



Μαθηματική και Αριθμητική Μοντελοποίηση στη Μηχανολογία

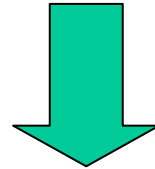
Νικόλαος Γ. Χρηστάκης
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης



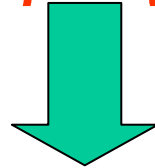
Περίληψη



Σύνθετο πρόβλημα της Μηχανολογίας



Καθορισμός της Φυσικής του
προβλήματος



Χρησιμοποίηση κατάλληλων
μαθηματικών-υπολογιστικών τεχνικών
για επίλυσή του



Οργάνωση Διάλεξης



- Στόχοι
- Εισαγωγή στην Μαθηματική-Αριθμητική Μοντελοποίηση
- Εξισώσεις, αλγόριθμοι και τεχνικές για περιγραφή συστημάτων-διεργασιών
- Προβλήματα και μεθοδολογία επίλυσης
- Προσομοιώσεις και αποτελέσματα
- Ανακεφαλαίωση- Συμπεράσματα



Στόχοι



Δημιουργία κατάλληλων μαθηματικών-υπολογιστικών εργαλείων για:

- *ανάλυση* συμπεριφοράς διεργασιών-συστημάτων
- *πρόβλεψη* εξελικτικής πορείας φαινομένου υπό μελέτη
- *εκ των προτέρων προσδιορισμός* πιθανών προβλημάτων



Μαθηματική – Αριθμητική Μοντελοποίηση



- **Μαθηματική μοντελοποίηση:** Η έκφραση με κατάλληλες εξισώσεις των βασικών ιδιοτήτων-νόμων που διέπουν διεργασίες που απαντώνται στη φύση και η μελέτη-επίλυσή τους υπό αρχικές συνθήκες με κατάλληλες μαθηματικές μεθόδους.
- **Αριθμητική μοντελοποίηση:** Η χρησιμοποίηση αριθμητικών-υπολογιστικών τεχνικών με την εισαγωγή κατάλληλων οριακών συνθηκών για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων με τη χρήση H/Y.
- **Εφαρμογές** σε Μηχανολογία, Φυσική, Μαθηματικά, Βιοϊατρική, Γενετική κλπ.

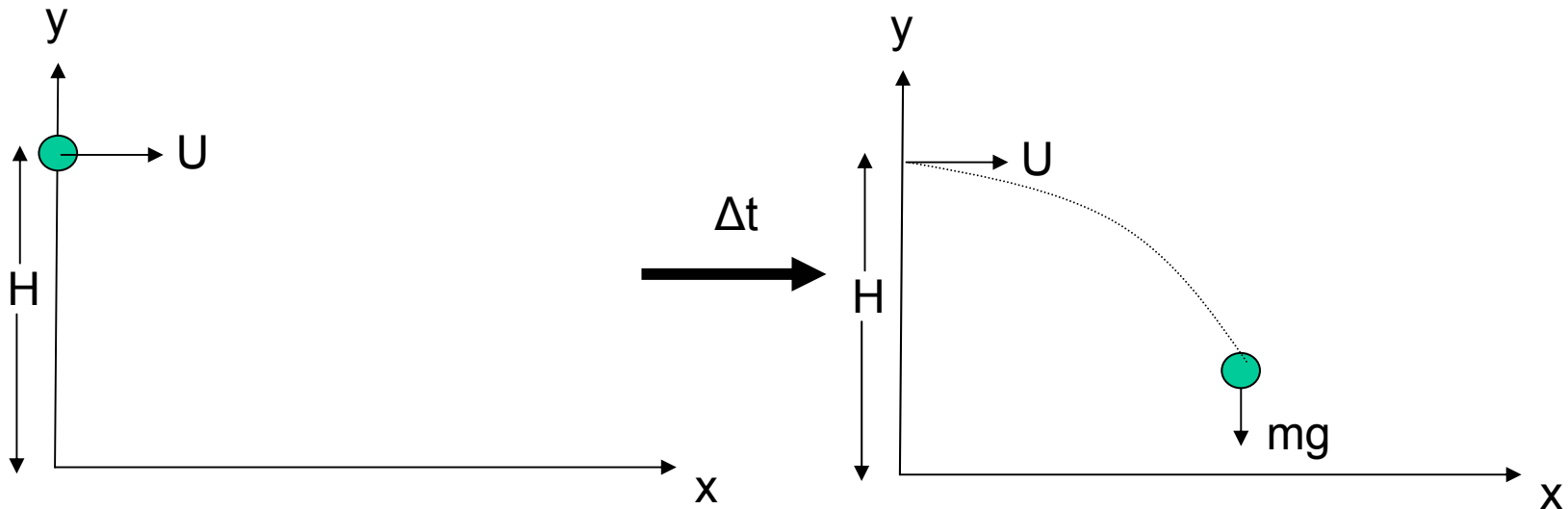


Παράδειγμα



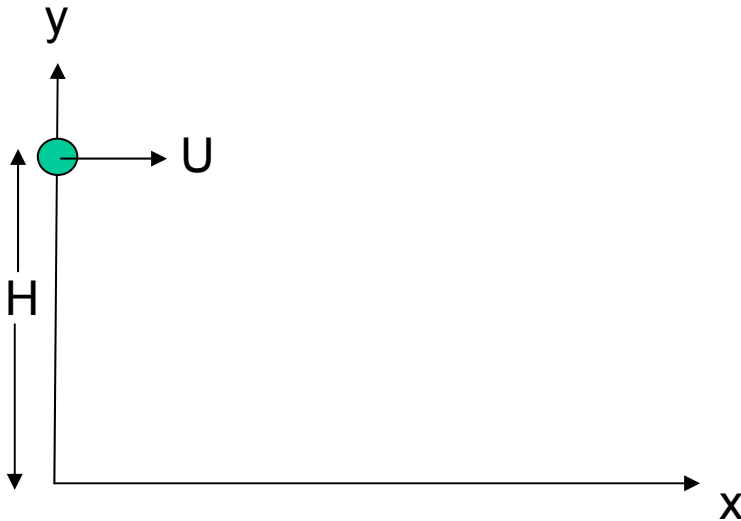
Κίνηση βολίδας

Βολίδα βάλλεται από ύψος H με οριζόντια ταχύτητα U





Παράδειγμα



Μαθηματικό μοντέλο

Εξισώσεις περιγραφής
συστήματος

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

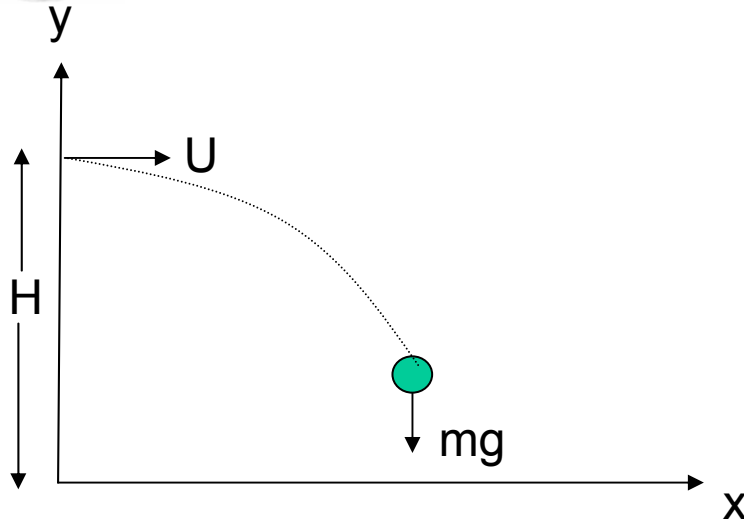
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

Αρχικές συνθήκες (Α.Σ.)

$$\left. \begin{array}{l} x=0, y=H \\ dx/dt=U, dy/dt=0 \end{array} \right\} \text{για } t=0$$



Παράδειγμα



Αναλυτική λύση (με
χρήση Α.Σ.)

$$\frac{dx}{dt} = U$$

$$\Rightarrow x = Ut$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$



Παραβολική τροχιά

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{U^2} + H$$



Παράδειγμα



Αριθμητική Επίλυση

- Μέθοδος προσέγγισης παραγώγων

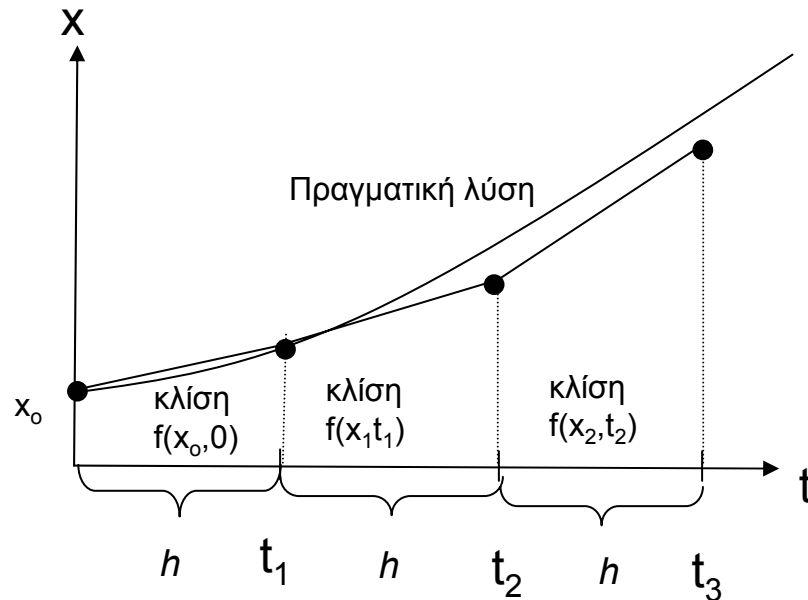
$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = f(x_n, t_n)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n, t_n)$$

όπου $\Delta t = h$

- Μέθοδος **Euler** (1768)
Προσέγγιση βήμα-βήμα
- Περισσότερα-μικρότερα βήματα \Rightarrow καλύτερη προσέγγιση
- Επίλυση **υπολογιστικά** με βρόγχο DO ή FOR





Μαθηματική – Αριθμητική Μοντελοποίηση



- Λόγοι που καθιστούν απαραίτητη τη χρήση Μοντελοποίησης για περιγραφή συστημάτων:
 - Κατανόηση φαινομένων που συμβαίνουν σε συστήματα τα οποία δεν είναι προσβάσιμα με άλλο τρόπο.
 - Πρόβλεψη της πορείας ενός συστήματος κάτω από δεδομένες συνθήκες
 - Βελτιστοποίηση διεργασίας/καλύτερος σχεδιασμός εξοπλισμού \Rightarrow εξοικονόμηση χρόνου και πόρων



Μοντελοποίηση στη Μηχανολογία



- Άμεσα συνδεδεμένη με τη μελέτη ροών υγρών-στερεών-αερίων ή/και αλληλεπιδράσεις σωματιδίων



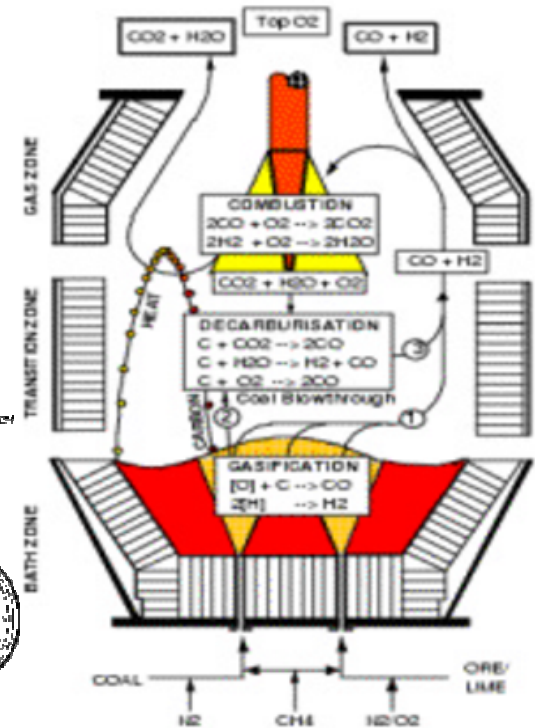
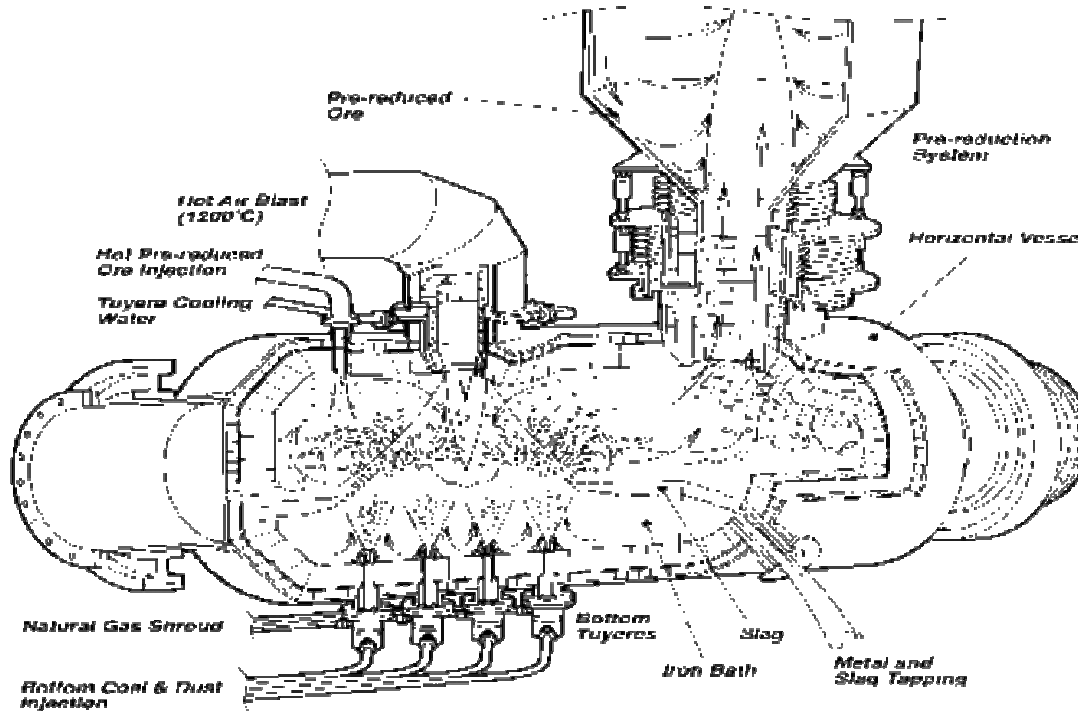
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ – ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ-

Ροή ρευστών (υγρά, στερεά, αέρια),
Μεταφορά θερμότητας (κλίσεις
θερμοκρασίας, αλλαγή φάσης),
Μεταφορά μάζας (αλλαγή φάσης,
μεταβολή μεγέθους σωματιδίων
Τάση/παραμόρφωση στερεών
(κατασκευές, συμπλέγματα σωματιδίων)



Από την Πραγματικότητα...



Σύνθετη βιομηχανική μονάδα κατεργασίας χαλκού



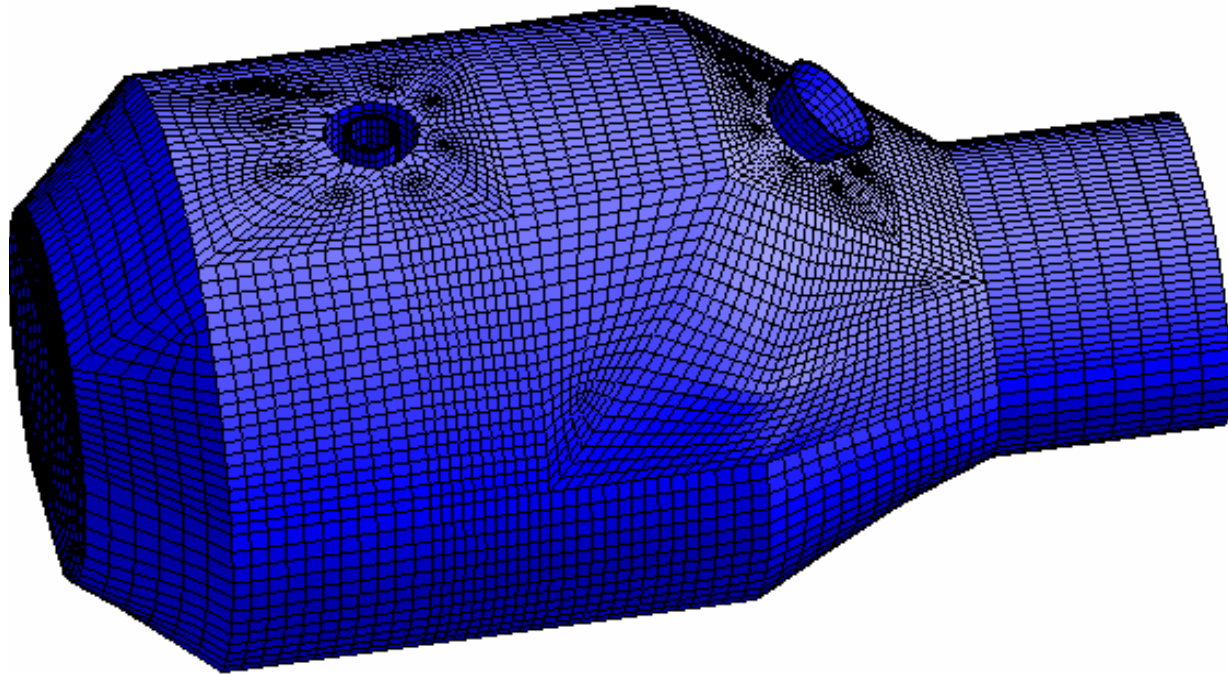
...στα Μαθηματικά Μοντέλα...



- Εξισώσεις περιγραφής μεταφοράς μάζας-ορμής-θερμότητας
- Καταστατικοί νόμοι για χημικές αντιδράσεις ή/και άλλες τυχόν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των συνιστωσών του συστήματος
- Κατάλληλες αρχικές συνθήκες



...στη Διακριτοποίηση...



Αναπαράσταση της σύνθετης διεργασίας στον “αριθμητικό” κόσμο



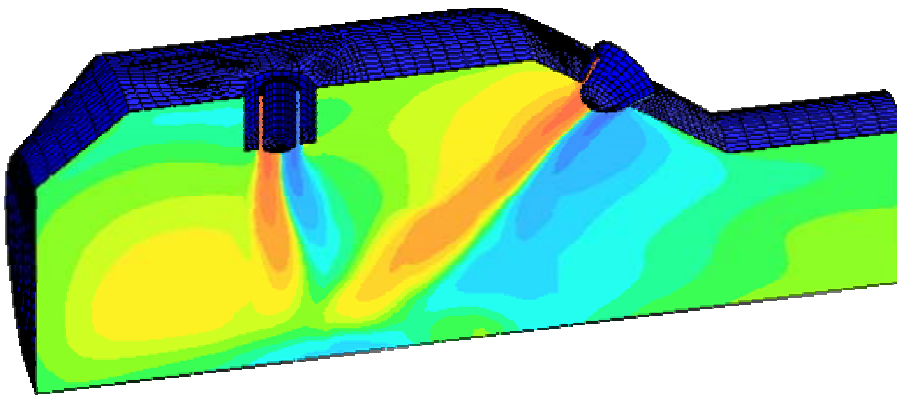
...στα Αριθμητικά Μοντέλα...



