lambda_2 n 3^n$. Από συνοριακές συνθήκες τελικά $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 1$, άρα $a_n = 3^n + n3^n$.

ΘΕΜΑ 3 γ**)** (μονάδες 2): Τρείς πλήρεις γράφοι έχουν 100 κοινές κορυφές, πόσες κατά μέγιστο κοινές ακμές μπορούν να έχουν;

Λύση: Κατά μέγιστο μπορούν να έχουν $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$ κοινές ακμές.

ΘΕΜΑ 4 α**)** (μονάδες 5): Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Fibonacci.

Λύση: Έστω $G(z)$ η ζητούμενη γεννήτρια, τότε $G(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \ldots = z + zG(z) + z^2 G(z)$ $\Rightarrow G(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$.

ΘΕΜΑ 4 β**)** (μονάδες 4): Έστω R διμελής σχέση που ορίζεται ως εξής: $(x, y) \in R$ ανν $|x - y|$ άρτιος. Είναι η R σχέση ισοδυναμίας; Αποδείξτε την απάντησή σας.

Λύση: Η R είναι σχέση ισοδυναμίας διότι είναι <u>ανακλαστική</u> αφού $|x - x| = 0$ και το 0 άρτιος, είναι <u>συμμετρική</u>, διότι για κάθε $x, y, |x - y| = |y - x|$ και $|x - y|$ άρτιος, και <u>μεταβατική</u>, διότι αν $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$, τότε $x - y$ και $y - z$ άρτιοι, και $x - z = (x - y) + (y - z)$ άρτιος και άρα $|x - z|$ άρτιος.