ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Χειμερινό εξάμηνο 2007 - 2008,
ΕΜ 201, Διακριτά Μαθηματικά,
Διδάσκων Παρασκευάς Λεκέας

Τελική Εξέταση

Έχετε στη διάθεσή σας 3 ώρες για να λύσετε τα προβλήματα. Το άριστα για αυτό το διαγώνισμα είναι 100 μονάδες.

Ονοματεπώνυμο :	**Α.Μ. :**

Βαθμοί

1. α)
   β)
   γ)

2. α)
   β)

3. α)
   β)

4. α)
   β)

5. α)
   β)

Σύνολο ______________

ΛΥΣΕΙΣ

1. α) **(μονάδες 6)** Χρησιμοποιώντας Συνδυαστικά Επιχειρήματα (δηλ. χωρίς να κάνετε πράξεις ή να χρησιμοποιήσετε μαθηματική επαγωγή) αποδείξτε οτι: $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$,

β) **(μονάδες 4)** Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε οτι (1-1/2)(1-1/3)(1-1/4)...(1-1/n)=1/n, για κάθε φυσικό n≥2 ,

γ) **(μονάδες 7)** Ένας ακέραιος α διαιρεί έναν ακέραιο β, αν ο β είναι πολλαπλάσιο του α. Τότε γράφουμε α | β. Αποδείξτε οτι : $\forall\, n \in N$, 3 | (n^3 - n).

Απόδειξη 1α) Υπάρχουν 2^n υποσύνολα ενός συνόλου n στοιχείων. Έστω A_r ένα τέτοιο υποσύνολο μεγέθους r. Υπάρχουν $\binom{n}{r}$ τέτοια υποσύνολα για r=0, 1, ..., n. Άρα $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$

Απόδειξη 1β) Επαγωγή στο n. Βάση: ισχύει διότι (1-1/2)=1/2.
Επαγωγικό βήμα: Έστω οτι ισχύει για n, θα το δείξω για n+1
(1-1/2)(1-1/3)...(1-1/n)(1-1/(n+1))=1/n(1-1/(n+1))=1/(n+1).
Άρα ισχύει και για n+1 και για κάθε n≥2.

Απόδειξη 1γ) Επαγωγή στο n. Βάση: Ισχύει διότι 3 | 0^3-0
Επαγωγικό Βήμα: Έστω οτι ισχύει για n, θα το δείξω για n+1
3 | (n^3 -n) $\Rightarrow$ 3 | (n^3 -n) + 3(n^2 +n) $\Rightarrow$ 3 | n^3 +3 n^2 +3n+1-n-1 $\Rightarrow$ 3 | $(n+1)^3 - (n+1)$.
Άρα ισχύει και για n+1 και για κάθε $n \in N$.

2. α) **(μονάδες 13)** Αποδείξτε οτι οποιοδήποτε σύνολο 10 αριθμών μικρότερων του 100 έχει δύο διαφορετικά υποσύνολα που αθροίζουν στον ίδιο αριθμό ,

β) **(μονάδες 6)** Κάθε σημείο στην περιφέρεια ενός κύκλου χρωματίζεται είτε με κόκκινο είτε με κίτρινο χρώμα. Αποδείξτε οτι ανεξαρτήτως του πώς τα χρώματα θα κατανεμηθούν, υπάρχουν 3 σημεία Α, Β, Γ επάνω στον κύκλο με το ίδιο χρώμα έτσι ώστε τα τόξα ΑΒ και ΒΓ να είναι ίσα.

Απόδειξη 2α) Υπάρχουν 2^{10} -1 =1023 υποσύνολα των 10 αριθμών (εξαιρούμε το κενό σύνολο). Σε αυτά τα υποσύνολα αντιστοιχούν 945 αριθμοί (945=90+91+...+99 το μεγαλύτερο άθροισμα που μπορώ να πάρω). Άρα αν 1023 είναι τα περιστέρια και 945 οι φωλιές αποδεικνύεται οτι 2 διαφορετικά υποσύνολα έχουν το ίδιο άθροισμα. Αν επιπλέον αυτά τα υποσύνολα έχουν και κάποιο κοινό αριθμό τον βγάζω οπότε πάλι αθροίζουν στο ίδιο νούμερο.