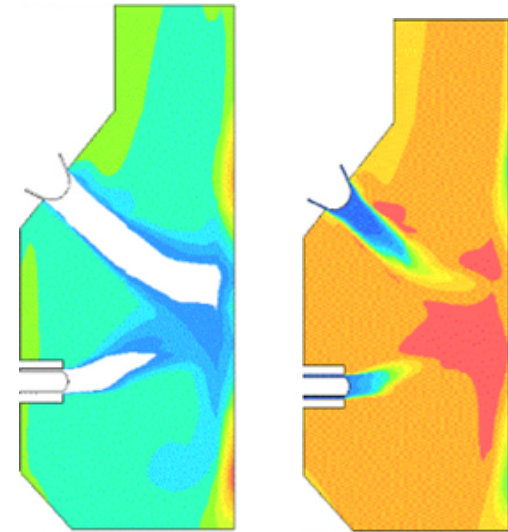
- Επιλογή κατάλληλων αριθμητικών σχημάτων και οριακών συνθηκών
- Εξασφάλιση ότι η λύση είναι κατ' αρχήν αξιόπιστη και σωστή (μέσα στα όρια ακρίβειας που έχουν τεθεί)
- Εξέταση αποτελεσμάτων (αριθμητικών και γραφικών)
- Βελτίωση μοντέλου μετά από αρχικές προσομοιώσεις (καλύτερη κατανόηση συμπεριφοράς μοντέλου)
- Τέλος, αποδοχή λύσης μετά από ικανοποίηση κριτηρίων σύγκλισης-ακρίβειας



...και Πίσω!



Προβλέψεις χημικών αντιδράσεων



Καύσιμο

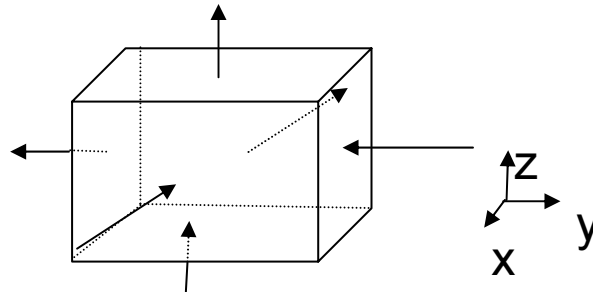
Θερμοκρασία



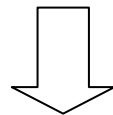
Μαθηματικά Μοντέλα-Βασικές Εξισώσεις(I)



- **Νόμοι Διατήρησης Μάζας, Ορμής, Ενέργειας σε στοιχείο του ρευστού**



- Η μάζα του ρευστού διατηρείται
- Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με το σύνολο των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχείο (**2ος Νόμος Νεύτωνα**)
- Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας ισούται με το ρυθμό προσθήκης θερμότητας και το ρυθμό απόδοσης έργου στο στοιχείο (**1ος Νόμος Θερμοδυναμικής**)



Μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας



Μαθηματικά Μοντέλα-Βασικές Εξισώσεις(II)



Γενική Μορφή Νόμων Διατήρησης

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u\phi - \Gamma\nabla\phi) = S_\phi$$

Χρονικός ρυθμός + Μεταφορά - Διάχυση = Πηγαίοι όροι

όπου ϕ : γραμμικό μέγεθος

Μαθηματικά Μοντέλα-Βασικές Εξισώσεις (III)

- Διατήρηση Μάζας

$$\frac{\partial (\rho)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{V}) = S_\rho$$

- Διατήρηση Ορμής
(εξισώσεις Navier-Stokes)

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho u \vec{V} - \mu \nabla u) = -\frac{\partial P}{\partial x} + S_u$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho v \vec{V} - \mu \nabla v) = -\frac{\partial P}{\partial y} + S_v$$

$$\frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho w \vec{V} - \mu \nabla w) = -\frac{\partial P}{\partial z} + S_w$$

- Διατήρηση Εσωτ. Ενέργειας $\frac{\partial (\rho i)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho i \vec{V} - k \nabla T) = -P \nabla \vec{V} + \Phi + S_i$
 $i=cT$, Φ : όρος απωλειών σχετιζόμενος με την παράγωγο της ταχύτητας και το ιξώδες μ



Μαθηματικά Μοντέλα-Ταξινόμηση Συμπεριφοράς



Φυσική συμπεριφορά

- Προβλήματα Ισορροπίας (χρονικά αμετάβλητες λύσεις-**steady state**)
- Προβλήματα χρονικά μεταβαλλόμενων λύσεων (**transient**)

Γεωμετρική συμπεριφορά

Καθορίζεται από συμπεριφορά παραγώγου υψηλότερης τάξης

- *Υπερβολικές* εξισώσεις, π.χ. $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, εξίσωση κύματος
- *Παραβολικές* εξισώσεις, π.χ. $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, εξίσωση διάχυσης
- *Ελλειπτικές* εξισώσεις, π.χ. $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$, εξίσωση Laplace

Σε πολλά προβλήματα η συμπεριφορά είναι *μεικτή*



Μαθηματικά Μοντέλα-Καταστατικοί Νόμοι/Παραμετροποιήσεις



- **Απαραίτητοι** για τη σύνδεση βασικών ιδιοτήτων υλικών με βασικές παραμέτρους των εξισώσεων μεταφοράς μάζας-ορμής-θερμότητας
- Συνήθως εξάγονται από βασική θεωρία, π.χ. Μηχανική Συνεχούς Μέσου, Θερμοδυναμική, Ηλεκτροδυναμική κλπ.
- Σε μερικές περιπτώσεις είναι *ημι-εμπειρικοί*

Παραδείγματα

- Καταστατική εξίσωση ιδανικών αερίων (συνδέει πίεση με πυκνότητα και θερμοκρασία):

$$p = \rho R_g T$$

- Εξίσωση ισορροπίας απόλυτης υγρασίας (σύνδεση του ποσοστού υδρατμών σε κορεσμένο αέρα με σχετική υγρασία ισορροπίας-*ERH*):

$$Y_{eq} = ERH \cdot Y_{sat}$$

όπου
$$Y_{sat} = \frac{C_1 e^{-C_2/T}}{\epsilon \rho_a R_v T}$$

$$A \cdot ERH^2 + B \cdot ERH + \Gamma = 0 \quad \Leftarrow \text{ημι-εμπειρική σχέση}$$



Αριθμητικά Μοντέλα-Διαδικασία Επίλυσης



Πρόβλημα \Rightarrow Μαθηματικό μοντέλο



Επιλογή **αριθμητικού σχήματος διακριτοποίησης** στο χώρο και χρόνο (με επιλογή τάξης ακρίβειας της χωρικής διακριτοποίησης)



Επιλογή **μεθόδου επίλυσης** του συστήματος των διακριτοποιημένων διαφορικών εξισώσεων



Ανάλυση της ποιότητας του αλγόριθμου από άποψη **αξιοπιστίας-ευστάθειας-σύγκλισης**



Αριθμητικά Μοντέλα-Διακριτοποίηση (I)



Τρεις οι κύριες κατηγορίες:

- **Πεπερασμένες Διαφορές**
 - Βασίζονται στις ιδιότητες αναπτυγμάτων Taylor
 - Στην απλούστερη μορφή: μέθοδος Euler με προσέγγιση των παραγώγων ως: $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta x}$ $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t}$
 - Εφαρμογή σε **δομημένα πλέγματα** (τετράγωνα, κύβους)
 - Σχήματα διαφόρων **τάξεων προσέγγισης** (1η, 2η, 3η κλπ., ανάλογα με την τάξη των όρων που επιλέγουμε να κρατήσουμε)
 - Σχήματα διαφορετικών **κατευθύνσεων προσέγγισης** (εάν δηλαδή προσεγγίζουμε την τιμή της μεταβλητής από μπροστά-**upwind**, από πίσω-**downwind** ή και από τις δύο κατευθύνσεις-**central**)
 - Σχήματα **άμεσα** (**explicit**-η τιμή της μεταβλητής στο νέο χρόνο $n+1$ εξαρτάται ΜΟΝΟ από τιμές γειτονικών μεταβλητών στον παλιό χρόνο n) ή **έμμεσα** (**implicit**-η τιμή της μεταβλητής στο νέο χρόνο $n+1$ εξαρτάται και από τιμές γειτονικών μεταβλητών στον νέο χρόνο $n+1$)



Αριθμητικά Μοντέλα-Διακριτοποίηση (II)



- **Πεπερασμένα Στοιχεία**

- Πλέγματα μπορούν να έχουν τυχαίο σχήμα για καλύτερη κάλυψη του υπολογιστικού χωρίου (συνήθως **τρίγωνα** σε 2-δ, **τετράεδρα** σε 3-δ)

- Ορισμός *δοκιμαστικών συναρτήσεων*

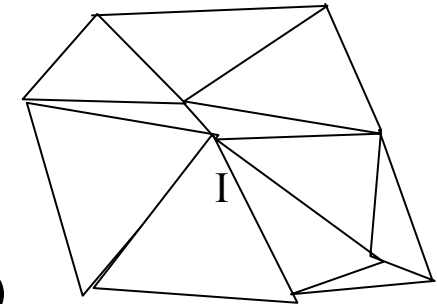
$N_I(\mathbf{x})$ στους κόμβους I έτσι ώστε η λύση παραμέτρου της ροής (π.χ. ταχύτητας) να

μπορεί να εκφρασθεί ως:
$$u(\vec{x}) = \sum_I u_I N_I(\vec{x})$$

σε όλα τα I

- Ολοκλήρωση εξισώσεων στον υποχώρο επίλυσης Ω με τη χρήση *συναρτήσεων βάρους* W (**μέθοδος Galerkin**: $W=N_I$)

⇒ γραμμικοποίηση εξισώσεων ⇒ επίλυση συστήματος





Αριθμητικά Μοντέλα-Διακριτοποίηση (III)

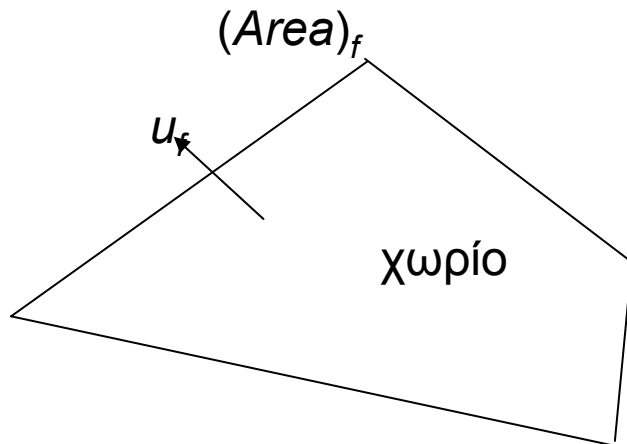


- **Πεπερασμένοι Όγκοι**

- Ιδέα ολοκλήρωσης παρόμοια με πεπερασμένα στοιχεία, αλλά η συνάρτηση W είναι 1.

- Χρησιμοποιεί θεώρημα Gauss $\int_V \operatorname{div} \vec{N} dV = \oint_S \vec{N} \cdot d\vec{S}$

- Γραμμικοποίηση συστήματος για επίλυση



Παράδειγμα

Εξίσωση συνέχειας

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div} (\rho \vec{u}) dV = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\Delta t} \Delta V + \sum_{faces} \rho_n u_{n f} (Area)_f = 0$$

$$\Rightarrow \rho_{n+1} = \rho_n - \frac{\Delta t}{\Delta V} \sum_{faces} \rho_n u_{n f} (Area)_f$$



Αριθμητικά Μοντέλα-Επιλύτες



- **Μέθοδοι απ' ευθείας επίλυσης** (μέθοδοι ενός βήματος, εξισώσεις μεταφοράς)
 - Μέθοδος Euler
 - Τροποποιημένη μέθοδος Euler
 - Μέθοδοι Runge-Kutta διαφόρων τάξεων
 - Σχήματα Van Leer
- **Επαναληπτικές μέθοδοι** (συνεχείς επαναλήψεις έως ότου ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο σύγκλισης των λύσεων, εξισώσεις ορμής)
 - Jacobi
 - Gauss-Seidel
 - Μέθοδοι διόρθωσης πίεσης (pressure correction methods)
 - SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations) \Rightarrow ζεύξη της εξίσωσης ορμής με την εξίσωση συνέχειας και καθορισμός παραμέτρου διόρθωσης της πίεσης, επανάληψη της διαδικασίας επίλυσης μέχρι να ικανοποιηθεί κριτήριο σύγκλισης



Αριθμητικά Μοντέλα-Οριακές Συνθήκες



- Απαραίτητες για την εξαγωγή αξιόπιστων-σωστών αποτελεσμάτων
- Διαχωρισμός σε:
 - Συνθήκες εισόδου
 - Συνθήκες εξόδου
 - Επίπεδα συμμετρίας
 - Συμπαγή όρια
 - Κινούμενα όρια
 - Περιοδικότητα (κυκλικά όρια)

Παράδειγμα

Σε συμπαγή όρια για δυναμικές ροές:

$$\vec{U} \cdot \hat{n} = 0$$

$$\vec{\nabla} P \cdot \hat{n} = -g_n$$

όπου \hat{n} το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο όριο και g_n η συνιστώσα της βαρύτητας στην κατεύθυνση του \hat{n}



Αριθμητικά Μοντέλα-Ανάλυση Ποιότητας



- Σε ένα αλγόριθμο τρία κριτήρια πρέπει να ικανοποιούνται για να γίνει η λύση αποδεκτή:
 - **Αξιοπιστία**
 - Εκφράζει το ότι οι διακριτοποιημένες εξισώσεις τείνουν στις διαφορικές εξισώσεις από τις οποίες προήλθαν όταν Δx και Δt τείνουν στο 0
 - Τα αποτελέσματα πρέπει να είναι λογικά-σωστή εφαρμογή των κατάλληλων αριθμητικών σχημάτων
 - **Σταθερότητα**
 - Το αριθμητικό σχήμα πρέπει να μην επιτρέπει την απεριόριστη αύξηση του αριθμητικού σφάλματος
 - Κριτήριο CFL: $\Delta t \leq \Delta x_{min} / u_{max}$ (όλες οι ποσότητες πρέπει να μεταφέρονται ανά ένα υπολογιστικό κελλί σε κάθε χρονικό βήμα)
 - **Σύγκλιση**
 - Η αριθμητική λύση πρέπει να προσεγγίζει την πραγματική λύση όταν το χρονικό και χωρικό βήμα τείνουν στο 0
 - Ορισμός αυστηρών κριτηρίων ώστε να εξασφαλίζεται η καλή σύγκλιση σε προβλήματα που η ποσοτική πρόβλεψη της πορείας ενός συστήματος είναι απαραίτητη
 - Απαραίτητος ο καθορισμός του κριτηρίου σύγκλισης πάντα σε σχέση με την τάξη μεγέθους της υπολογιζόμενης ποσότητας



Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (I)



- Αριθμητικά σχήματα επίλυσης εξίσωσης συνέχειας σε υπολογιστικά πλαίσια τύπου Euler (το πλέγμα δεν μεταβάλλεται)
- Πολύ σημαντικά για την προσομοίωση συστημάτων με σύνθετη γεωμετρία όπου η παρακολούθηση ελευθέρων επιφανειών είναι σημαντική, όπως:
 - Προσκρούσεις κυμάτων σε παράκτιες κατασκευές
 - Πορεία αύξησης σταγόνων σε νέφη
 - Γέμισμα καλουπιών με πολυμερή υλικά
 - Αναμείξεις υγρών
 - Διαχωρισμός μετάλλων από προσμείξεις



Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (II)



- Διάφοροι αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί για τέτοιες εφαρμογές
 - Αλγόριθμος SEA (TVD σχήμα)
 - Μέθοδος Level Set
 - **Volume of Fluid**
 - Δημοφιλές λόγω της υπολογιστικής του αποτελεσματικότητας και της ευκολίας εισαγωγής σε οποιοδήποτε υπολογιστικό πλαίσιο
 - Απόρροια της εξίσωσης συνέχειας
 - Αρχική εφαρμογή: μεταφορά καυσίμου από διαστημόπλοια
 - Αρχικό πλαίσιο ανάπτυξης: πεπερασμένες διαφορές-δομημένα πλέγματα
 - Βασίζεται στον υπολογισμό κλασματικού όγκου F ρευστού μέσα σε χωρίο του υπολογιστικού πλέγματος ($0 < F < 1$)
 - Ανάπτυξη-Επέκταση για πεπερασμένους όγκους και μη-δομημένα πλέγματα



Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (III)



Βασική εξίσωση κλασματικού όγκου F (υπόθεση
ασυμπίεστης ροής)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Διακριτοποίηση με πεπερασμένους όγκους

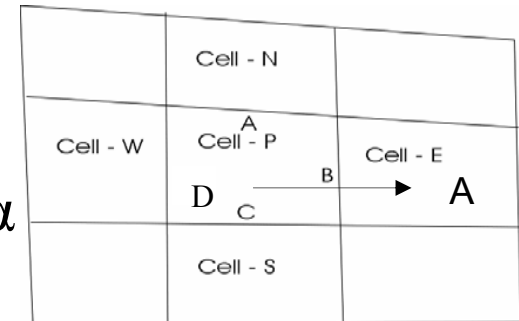
$$F_{n+1} = F_n - \frac{\Delta t}{\Delta V} \sum_{faces} F_{n f} u_{n f} A_f$$



Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (IV)



- Καθορισμός χωρίων σε Δότες (**Donors**) και Αποδέκτες (**Acceptors**) και υπολογισμός του κλασματικού όγκου για κάθε όψη των χωρίων του πλέγματος.



- Για μία όψη:

$$F_{D \text{ new}} = F_{D \text{ old}} - \frac{\delta F}{V_D} \quad \text{όπου} \quad \delta F = \text{MIN} \left\{ (F_{AD} |V| + CF) \cdot \delta A_f, (F_D \cdot \delta x_c) \cdot \delta A_f \right\}$$

$$F_{A \text{ new}} = F_{A \text{ old}} + \frac{\delta F}{V_A} \quad CF = \text{MAX} \left\{ (1 - F_{AD}) |V| - (1.0 - F_D) \delta x_c, 0.0 \right\}$$

$|V| = u_f \delta t$ και $\delta x_c =$ λόγος όγκου Δότη προς εμβαδόν όψης στην κατεύθυνση κάθετα προς την όψη (για δομημένα πλέγματα $\delta x_c =$ η διάσταση του πλέγματος)



Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (V)



- Η συνάρτηση F_{AD} καθορίζεται ανάλογα με την κλίση κατεύθυνσης της ελεύθερης επιφάνειας μέσα σε κάθε χωρίο υπολογίζοντας εν γένει κλίσεις (παραγώγους) των συναρτήσεων ($F \cdot \text{διάσταση}$) στις άλλες κατευθύνσεις.
- Παράδειγμα: σε ορθογώνιο δομημένο πλέγμα για την x-κλίση κατεύθυνσης προς την y-διεύθυνση έχουμε $(F_{j+1}\Delta x_{j+1} - F_j\Delta x_j)/\Delta y_j$.
- Συγκρίνοντας μεταξύ τους τις κλίσεις αυτές καθορίζεται η κατεύθυνση της ελεύθερης επιφάνειας σε κάθε χωρίο, δηλαδή προς ποια όψη είναι κάθετη, οριζόντια κλπ.

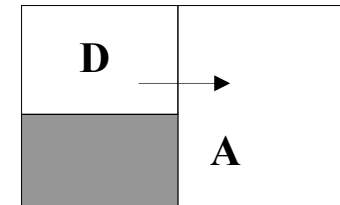
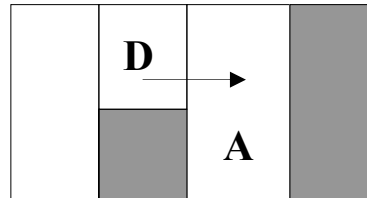
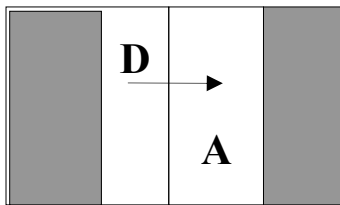


Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (VI)



- Για δομημένα πλέγματα:

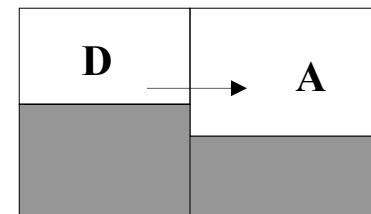
– $F_{AD} = F_A$ εάν



- Επιφάνεια στον Δότη είναι παράλληλη με την όψη της πλευράς που εξετάζουμε
- Χωρίο πίσω από Δότη είναι άδειο
- Χωρίο Αποδέκτη είναι άδειο

– $F_{AD} = F_D$ εάν

- Επιφάνεια στον Δότη είναι κάθετη στην όψη της πλευράς που εξετάζουμε





Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (VII)

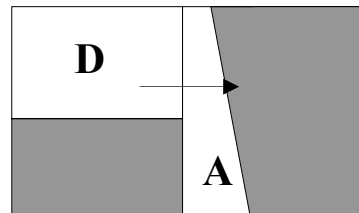


- Για μη-δομημένα πλέγματα ή περιπτώσεις όπου η ελεύθερη επιφάνεια δεν είναι απόλυτα κάθετη/οριζόντια:

F_{AD} = συνδιασμός (F_A , F_D) σύμφωνα με:

$$F_{AD} = F_A \frac{\left| \frac{dF}{d(normal)} \right|}{\left. \frac{dF}{dn} \right|_{MAX} + \left. \frac{dF}{dn} \right|_{MIN}} + F_D \frac{\left. \frac{dF}{dn} \right|_{MAX} + \left. \frac{dF}{dn} \right|_{MIN} - \left| \frac{dF}{d(normal)} \right|}{\left. \frac{dF}{dn} \right|_{MAX} + \left. \frac{dF}{dn} \right|_{MIN}}$$

Οι παράγωγοι αναπαριστούν τις κλίσεις κατεύθυνσεις της ελεύθερης επιφάνειας.

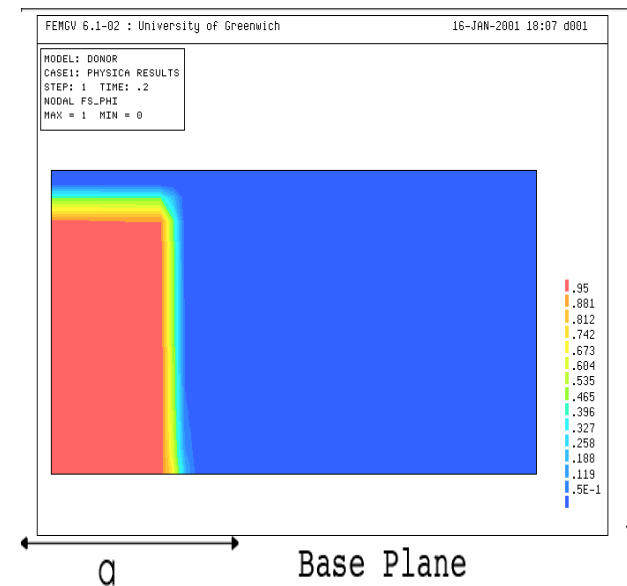
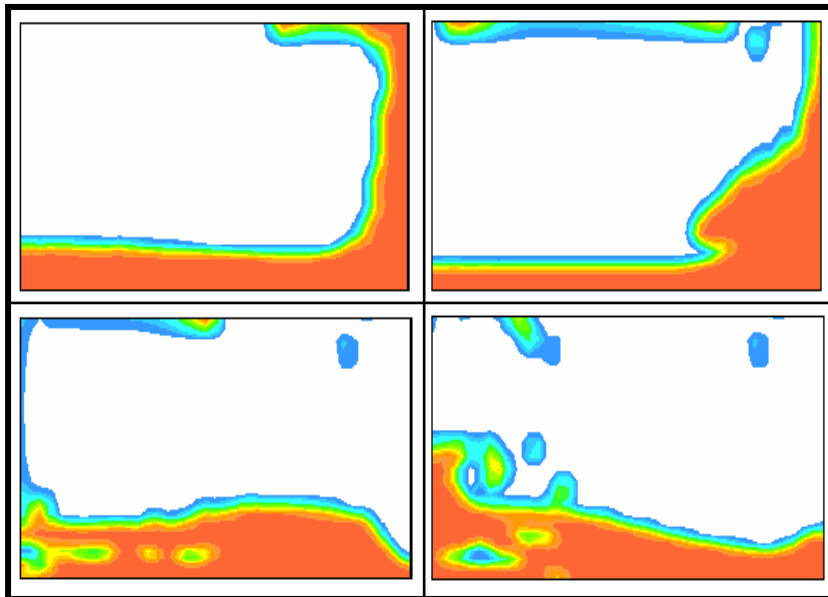




Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (VIII)



- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Στήλη νερού που καταρρέει λόγω βαρύτητας
 - 2-δισδιάστατες προσομοιώσεις

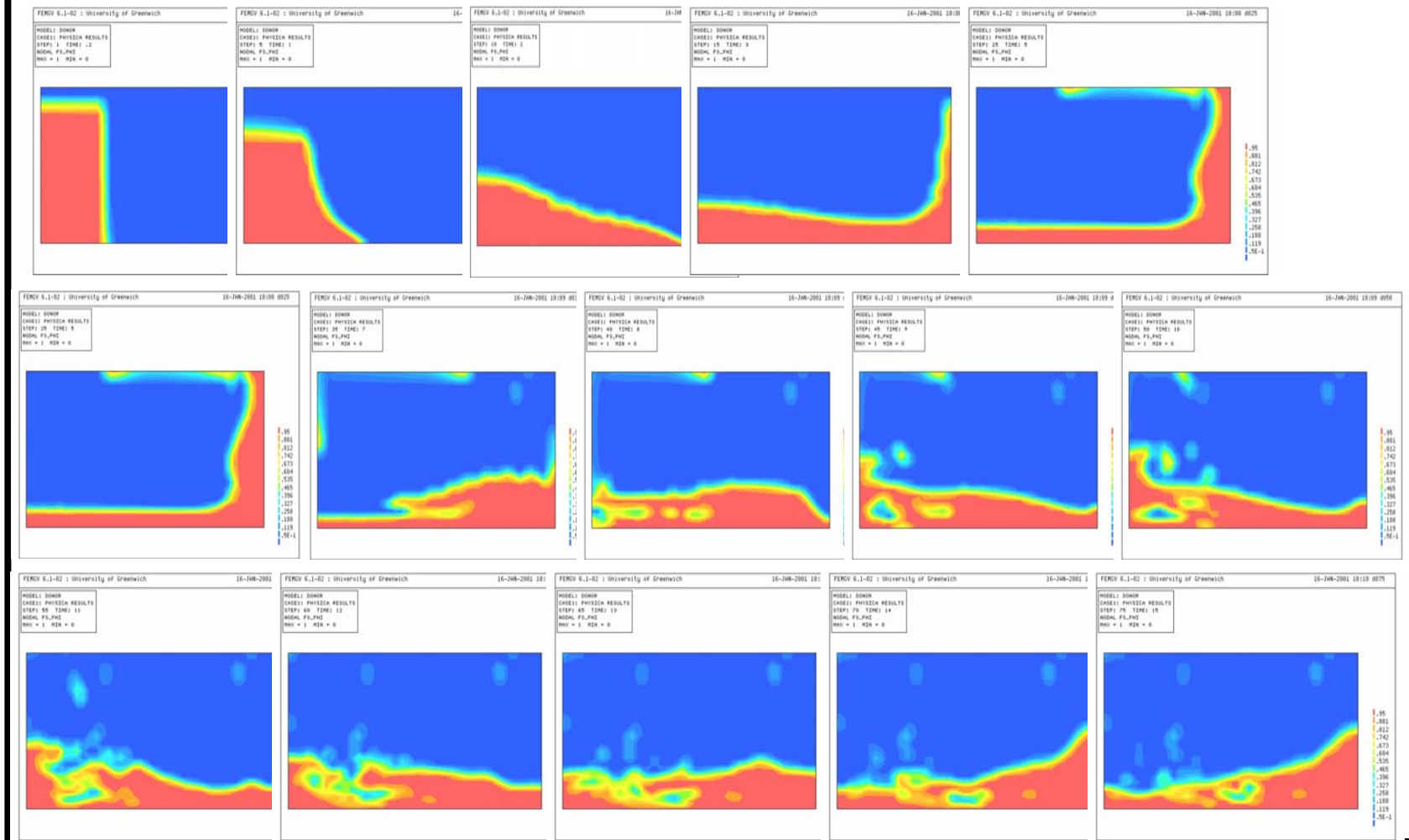




Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (IX)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1



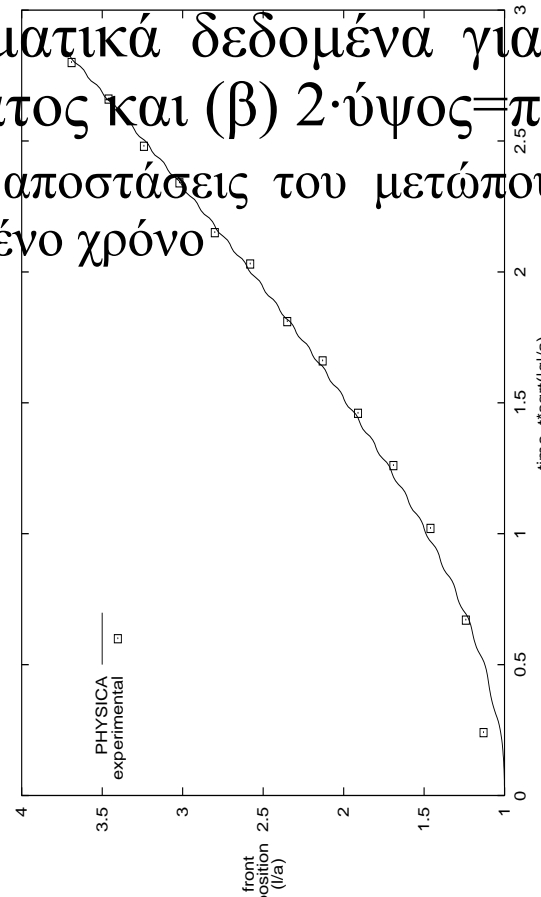
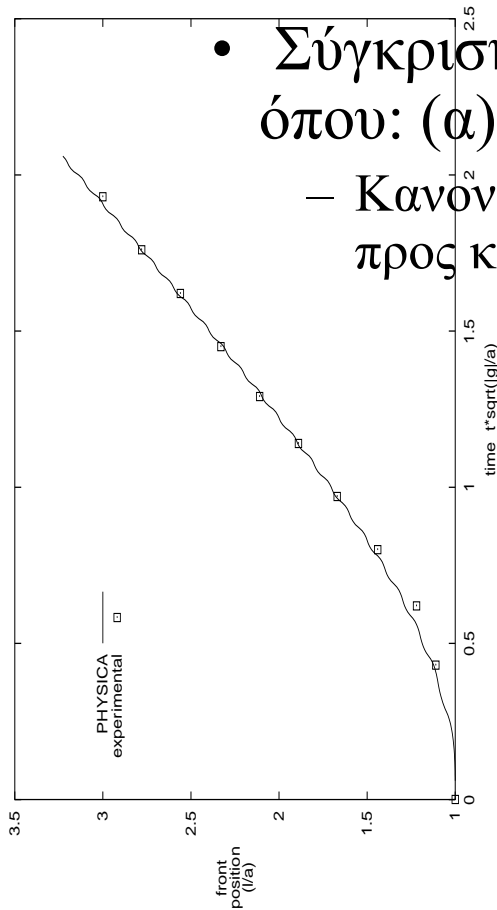


Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (X)



• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

- Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα για 2 στήλες όπου: (α) ύψος = πλάτος και (β) $2 \cdot \text{ύψος} = \text{πλάτος}$
 - Κανονικοποιημένες αποστάσεις του μετώπου του νερού προς κανονικοποιημένο χρόνο

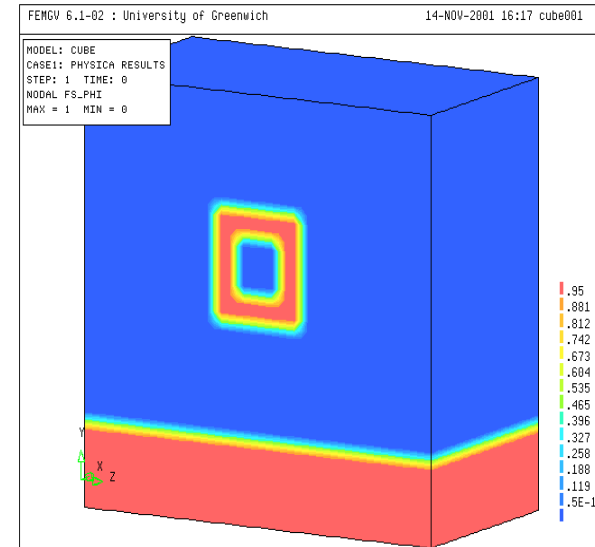
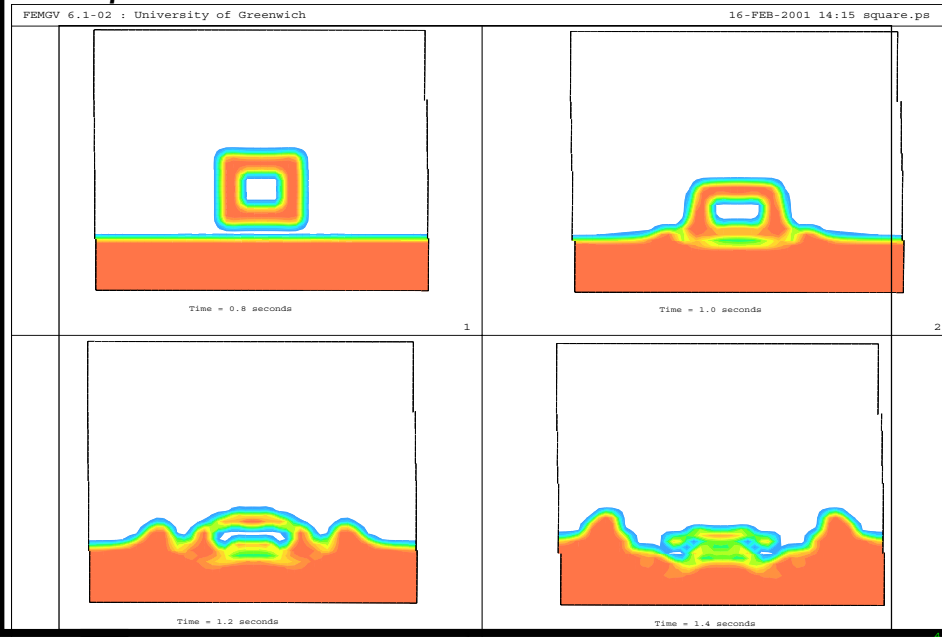
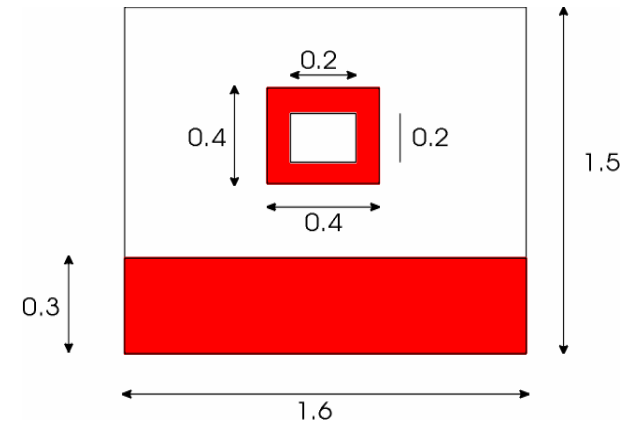




Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (XI)

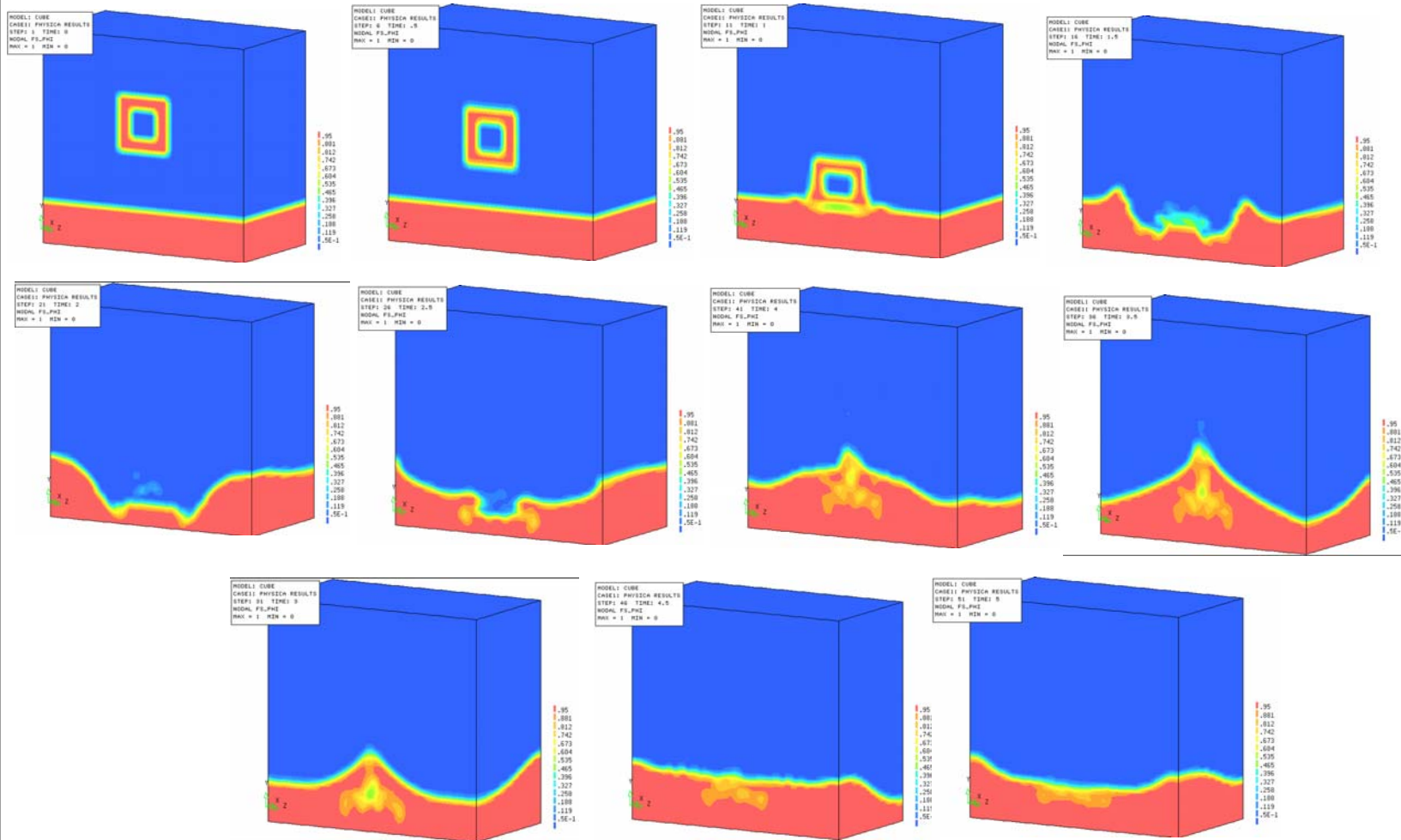


- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΚΟΥΦΙΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ-HOLLOW SQUARE
- Τετράγωνο ρευστού, το οποίο στη μέση του περιλαμβάνει ένα ελαφρύτερο ρευστό, πέφτει λόγω βαρύτητας και προσπίπτει σε ακίνητο ρευστό





Αριθμητικά Μοντέλα-Αλγόριθμοι για Προβλήματα με Ελεύθερες Επιφάνειες (XII)





Αριθμητικά Μοντέλα-Υπολογιστικά πακέτα



- Η λίστα αυτή είναι ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ:
 - ANSYS: Πεπερασμένα Στοιχεία, χρήση κυρίως για δομική ανάλυση, www.ansys.com
 - FLOTHERM: Πεπερασμένοι Όγκοι, μεταφορά θερμότητας, www.flomerics.com
 - Flow-3D: Πεπερασμένες Διαφορές, βασισμένος σε τεχνική VOF, κυρίως χρήση για μελέτη ροών με ελεύθερες επιφάνειες, www.flow3d.com
 - FLUENT: Πεπερασμένες Διαφορές/Όγκοι; Κώδικας γενικής χρήσεως και εφαρμογών, επιτρέπει πολυφασικές ροές, www.fluent.com
 - PHOENICS: Πεπερασμένες Διαφορές, χρήση για προσομοιώσεις πολυφασικών ροών, www.cham.co.uk
 - PHYSICA: Πεπερασμένοι Όγκοι, χρήση για προσομοιώσεις πολλών φαινομένων ροής, επιτρέπει το συνδυασμό πολλών διεργασιών, www.gre.ac.uk/~physica
 - Star-CD: Πεπερασμένες Διαφορές/Όγκοι; Κώδικας γενικής χρήσεως, www.cd.co.uk



Το υπολογιστικό πακέτο PHYSICA



PHYSICA : 3-διάστατο Πακέτο Μη-Δομημένων-Πλεγμάτων Πεπερασμένων-
Όγκων Συνδιασμού Διεργασιών

Κύρια Χαρακτηριστικά:

- 3-διάστατες κατασκευές δεδομένων για υπολογιστικά στοιχεία σύνθετου σχήματος (τετράεδρα, εξάεδρα κλπ.).
- 3-διάστατη δυνατότητα χρήσης μη-δομημένων πλεγμάτων με περιοχές πολλαπλών υλικών.
- τελειοποιημένη τεχνολογία διακριτοποίησης/επίλυσης (πεπερασμένοι όγκοι) για φαινόμενα μεταφοράς (μάζας/ορμής/ενέργειας), φυσικές-χημικές διεργασίες και συνδυασμών τους.
- κώδικας βασισμένος σε αντικειμενοστραφείς (object oriented) μεθοδολογίες
- ΑΝΟΙΧΤΟ πλαίσιο/δομή, επιτρέπει στο χρήστη εισαγωγή των δικών του καταστατικών νόμων και αλληλεπιδράσεων.
- Παράλληλη εκτέλεση.