Απόδειξη 2β) Έστω εγγεγραμμένο κανονικό πεντάγωνο στον κύκλο. 3 από τις 5 κορυφές του (σημεία του κύκλου) θα είναι του ιδίου χρώματος από αρχή περιστερεώνα. Αυτές οι τρεις κορυφές σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο οπότε το ζητούμενο.

3. α) **(μονάδες 7)** Λύστε την αναδρομική σχέση $a_{n+1} = 2a_n + n$ ($n \geq 0$, $a_0 = 1$) με τον "παραδοσιακό τρόπο" (δηλ. βρείτε τη μερική **λύση** και ~~ειδική λύση~~ **τη λύση της ομογενούς** κ.λπ.) ,

β) **(μονάδες 14)** Λύστε την αναδρομική σχέση της 3α) χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις.

Απόδειξη 3α) <u>Λύση ομογενούς:</u> Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\alpha^2 - 2\alpha=0$ άρα $\alpha=0$ ή $\alpha=2$, άρα $a_n^{(h)} = A_1 0^n + A_2 2^n = A_2 2^n$

<u>Λύση μερικής:</u> Υποθέτω λύση της μορφής $P_1 n + P_2$ με αντικατάσταση στην αναδρομική σχέση έχω $P_1 = -1$ και $P_2 = -1$, άρα $a_n^{(p)} = -n-1$, άρα $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A_2 2^n - n - 1$, αλλά $a_0 = 1$, άρα $A_2 = 2$, άρα $\boxed{a_n = 2^{n+1} - n - 1}$

Απόδειξη 3β) Πολλαπλασιάζω αριστερά και δεξιά με z^n και αθροίζω για $\sum_{n\geq 0} nz^n$ οπότε έχω:

$\sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n = \sum_{n\geq 0} 2a_n z^n + \sum_{n\geq 0} nz^n$, όμως $\sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n = (A(z)-1)/z$, και $\sum_{n\geq 0} nz^n = \sum_{n\geq 0} z\frac{d}{dz} z^n = z(\frac{d}{dz}) \sum_{n\geq 0} z^n = z\frac{d}{dz}(1/(1-z)) = z/(1-z)^2$

Άρα $(A(z)-1)/z = 2A(z) + z/(1-z)^2$, τελικά $A(z) = (1-2z+z^2)/(1-z)^2(1-2z) = A/(1-z)^2 + B/(1-z) + C/(1-2z)$ και $A=-1$, $B=0$, $C=2$ άρα $A(z) = (-1)/(1-z)^2 + 2/(1-2z)$ και άρα $\boxed{a_n = 2^{n+1} - n - 1}$.

4. α) **(μονάδες 15)** Ελεύθερο δένδρο ή δένδρο χωρίς ρίζα είναι ένας συνεκτικός γράφος χωρίς κύκλους. Αποδείξτε το ακόλουθο Θεώρημα: Αν G γράφος τότε οι πιο κάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. G ελεύθερο δένδρο
2. G συνεκτικός, αλλά αν οποιαδήποτε ακμή του G διαγραφεί, παύει να είναι συνεκτικός
3. Αν v , v' ξεχωριστοί κόμβοι στο G, τότε υπάρχει ακριβώς ένα απλό μονοπάτι από το v στο v'

β) **(μονάδες 9)** Απαντήστε στις πιο κάτω ερωτήσεις (αποδείξτε την απάντησή σας):

i) Είναι σωστό να πούμε οτι κάθε πλήρης γράφος με τρεις ή περισσότερες κορυφές έχει κύκλωμα Hamilton;

ii) Ο K_{14} έχει κύκλωμα Euler;

iii) Είναι ο K_7 επίπεδος; Γιατί;

Απόδειξη 4α) 1⇒2: Αν διαγράψω μία ακμή π.χ. τη vv' και ο G συνεχίζει να είναι συνεκτικός τότε θα υπάρχει απλό μονοπάτι $v, v_1, \ldots, v'$ μήκους ≥2, άρα αν ξαναπροσθέσω την vv' θα έχω τον κύκλο $(v, v_1, \ldots, v', v)$ στον G, άτοπο διότι στο ελεύθερο δένδρο δεν υπάρχουν κύκλοι.