Εισαγωγή σε σύνθετες μηχανολογικές
διεργασίες, προβλήματα και
αντιμετώπισή τους με τη βοήθεια
μαθηματικών και αριθμητικών
μοντέλων



Μηχανολογικές-Βιομηχανικές Διεργασίες και τα προβλήματα που σχετίζονται με αυτές

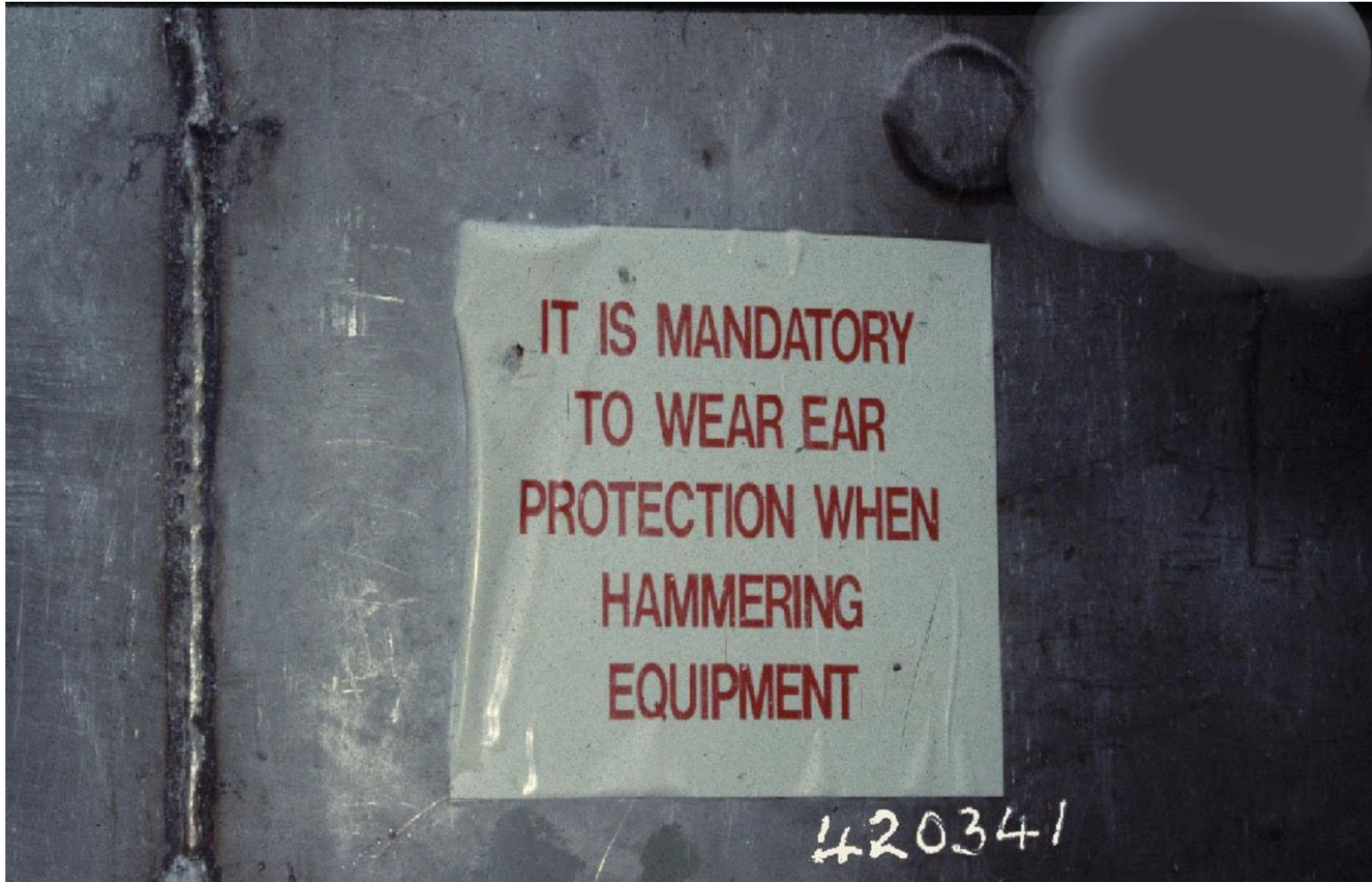


Τα κυριότερα προβλήματα προκύπτουν κατά τη διάρκεια **αλληλεπιδράσεων** των συστημάτων που εμπλέκονται στις διεργασίες αυτές τόσο μεταξύ τους όσο και με το άμεσο περιβάλλον τους :

1. Λόγω **έλλειψης κατανόησης** της σύνθετης συμπεριφοράς τόσο των συστημάτων όσο και των διεργασιών.
2. Λόγω **έλλειψης εκπαίδευσης** αυτών που φέρουν την ευθύνη για την επίλυση των προβλημάτων.
3. Λόγω **έλλειψης ενσωματωμένων εργαλείων και στρατηγικών** αντιμετώπισης των προβλημάτων με “λογικό”- μη εμπειρικό τρόπο.

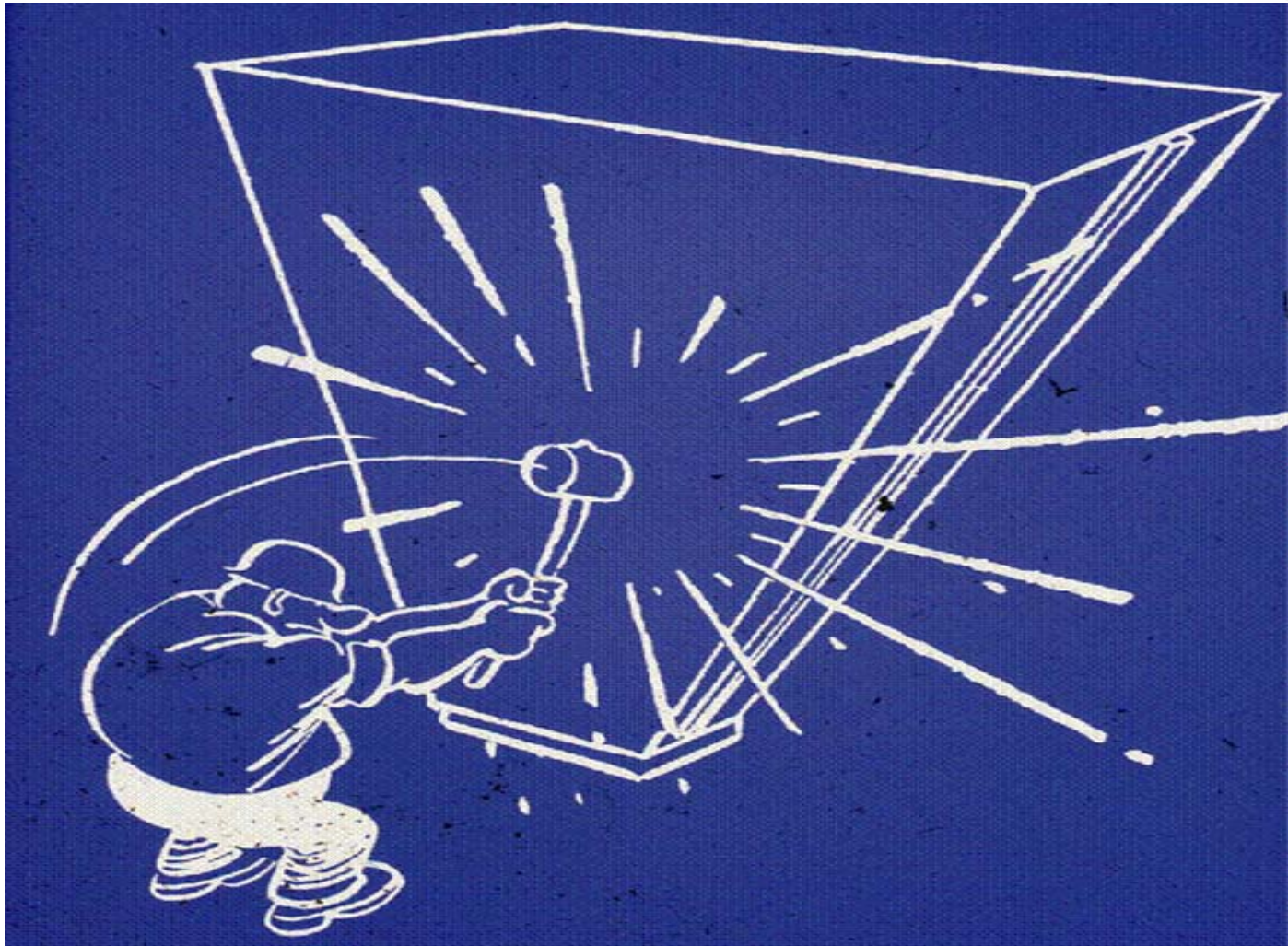


Το Πρόβλημα





Η Σωστή Λύση;





Η Σωστή Λύση!

- **Ανάλυση** του προβλήματος και της εξελικτικής πορείας της διεργασίας (με επιστημονικό τρόπο!)
- **Κατανόηση** των αιτιών του προβλήματος
- **Καθορισμός** της φυσικής του συστήματος, τόσο στο **μακροσκοπικό** επίπεδο όσο και στο **μικροσκοπικό** επίπεδο (όπου αυτό είναι εφικτό-απαραίτητο για την κατανόηση και ανάλυση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ επιμέρους συνιστωσών του συστήματος)
- **Καταστατικοί νόμοι-παραμετροποιήσεις** και συνδυασμός τους με τις μακροσκοπικές εξισώσεις ροής για τη σύνδεση βασικών ιδιοτήτων του συστήματος με μακροσκοπικές μεταβλητές της ροής
- **Μελέτη-Επίλυση** με κατάλληλα μαθηματικά-αριθμητικά εργαλεία
- Δυνατότητα **επαλήθευσης** αποτελεσμάτων και περαιτέρω χρήση του μοντέλου για εξαγωγή ποιοτικών και ποσοτικών **προβλέψεων** για την εξελικτική πορεία της διεργασίας



Προβλήματα υπό εξέταση



- Διεργασίες διαχείρισης κοκκώδων υλικών
- Παλινδρομική συγκόλληση με τριβή
- Προσκρούσεις κυμάτων σε παράκτιες κατασκευές
- Άλλες εφαρμογές

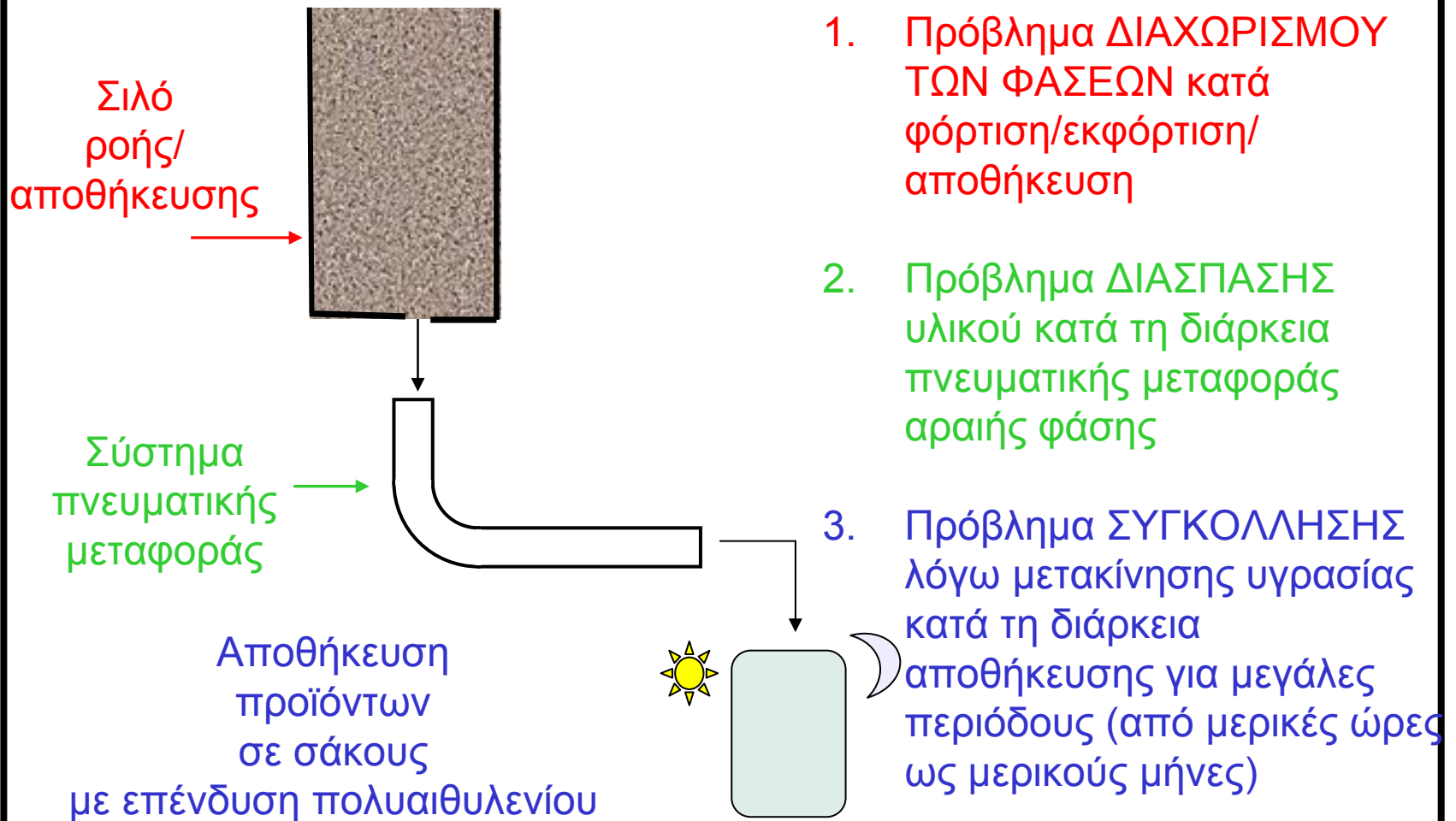


Διεργασίες που αφορούν κοκκώδη υλικά



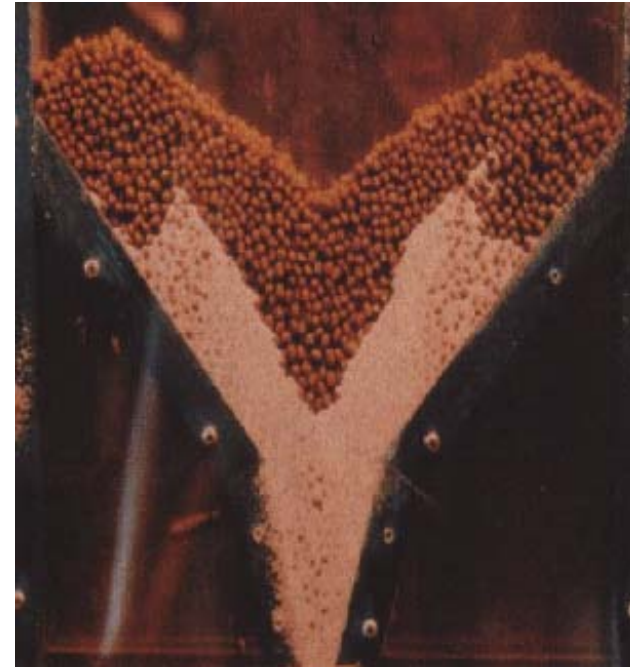
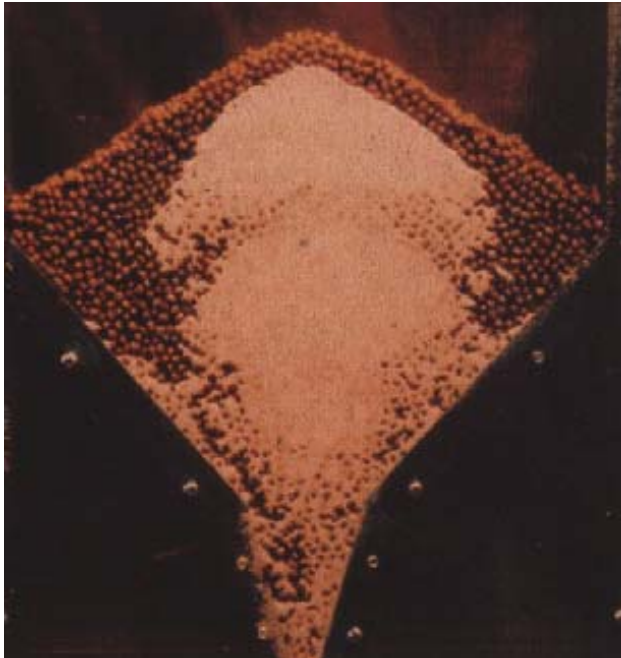
- Πολύ σημαντικά γιατί υπεισέρχονται σε όλους σχεδόν τους κλάδους της κατασκευαστικής βιομηχανίας π.χ. τρόφιμα, καύσιμα, οικοδομικά υλικά, φαρμακευτικά σκευάσματα.
- \$130 δις ετήσιος τζίρος από διαχείριση κοκκωδών υλικών και \$13 δις ετήσιες απώλειες λόγω επιχειρησιακών προβλημάτων μόνο στην ΑΓΓΛΙΑ!

Σχηματική αναπαράσταση διαχείρισης τυπικής διεργασίας μεγάλης κλίμακας με κοκκώδη υλικά





Τα Προβλήματα (1) Διαχωρισμός



Διαχωρισμός μεταξύ φάσεων υλικού
πολυφασικών μιγμάτων κατά τη διάρκεια ροής-αποθήκευσης



Τα Προβλήματα (2) Διάσπαση



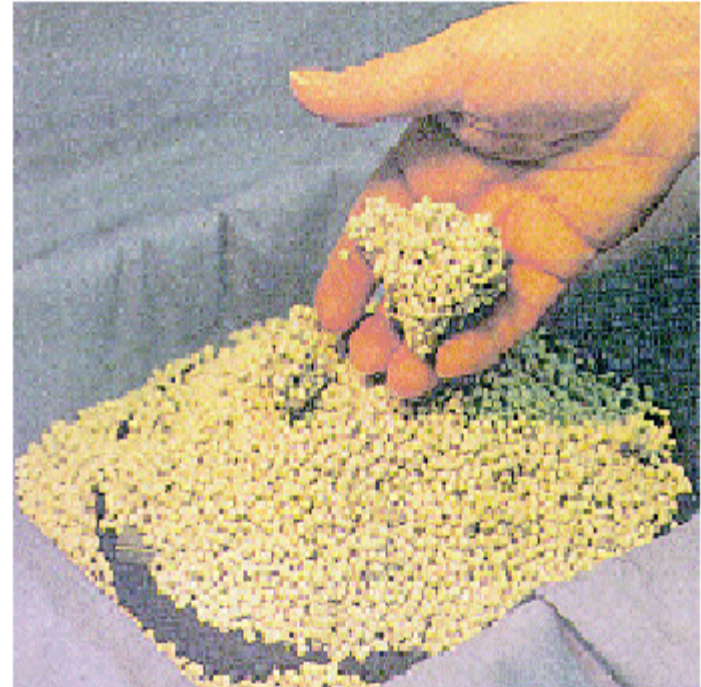
Διάσπαση σιταρένιων μπισκότων



Τα Προβλήματα (3) Συγκόλληση



Κοκκώδες αλάτι



Πλαστικά σφαιρίδια

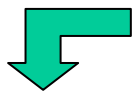
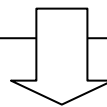


Υπολογιστικό Πλαίσιο

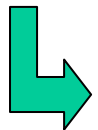
Προσομοίωση του συστήματος απευθείας σε μακροσκοπική κλίμακα

1. Μακροσκοπικό μοντέλο ροής ρευστού \Rightarrow (Κατάλληλες συνθήκες/εξισώσεις για αναπαράσταση των φυσικών ιδιοτήτων) \Rightarrow Μακροσκοπικό μοντέλο ροής κοκκώδους στερεού

2. Μικροσκοπικά Μοντέλα/Πειράματα (ανάλυση δυνάμεων επαφής μεταξύ σωματιδίων, μετατοπίσεις, στροφές...)



Παραμετροποιήσεις / Καταστατικές Εξισώσεις
ανάλυσης της κατάστασης του συστήματος



3. Μακροσκοπικά Μοντέλα **Πλήρους Περιγραφής** Συστημάτων Κοκκωδών Υλικών με Διεργασίες **ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ, ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ, ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΗΣ**



Μακροσκοπικό μοντέλο ροής - 1



Βασικές Παραδοχές

Μία εξίσωση ορμής για κοκκώδες μίγμα πολλών συστατικών & πυκνοτήτων
+ εξίσωση μεταφοράς με παρακολούθηση ελεύθερης επιφάνειας κάθε συστατικού

Εξίσωση κίνησης

$$\rho_b \frac{\partial \vec{u}_b}{\partial t} + \rho_b \vec{u}_b \cdot \nabla \vec{u}_b = -\nabla \cdot T + \rho_b \vec{g}$$

Ο τανυστής τάσης T και ο τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης D σχετίζονται μέσω :

$$T_{ij} = p \delta_{ij} + C \cdot D_{ij}$$

Συντελεστής διατμητικής αντίστασης



Μακροσκοπικό μοντέλο ροής - 2



- Συνιστώσες του τανυστή τάσης

– Ρευστά:
$$T_{i,j}^n = p\delta_{ij} + C^n D_{i,j}^n$$

– Μη συμπιεστά
κοκκώδη:
$$T_{i,j}^i = p\delta_{ij} + C^i pD_{i,j}^i$$

– Συμπιεστά
κοκκώδη :
$$T_{i,j}^c = p\delta_{ij} + C^c \tau(p, \rho_b) D_{i,j}^c$$



Μακροσκοπικό μοντέλο ροής– 3 Όροι στις εξισώσεις



$$C^n = 2\mu \quad : \quad C^i = \sqrt{2} \sin \phi \quad : \quad C^c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$D_{ij}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad : \quad D_{ij}^i = \frac{D_{ij}^n}{|D_{ij}^n|}$$

$$D_{ij}^c = \frac{D_{ij}^n + \frac{1}{2} \nabla \cdot \vec{u} \delta_{ij}}{|D_{ij}^n + \frac{1}{2} \nabla \cdot \vec{u} \delta_{ij}|}$$

$$\tau(p, \rho_b) = (\sin \phi) \rho_b^{1/\beta} - \sin \phi \frac{(p - \rho_b^{1/\beta})^2}{\rho_b^{1/\beta}}$$

Δηλαδή, $\mu_{\text{gran}} = f(p, \phi, \rho_b)$



Μακροσκοπικό μοντέλο ροής– 4 Ιδιότητες Υλικού



- Εξάρτηση πυκνότητας από τάση –Κοκκώδης πυκνότητα σε υπολογιστικό στοιχείο δίδεται από :

$$\rho_{gran} = C_1 + C_2 \log_{10} (T_1)$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο:

Πυκνότητα Μίγματος:

$$\rho_b = \rho_{gran} + \left(1 - \frac{\rho_{gran}}{\rho_{solids}}\right) \rho_{air}$$

Συντελεστής Διατμητικής Αντίστασης Μίγματος (ιξώδες) :

$$\mu_b = \sum_{i=1}^n f_i \mu_{gran} + \left(1 - \sum_{i=1}^n f_i\right) \mu_{air}$$

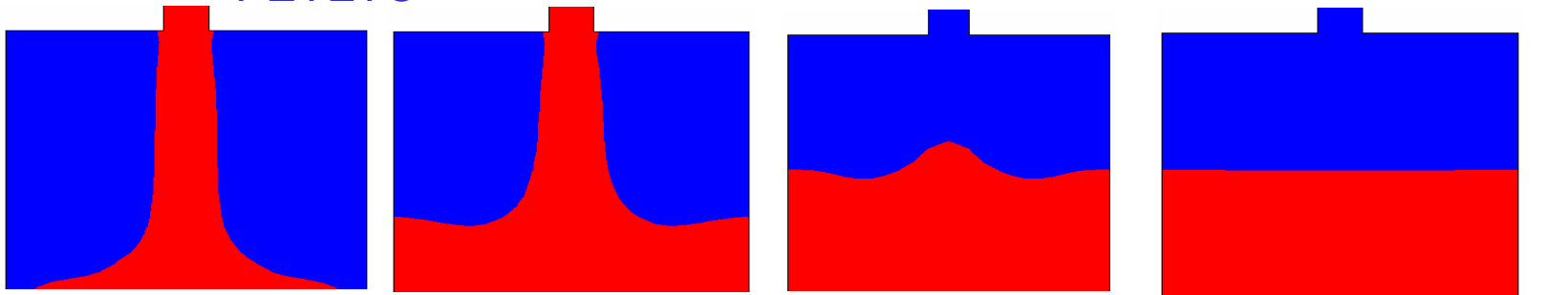
f_i : ογκομετρικό κλάσμα συστατικού – i, $0 < f_i < 1$



Μακροσκοπικό μοντέλο ροής-5 Από Ρευστό σε Κοκκώδες

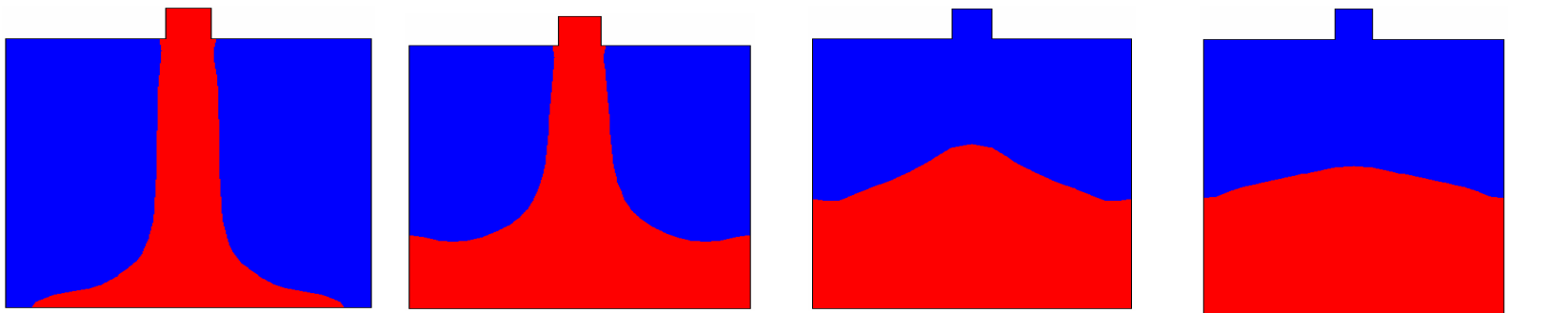


ΡΕΥΣΤΟ



Time

ΚΟΚΚΩΔΕΣ



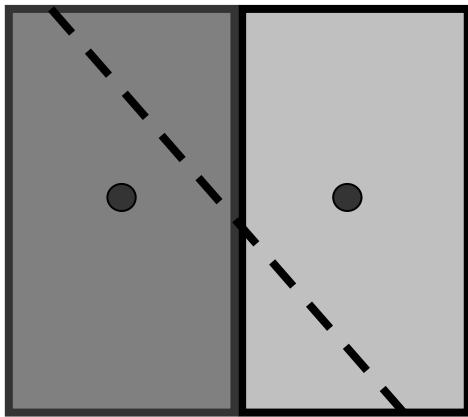
Time



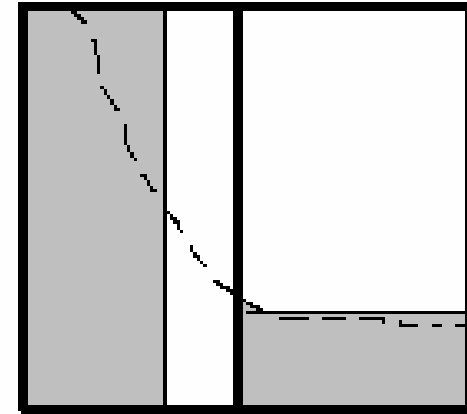
Μακροσκοπικό μοντέλο ροής– 6 Μεταφορά Υλικού / Ελεύθερες Επιφάνειες



- Σημαντικό στις διαδικασίες φόρτισης/εκφόρτισης με επικλινείς επιφάνειες για αναπαράσταση του ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ
- Χρησιμοποιεί κλίσεις κατεύθυνσης \Rightarrow διακριτές επιφάνειες μεταξύ διαφορετικών υλικών. **ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΝΕΟΥ 3-ΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΜΗ-ΔΟΜΗΜΕΝΟΥ VOF ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ**



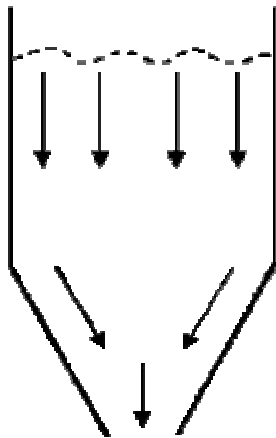
Dashed lines: true interface.
Previously: homogeneous distribution
of material in cell



Straight lines: approximate interface
as calculated through directional
gradients of scalar- ϕ



Ροή Μάζας – Ροή Χοάνης



Ροή Μάζας

Όλες οι περιοχές ανά
πάσα στιγμή βρίσκονται
σε κίνηση



στάσιμη
περιοχή

περιοχή
ροής

Ροή Χοάνης

Υπαρξη στάσιμων περιοχών κατά τη διάρκεια
εκφόρτισης
(λόγω γεωμετρίας, ιδιότητες υλικών)

Προσομοιώσεις Ροών Χοάνης:

Ανάλυση ροής (βασισμένη σε χαρακτηριστικά του συστήματος /
παραμέτρους υλικών) για εκ των προτέρων καθορισμό ορίων
στάσιμων ζωνών και εξέλιξη τους με το χρόνο



ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ και η Εξίσωση Μεταφοράς



Εξισώσεις μεταφοράς συστατικών

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \nabla \cdot (f_i \vec{u}_b + \vec{J}_{SEG,i}) = S_i$$

$\vec{J}_{SEG,i}$ Ροή “παρέκκλισης” που αναπαριστά φαινόμενα διαχωρισμού
(*παραμετροποίηση σε μικρο-φυσικό πλαίσιο*)

S_i Πηγαίος όρος για φαινόμενα δημιουργίας/καταστροφής
(*μοντέλα πληθυσμιακής ισορροπίας*)

**Εξίσωση τύπου Δότη-Αποδέκτη, επιλύεται
με μετασχηματισμένο VOF ή 2^{ης} τάξης TVD σχήμα με split-fluxing**



Παραμετροποίηση του Διαχωρισμού



Τρεις διαφορετικοί μηχανισμοί λαμβάνονται υπ' όψη:

$$\mathbf{J}_{\text{SEG } i} = \mathbf{f}_i (\mathbf{v}_{\text{Di}} + \mathbf{v}_{\text{Si}} + \mathbf{v}_{\text{Pi}})$$

Μελέτη μίγματος πολλών συστατικών που αποτελείται από φάσεις μικρών και μεγάλων σωματιδίων

- Διάχυση

$$\mathbf{v}_{\text{Di}} = -D_i \nabla f_i$$

- Διατμητικός Διαχωρισμός

$$\mathbf{v}_{\text{Si}} = \eta_i \frac{\nabla u_b}{u_b}$$

- Διήθηση λόγω βαρύτητας

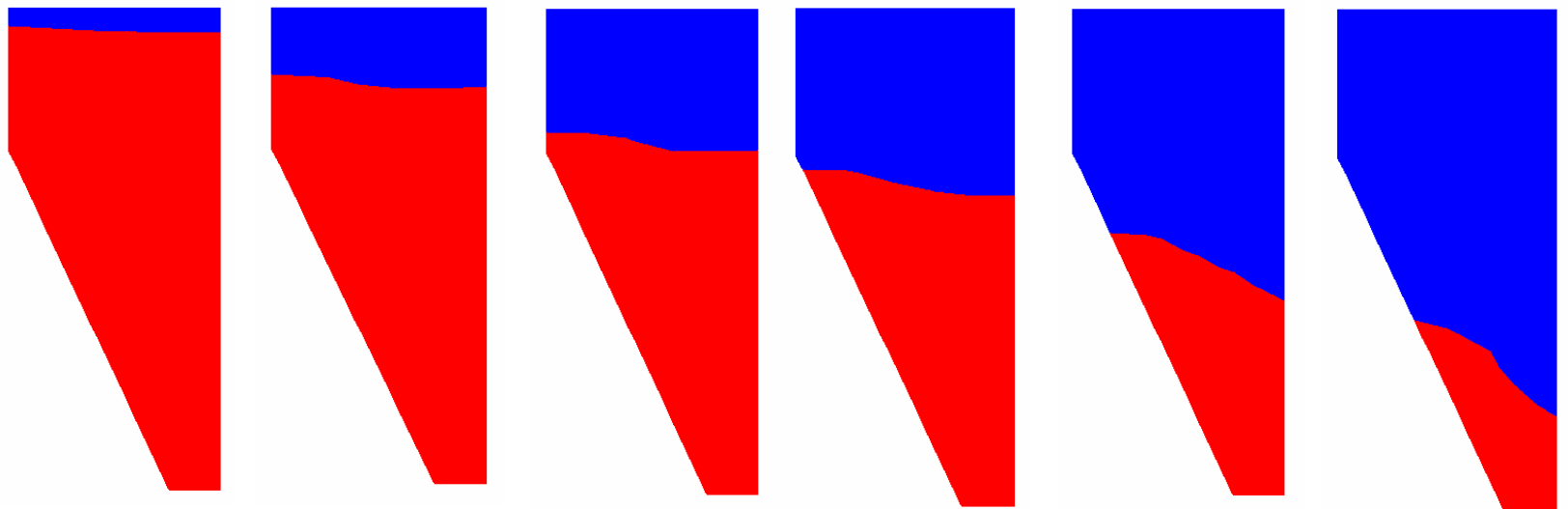
$$\mathbf{v}_{\text{Pi}} = K_i \varepsilon (1 - d_f / d_c) \mathbf{g}$$

συντελεστές μεταφοράς D_i , η_i και K_i υπολογίζονται σε μικρο-μηχανικό πλαίσιο με τη χρήση προσομοιώσεων της **Μεθόδου Διακριτών Στοιχείων (Discrete Element Method-DEM)**

Ζεύξη μεταξύ Μικρο- και Μακρο- Κλιμάκων μοναδική στον τομέα!



Διαχωρισμός κατά τη ροή μίγματος 2 συστατικών Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα-1



—————→

Αριθμητική πρόβλεψη της ελεύθερης επιφάνειας

Time

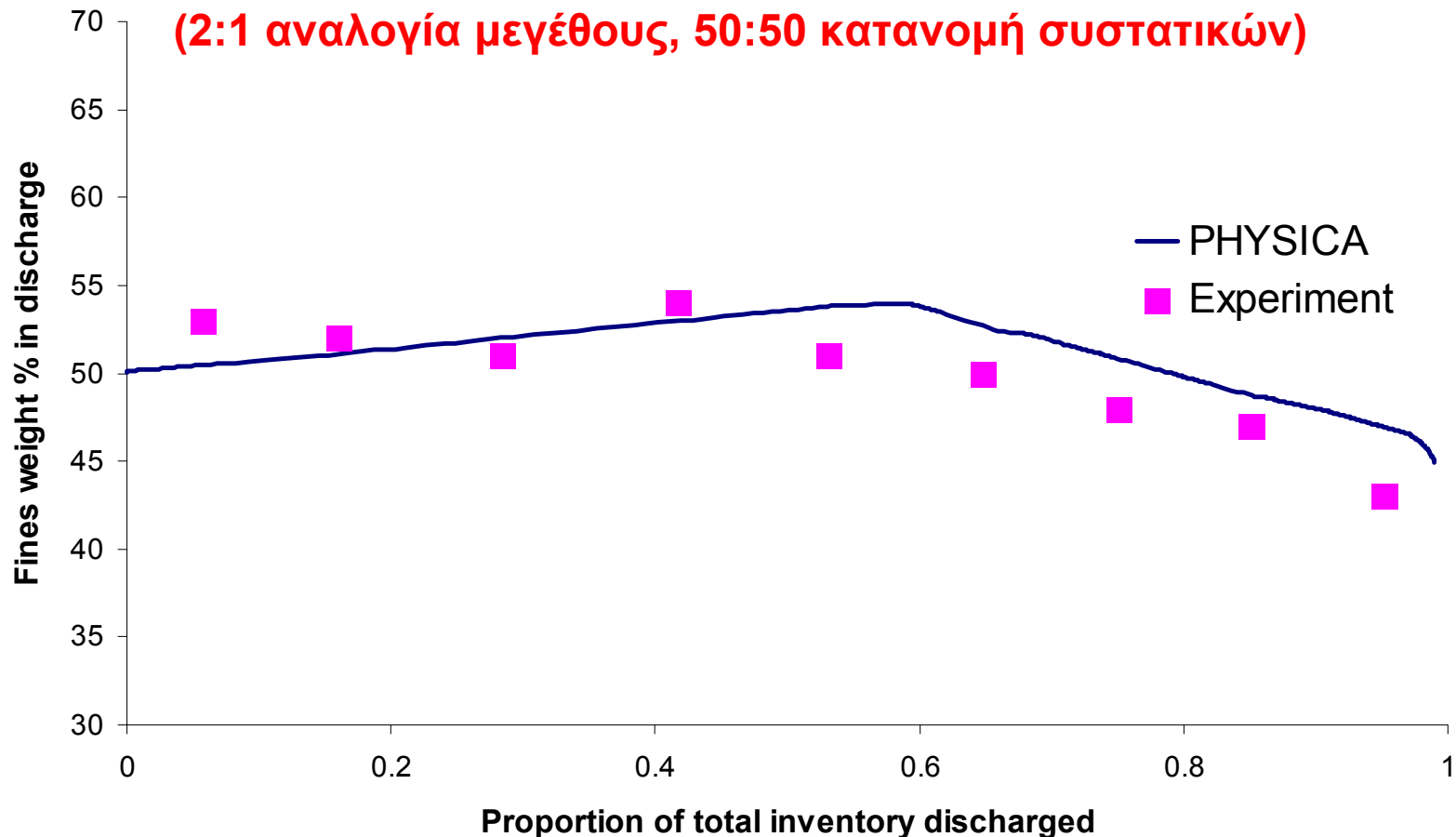


Διαχωρισμός κατά τη ροή μίγματος 2 συστατικών Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα-3