2⇒3: Έστω δύο διαφορετικά μονοπάτια από το v στο v', τα $v, v_1, \ldots, v'$ και $v, v'_1, \ldots, v'$. Έστω k ο μικρότερος δείκτης για τον οποίο $v_k \neq v'_k$. Αν διαγράψω την ακμή $v_{k-1}v_k$ ο G θα συνεχίσει να είναι συνεκτικός που είναι άτοπο, άρα τα μονοπάτια ταυτίζονται.

3⇒1: Αν υπήρχε στον G κύκλος $v, v_1, \ldots, v$, τότε θα υπήρχαν 2 απλά μονοπάτια από το v στο v', άτοπο, άρα στον G δεν υπάρχει κύκλος, και αφού ο G συνεκτικός είναι ελεύθερο δένδρο.

Απόδειξη 4β) **i)** Για κάθε πλήρη γράφο με 3 ή περισσότερες κορυφές μπορώ να διατάξω τις κορυφές του επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου. Άρα άν διατρέξω την περιφέρεια του κύκλου τότε παίρνω ένα κύκλωμα Hamilton.

ii) Ο K_{14} είναι συνεκτικός αλλά κάθε κόμβος ενώνεται με τους υπόλοιπους 13 οπότε κάθε κόμβος έχει περιττό βαθμό. Όμως για να έχει κύκλωμα Euler θα έπρεπε να έχει μόνο κορυφές άρτιου βαθμού, άρα δεν έχει κύκλωμα Euler.

iii) από το θεώρημα του Kuratowski δεν είναι (π.χ. ο K_7 περιέχει τον υπογράφο K_5).

5. α) **(μονάδες 12)** 8 φίλοι πήγαν να παίξουν μπάσκετ (στο μπάσκετ παίζουν πεντάδες!) με μία άλλη ομάδα.

i) Πόσες πεντάδες μπορούν να σχηματιστούν από τους 8 φίλους;

ii) Αν ο ψηλότερος πρέπει πάντα να παίζει πόσες είναι οι πεντάδες; (υπάρχει ένας μόνο ψηλότερος)

iii) Αν γνωρίζουμε οτι ανάμεσα στους 8 φίλους κάποιος λέγεται Κώστας και κάποιος άλλος Γιάννης και οτι δεν υπάρχουν άλλοι με αυτά τα ονόματα, πόσες είναι οι πεντάδες που σχηματίζονται αν θέλουμε οπωσδήποτε ένας από τους Κώστα και Γιάννη να παίζει στην πεντάδα;

iv) Πόσες είναι οι πεντάδες αν δεν θέλουμε ούτε ο Κώστας ούτε ο Γιάννης να συμμετέχουν;

β) **(μονάδες 7)** Έστω a και b αριθμητικές συναρτήσεις. Δείξτε οτι max(a, b)=Θ(a+b)

Απόδειξη 5α) **i)** C(8,5)=56 πεντάδες, **ii)** C(7,4)=35 πεντάδες, **iii)** Οι πεντάδες που έχουν μόνο Κώστα και όχι Γιάννη είναι C(6,4)=15, παρόμοια για Γιάννη και όχι Κώστα. Οι πεντάδες και με τους δύο είναι C(6,3)=20, άρα συνολικά οι ζητούμενες πεντάδες είναι 50, **iv)** 56-50=6.

Απόδειξη 5β) Προφανώς $\alpha+b \geqslant \alpha$ και $\alpha+b \geqslant b$ άρα $c_2(\alpha+b) \geqslant \max(\alpha, b)$ για $c_2=1$. Παρομοίως $(\alpha+b)/2 \leqslant \max(\alpha+b)$ δηλ. $c_1 = 1/2$. Άρα βρήκα δύο σταθερές c_1 , c_2 ώστε $0 \leqslant c_1(\alpha+b) \leqslant \max(\alpha+b) \leqslant c_2(\alpha+b)$ άρα το ζητούμενο.