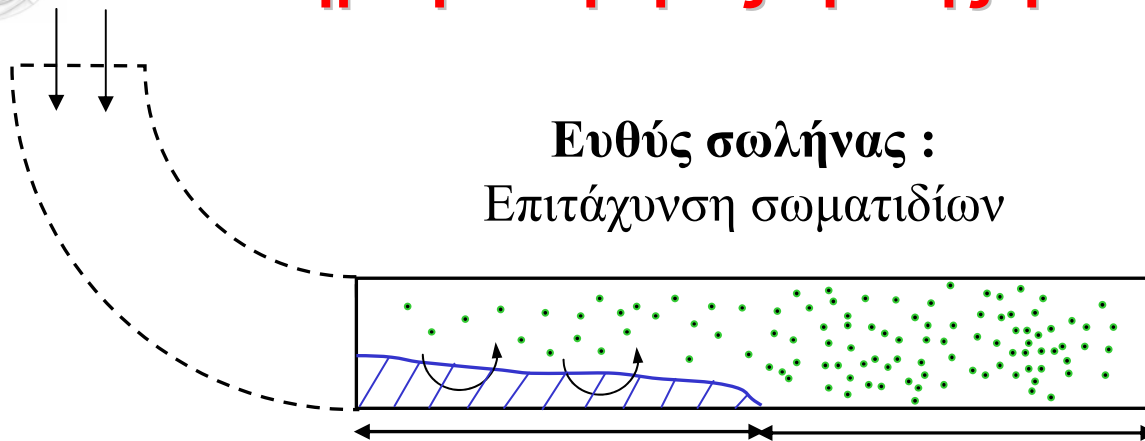
Χρονική μεταβολή του ποσοστού του μικρότερου
συστατικού του μίγματος κατά την εκφόρτιση

(2:1 αναλογία μεγέθους, 50:50 κατανομή συστατικών)





Προσομοίωση ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ σε σύστημα μεταφοράς αραιής φάσης (I)



Ευθύς σωλήνας :
Επιτάχυνση σωματιδίων

Συγκέντρωση σωματιδίων σε δέσμη Πλήρως αιωρούμενη ροή

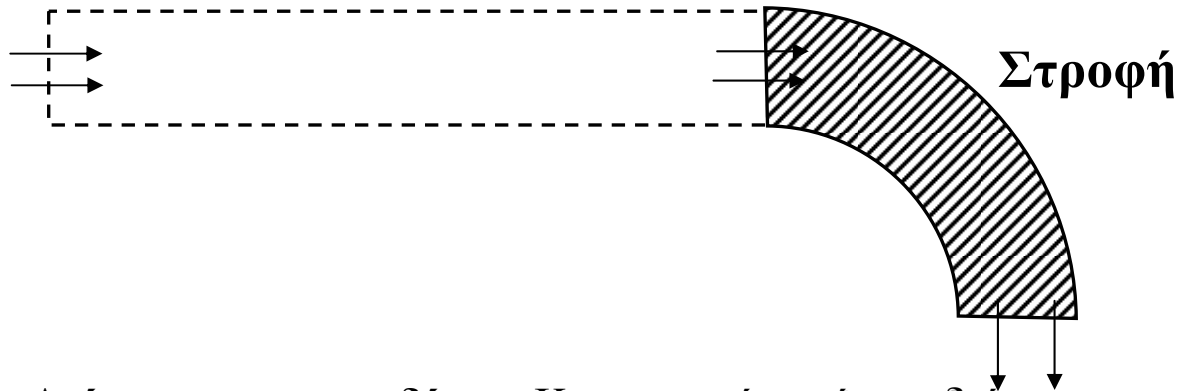
- Δύο ξεχωριστές φάσεις
- Επιφανειακή τριβή / μεταφορά ορμής μεταξύ δέσμης / αιωρούμενης ροής
 - Διατμητική τάση μεταξύ αέρα / τοιχώματος σωλήνα

Ροή μίας φάσης

Διατμητική τάση
(αέρας+σωμάτια) / τοιχώματα σωλήνα
Σχέση τύπου Darcy



Προσομείωση ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ σε σύστημα μεταφοράς αραιής φάσης (II)



→ **Διάσπαση σωματιδίων** : Κατασκευή πινάκων διάσπασης

(μέσω Ανάστροφης Ανάλυσης-συσχέτιση Εισ/Εξ κατανομές σωματιδίων που παίρνουμε μέσω πειραμάτων)

$$B(x_1(X_1), x_2(X_2)) = \frac{y(x_2, \mu(x_1, u), \sigma(x_1, u))}{h(x_1, x_1)} (X_1 - X_2)$$

- πίνακας διάσπασης ανεξάρτητος από τη γεωμετρία στροφής
- διάσπαση σε στροφή 90° ισοδύναμη με κρούση 90° (επαληθεύτηκε)

→ **Επιβράδυνση σωματιδίων**

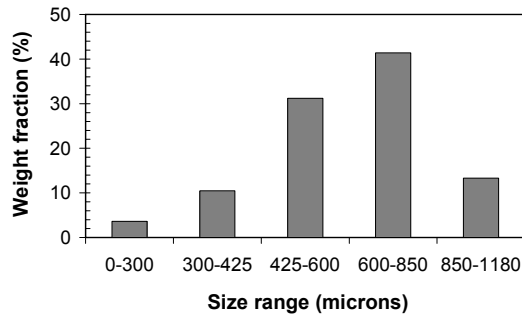
- τριβή ολίσθησης τοιχώματος λόγω δράσης κεντρομόλου
- διεργασία αναπήδησης



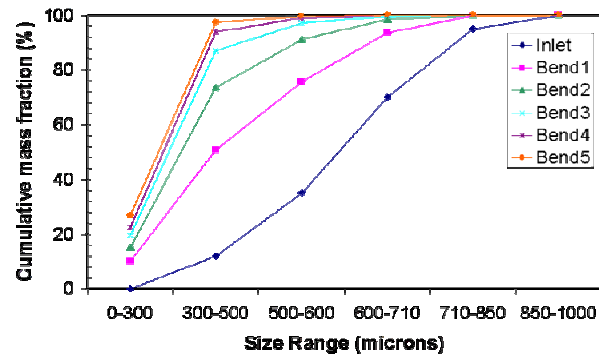
Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας προσομοίωσης πνευματικής μεταφοράς



Εισερχόμενη Κατανομή

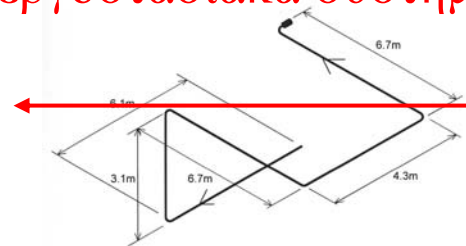


Πειράματα διάσπασης με μονή κρούση



Υπολογισμός του % διάσπασης σε εργοστασιακά συστήματα

Καθορισμός πινάκων διάσπασης



Αριθμ. Μοντέλο

Σύστημα πνευματικής μεταφοράς



Προσομοίωση ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΗΣ λόγω μετακίνησης υγρασίας



Διατήρηση Απόλυτης Υγρασίας

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D_e \nabla^2 Y + k_y (Y_{eq} - Y) + S_Y$$

$$S_Y = -\frac{F_a}{\rho_a} \frac{\partial Y}{\partial z}$$

Διατήρηση Θερμότητας

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k_s}{\rho_s c_{ps}} \nabla^2 T - \frac{\rho_a}{\rho_s c_{ps}} k_y (Y_{eq} - Y)L + S_T$$

$$S_T = -\frac{F_a c_{pa}}{\rho_s c_{ps}} \frac{\partial T}{\partial z}$$

Λήψη Υγρασίας από στερεό

$$\rho_s \frac{dW}{dt} = -k_y \rho_a (Y_{eq} - Y)$$

Καταστ. Μοντέλα Ισορροπίας

$$Y_{eq} = ERH \cdot Y_{sat}$$

όπου

$$Y_{sat} = \frac{C_1 e^{-C_2/T}}{\varepsilon \rho_a R_v T}$$

$$A \cdot ERH^2 + B \cdot ERH + \Gamma = 0$$

όπου A , B και Γ : παράμετροι εξαρτώμενες από το υλικό-καθορίζονται πειραματικά

Αντοχή Εφελκυσμού

$$\sigma_T = [\sigma_c \pi 9 (1-\varepsilon)/(8 \varepsilon 4R^2)] b^2$$

Ακολουθώντας μεταβολές ακτίνας στερεάς γέφυρας $b \rightarrow$

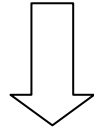
Ακολουθούμε μεταβολές στην αντοχή εφελκυσμού υλικού



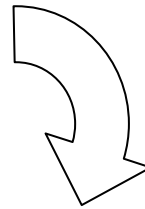
Σχηματική αναπαράσταση διεργασίας συγκόλλησης λόγω μετακίνησης υγρασίας



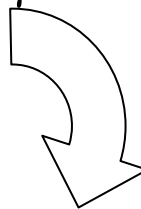
Περιβαλλοντικές αλλαγές ΣΥ, Θερμοκρασίας



Αλλαγές σε ΣΥ του εσωτερικού αέρα

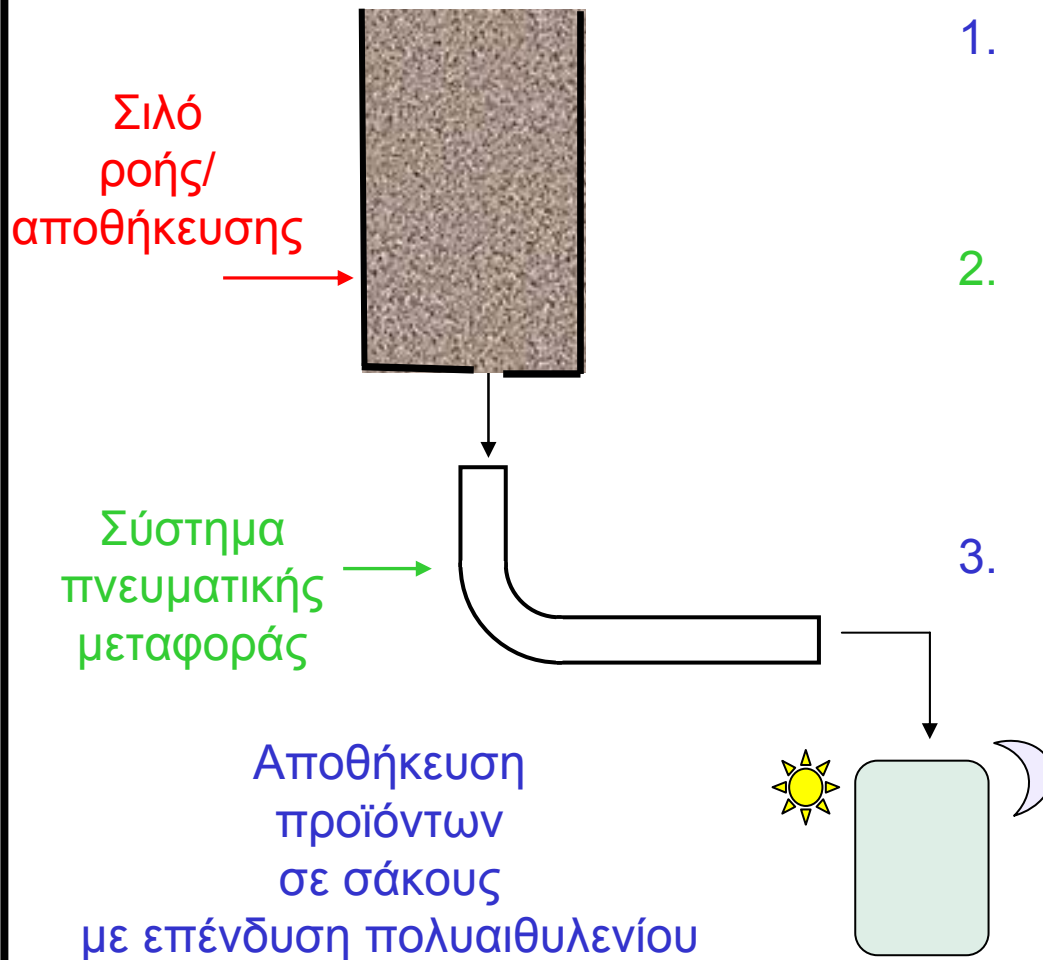


Αλλαγές στην περιεκτικότητα σε υγρασία των κόκκων του υλικού για επαναφορά συστήματος σε ισορροπία



ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΗ ← Δημιουργία (αύξηση υγρασίας) και σκλήρυνση (μείωση υγρασίας) των στερεών γεφυρών γύρω από τα σωματίδια

Σχηματική αναπαράσταση διαχείρισης τυπικής διεργασίας μεγάλης κλίμακας με κοκκώδη υλικά



1. Πρόβλημα ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΦΑΣΕΩΝ κατά τη διάρκεια εκφόρτισης σε ροή χοάνης
2. Πρόβλημα ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ υλικού κατά τη διάρκεια πνευματικής μεταφοράς αραιής φάσης
3. Πρόβλημα ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΗΣ λόγω μετακίνησης υγρασίας κατά τη διάρκεια αποθήκευσης για 30 ημέρες



Διαχωρισμός κατά τη διάρκεια ροής χοάνης ενός κυλινδρικού σιλό



Αρχικές Συνθήκες

Κυλινδρικό σιλό

διάμετρος : 55 cm

διάμετρος εξόδου : 7.5 cm

ύψος υλικού : 77 cm

Κοκκώδες υλικό : 60-40, 2:1 μίγμα 2 φάσεων

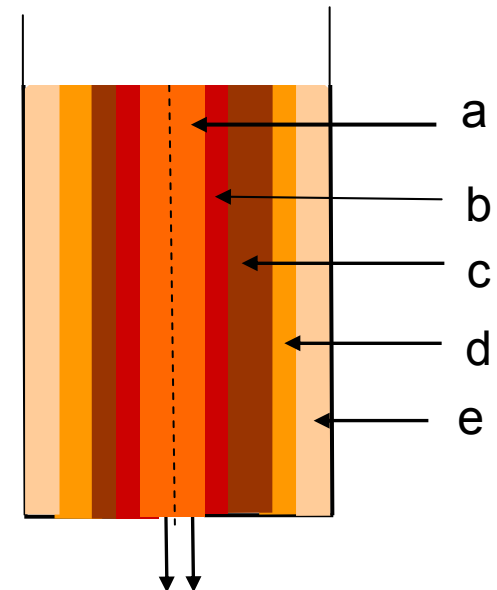
- μεγάλα σωματίδια ($d \sim 5.2$ mm)

- μικρά σωματίδια ($d \sim 2.6$ mm)

Αρχική Κατάσταση Φόρτισης

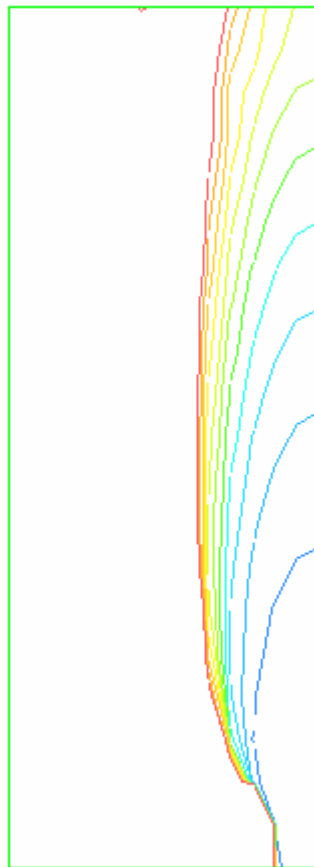
	Μεγάλα (%)	Μικρά (%)
a	38	62
b	45	55
c	50	50
d	58	42
e	68	32

Αρχική Κατάσταση Φόρτισης

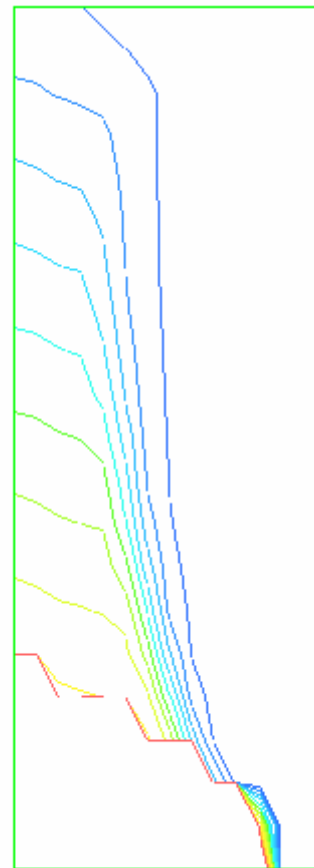




Διαχωρισμός κατά τη διάρκεια ροής χοάνης ενός κυλινδρικού σιλό: Όριο ροής/μη ροής



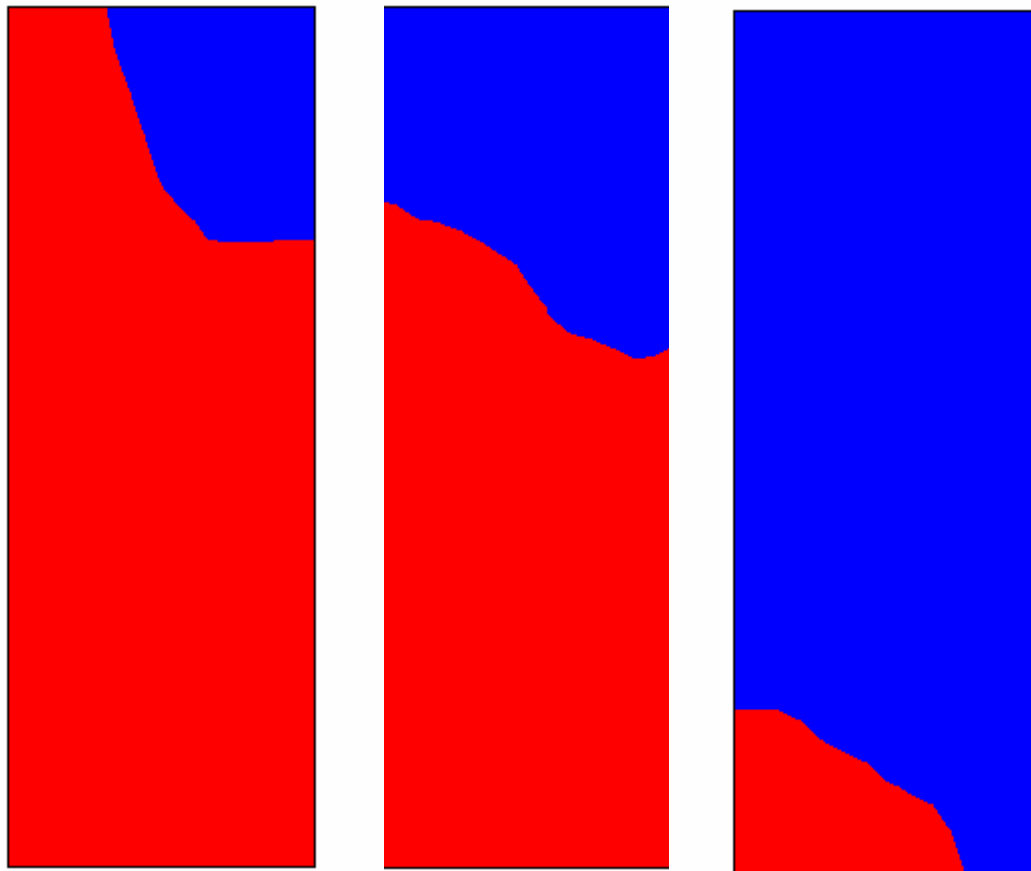
.9
.818
.736
.655
.573
.491
.409
.327
.245
.164
.818E-1
0



60
54.8
49.6
44.5
39.3
34.1
28.9
23.7
18.5
13.4
8.18
3



Διαχωρισμός κατά τη διάρκεια ροής χοάνης ενός κυλινδρικού σιλό: ελεύθερη επιφάνεια



Εξέλιξη με το
χρόνο
ελεύθερης
επιφάνειας
μεταξύ αέρα-
υλικού

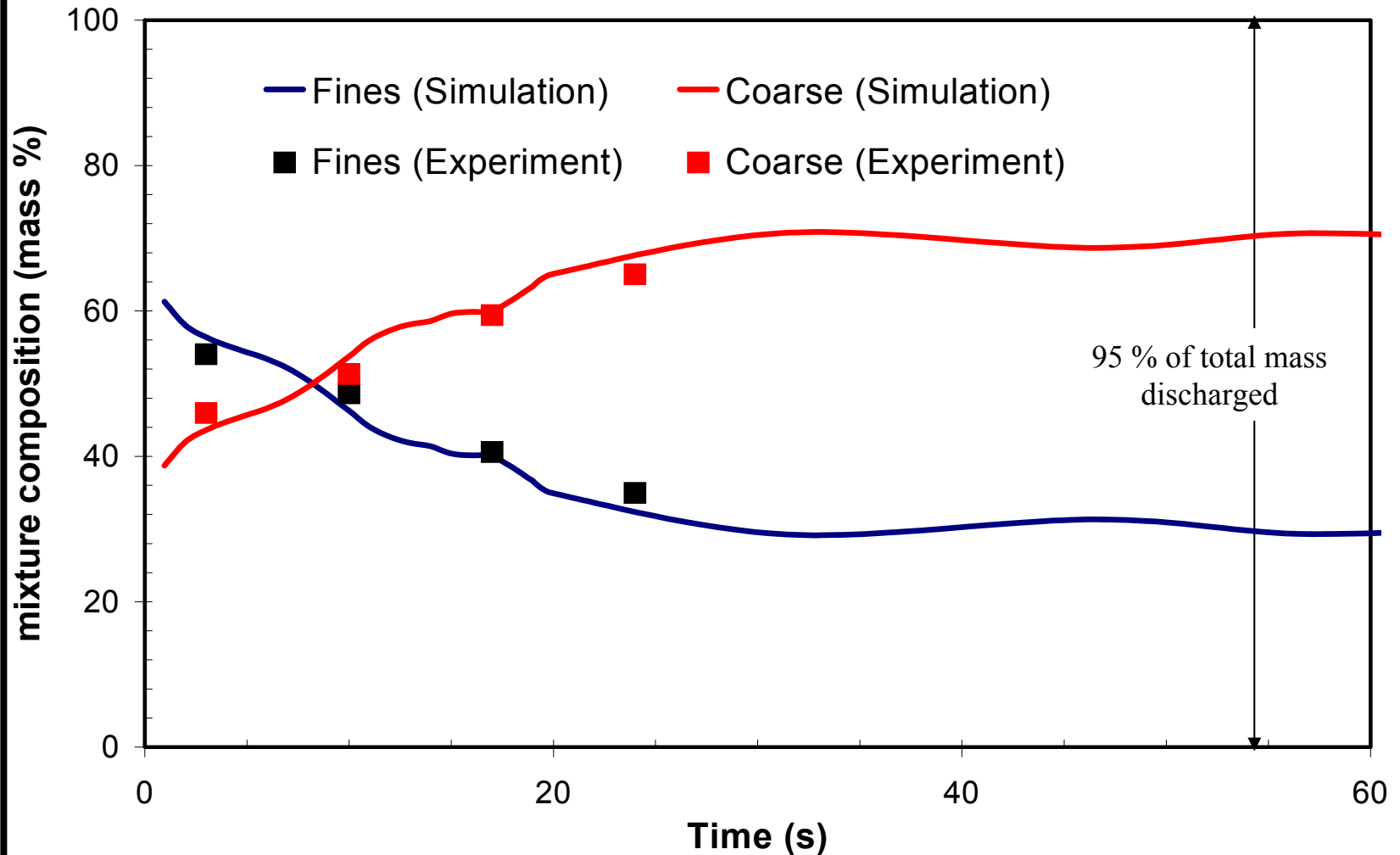
2 s

30 s

60 s

Time

Διαχωρισμός κατά τη διάρκεια ροής χοάνης ενός κυλινδρικού σιλό: χρονικός διαχωρισμός





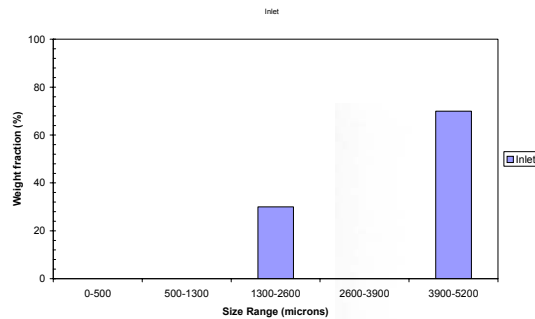
Διάσπαση σε εργοστασιακό πνευματικό μεταφορέα



Είσοδος :

Ογκομετρικός ρυθμός ροής αέρα : $0.041 \text{ m}^3/\text{s}$

Ρυθμός ροής μάζας υλικού : 0.61 kg/s



5 διακριτά μεγέθη σωματιδίων:

5.6 mm – 3.9 mm

3.9-2.6 mm

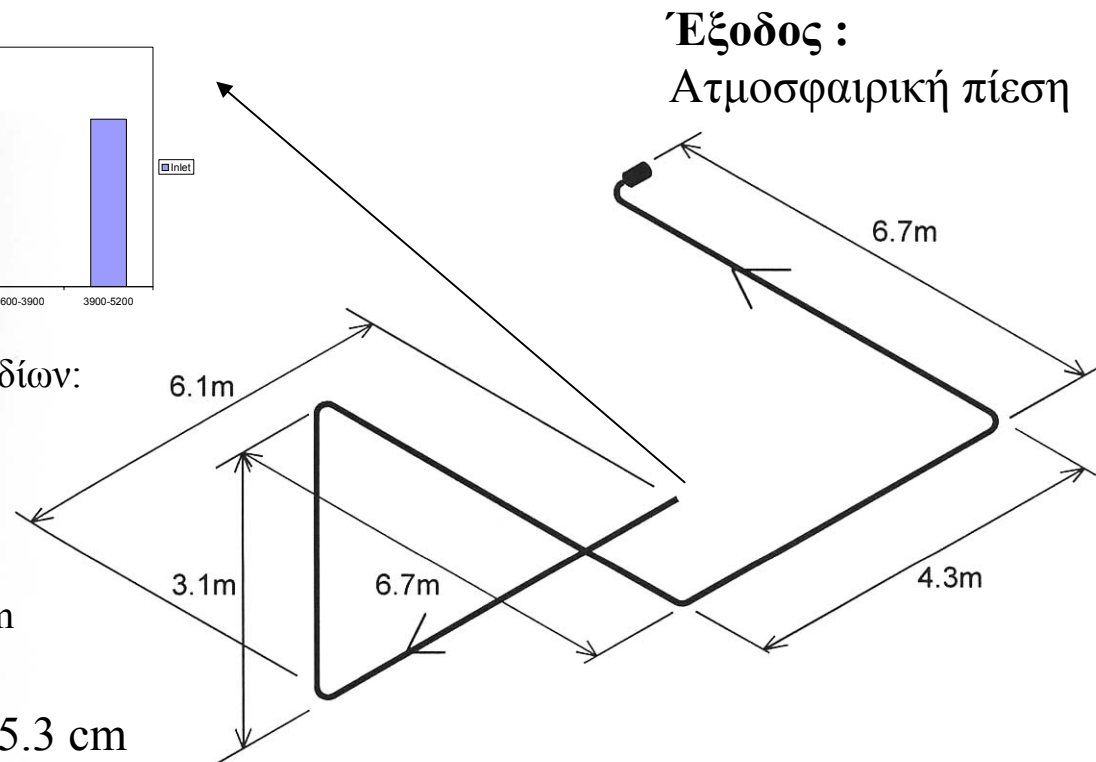
2.6-1.3 mm

1.3-0.5 mm

“σκόνη” κάτω των 500 μm

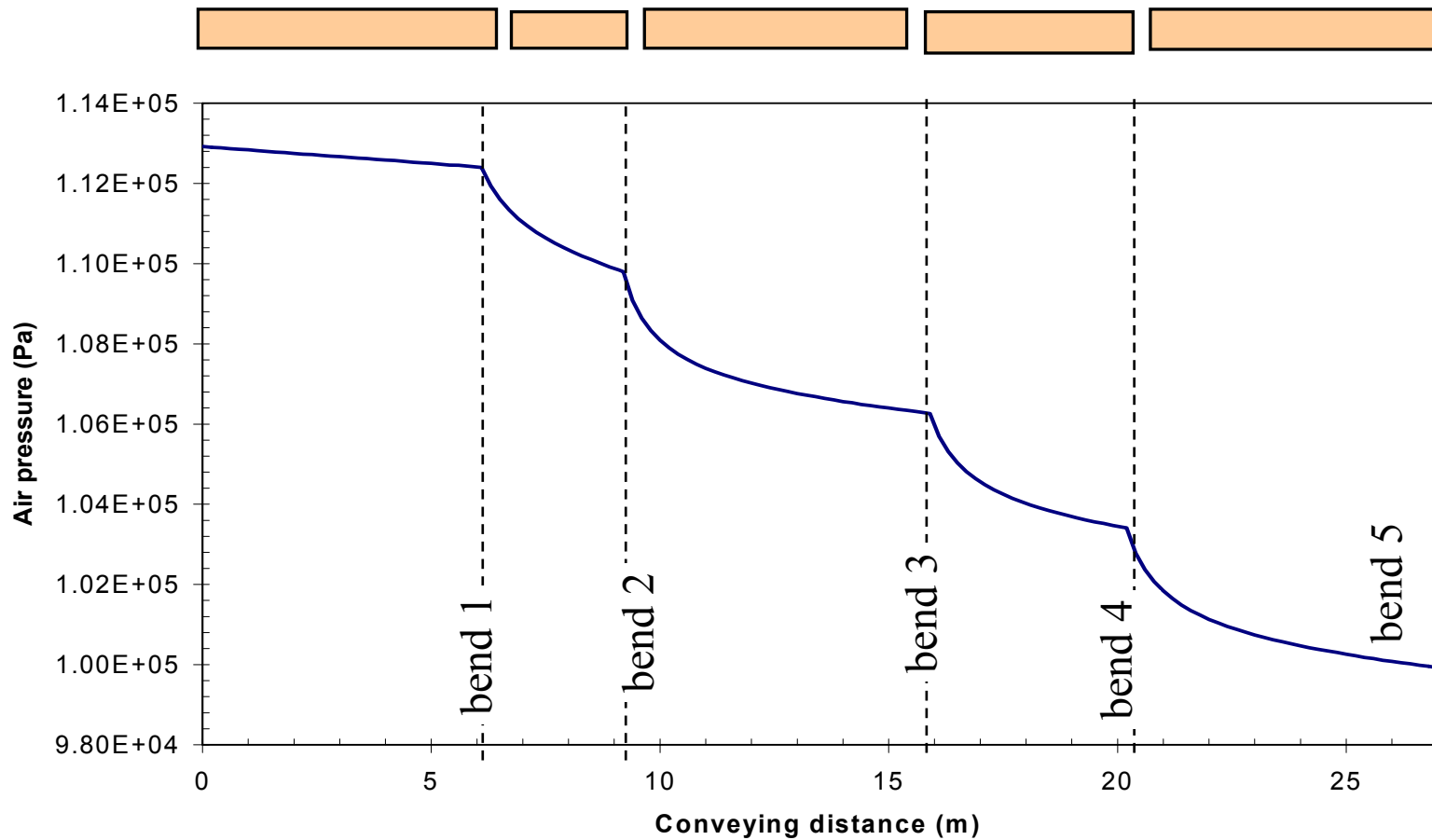
Διάμετροι σωλήνων : 5.3 cm

Στροφές μικρής ακτίνας : $R/d = 3.6$



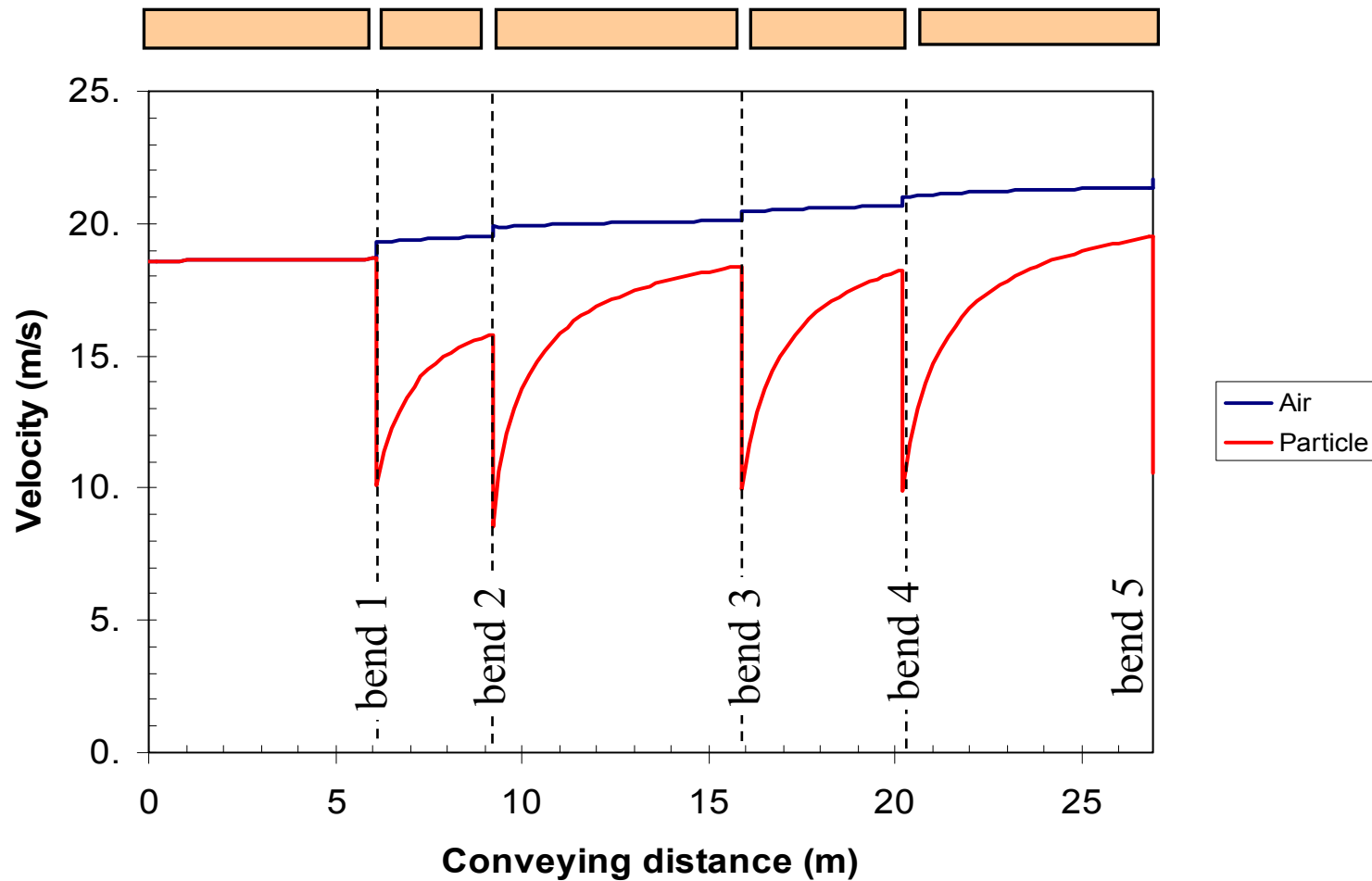


Διάσπαση σε εργοστασιακό πνευματικό μεταφορέα : Πίεση αέρα



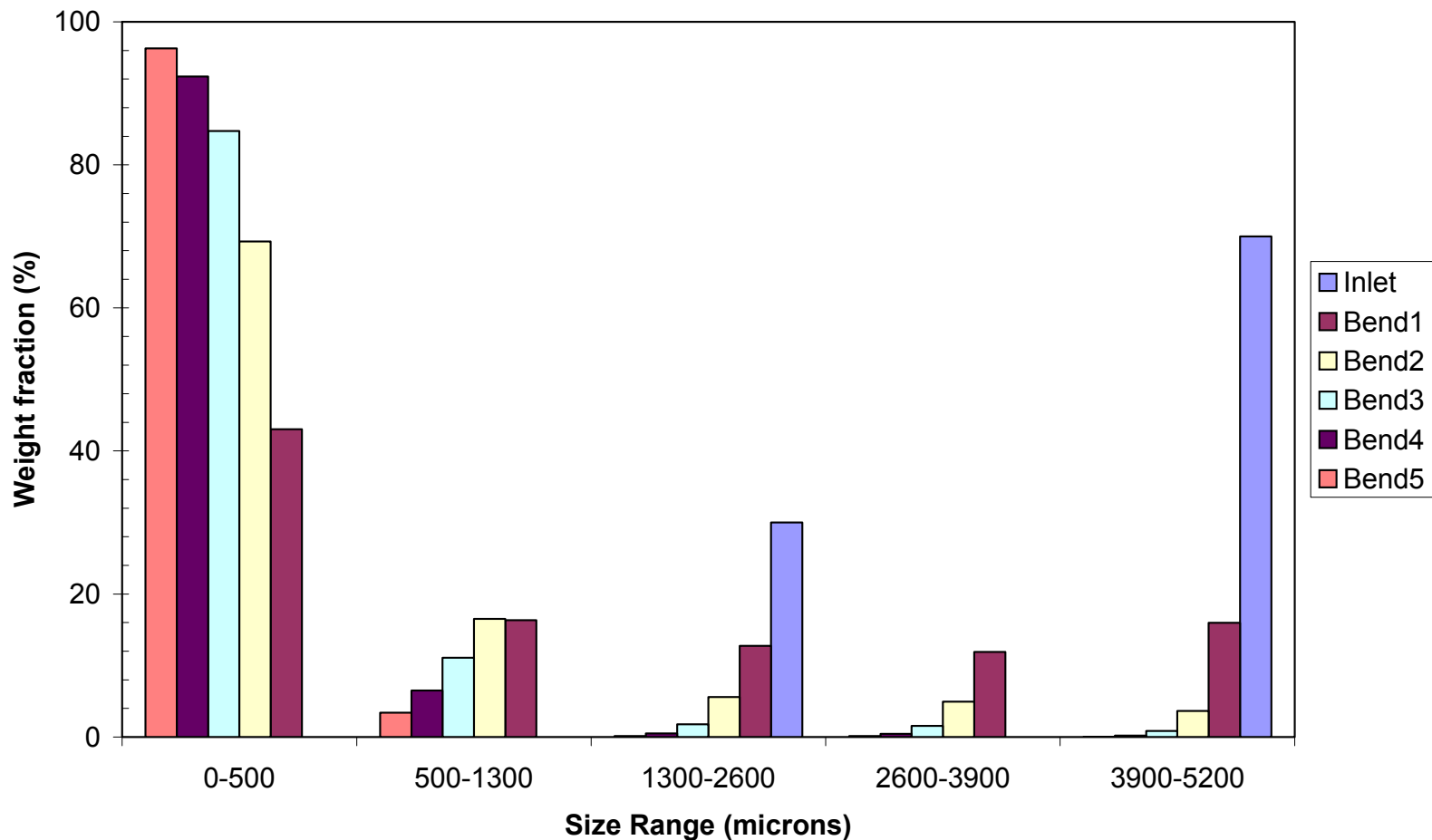


Διάσπαση σε εργοστασιακό πνευματικό μεταφορέα : Ταχύτητες σωματιδίων-αέρα



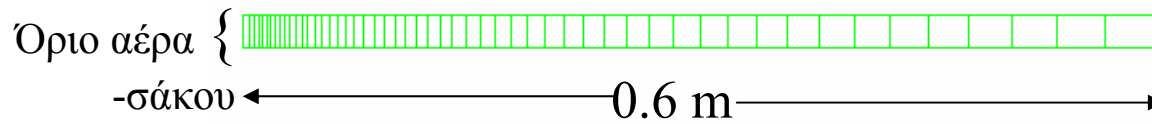


Διάσπαση σε εργοστασιακό πνευματικό μεταφορέα: Εξέλιξη κατανομής σωματιδίων

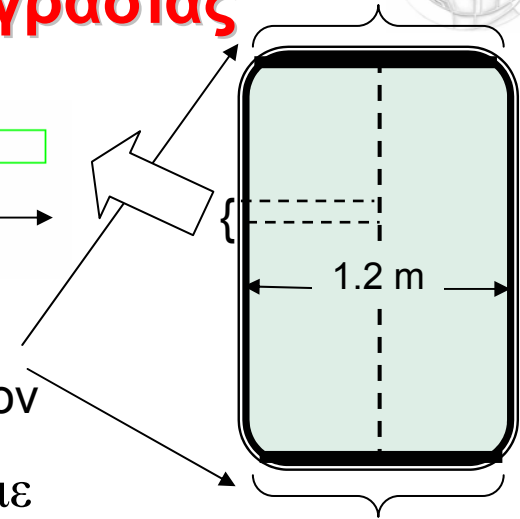




Συγκόλληση υλικού αποθηκευμένου σε σάκο λόγω μετακίνησης υγρασίας



Αδιαπέραστα όρια – δεν αλληλεπιδρά με το περιβάλλον



Προσομοίωση λωρίδας βάρους 0.6 m τού σάκου με επένδυση πολυαιθυλενίου

Αρχικές Συνθήκες

Θερμοκρασία: 18 C, ποσοστό υγρασίας στερεού : 0.068%.

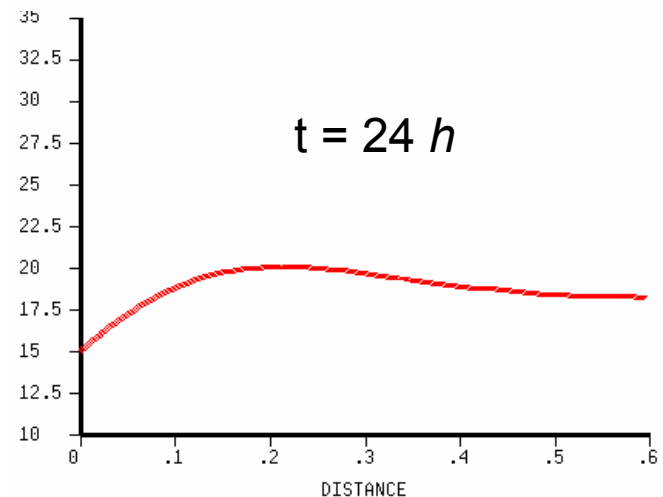
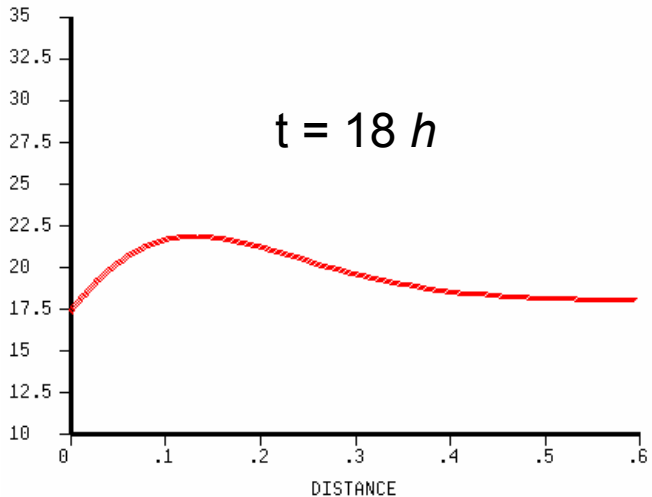
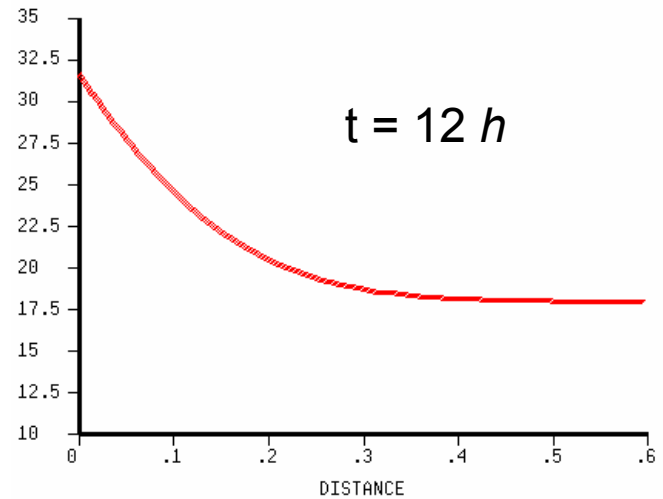
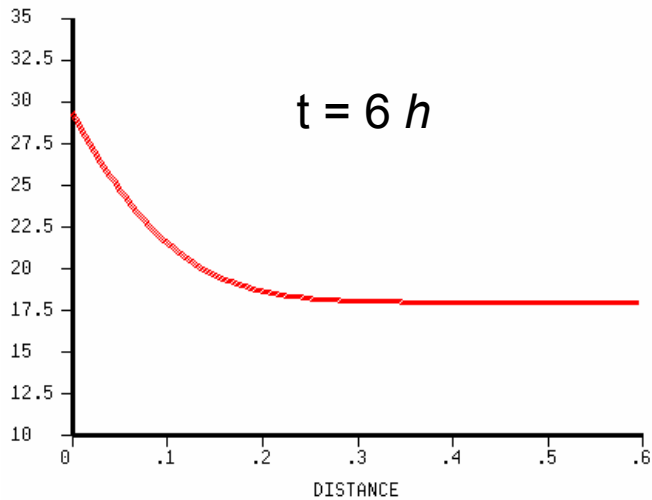
Το σύστημα αρχικά σε ισορροπία

Κυκλική διεργασία

Ένας κύκλος (24 hours): Θερμοκρασία περιβάλλοντος ανεβαίνει στους 40 C για 12 ώρες και κατεβαίνει στους 10 C για 12 ώρες.

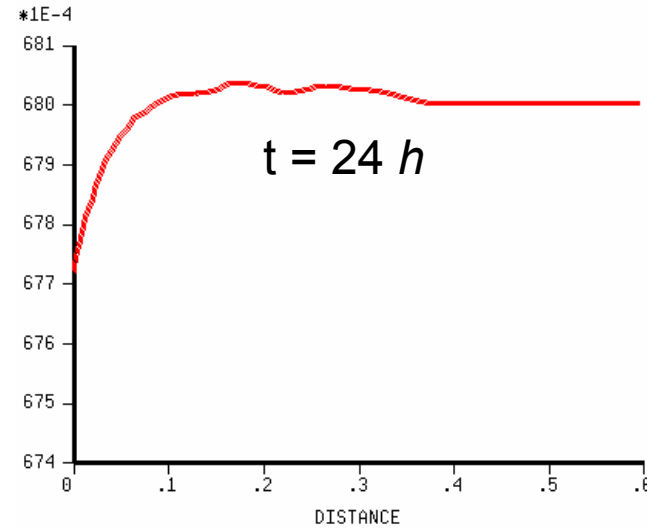
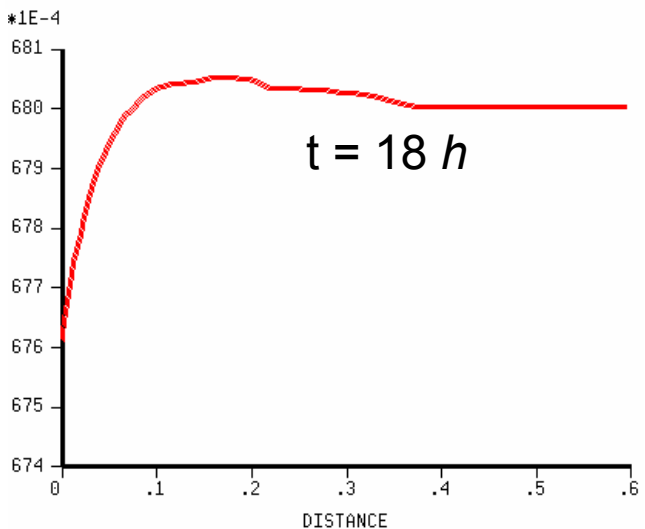
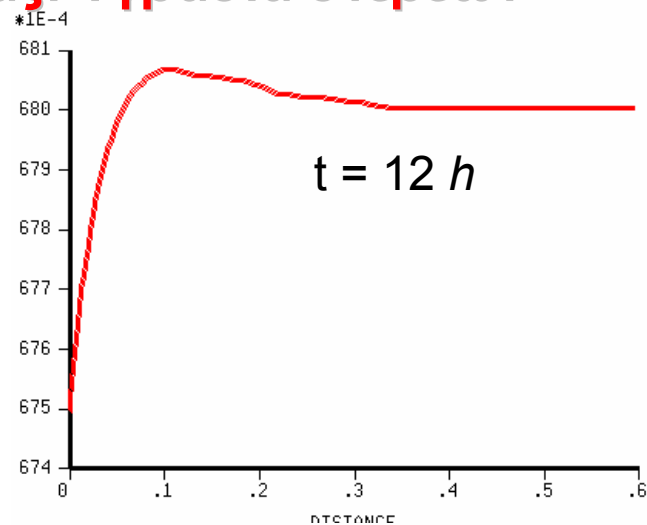
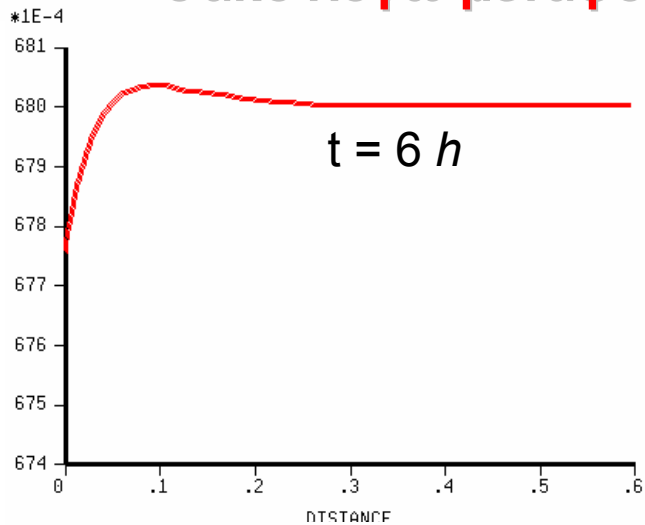
•30 κύκλοι 24hrs

Συγκόλληση υλικού αποθηκευμένου σε σάκκο λόγω μετακίνησης υγρασίας: Θερμοκρασία



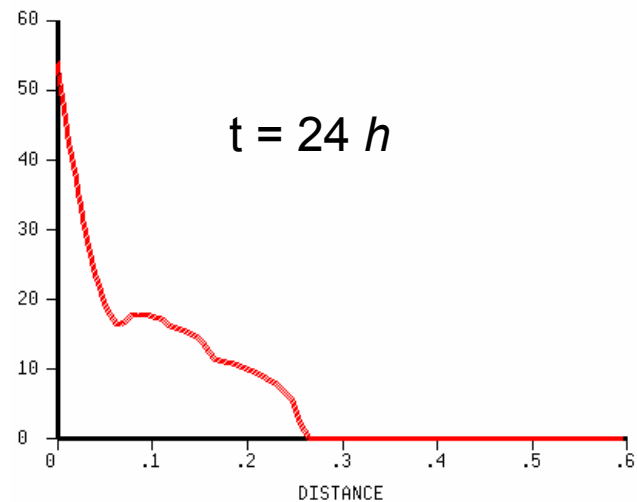
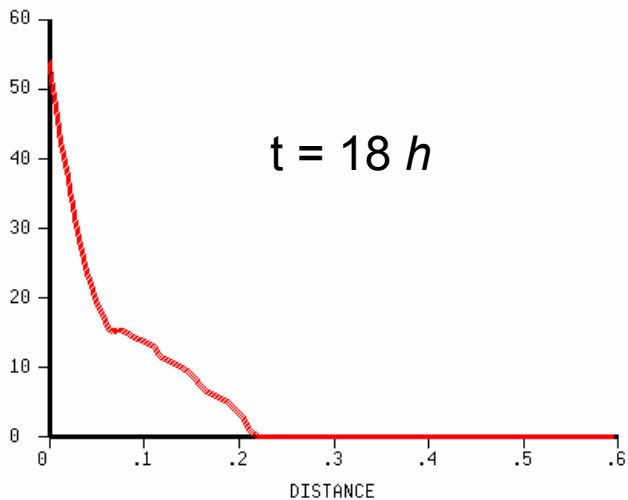
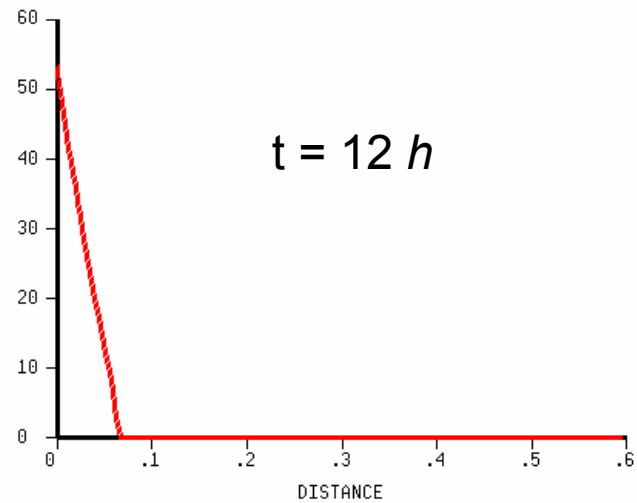
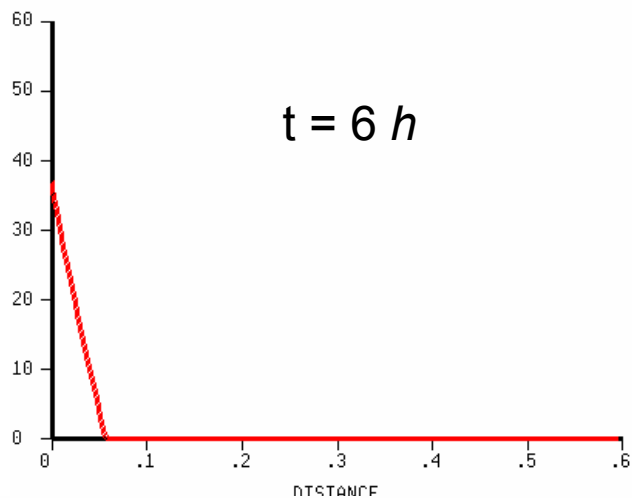


Συγκόλληση υλικού αποθηκευμένου σε σάκο λόγω μεταφοράς υγρασίας: Υγρασία στερεών



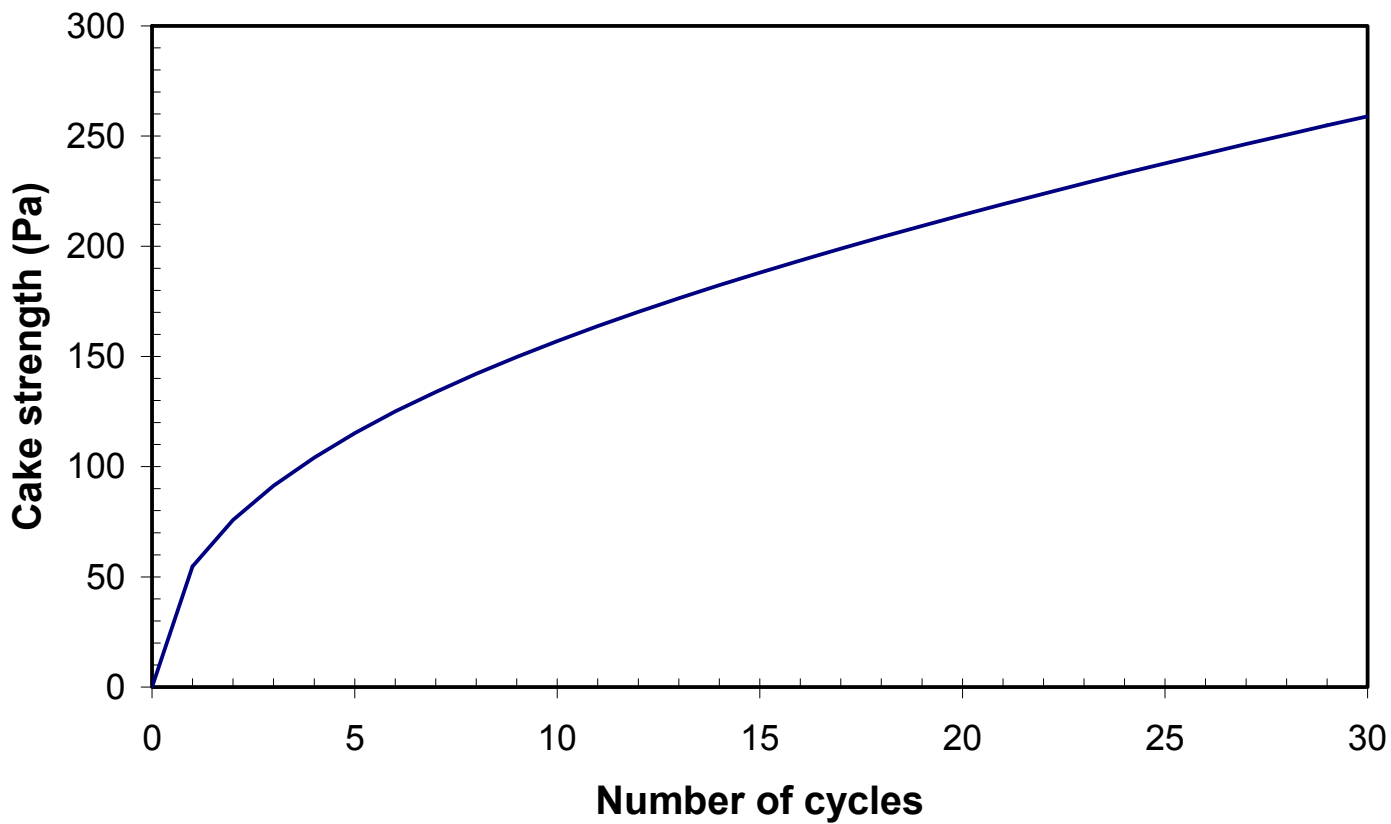


Συγκόλληση υλικού αποθηκευμένου σε σάκο λόγω μετακίνησης υγρασίας: Αντοχή εφελκυσμού





Αντοχή εφελκυσμού του υλικού κοντά στο εξωτερικό όριο





Παλινδρομική Συγκόλληση με Τριβή (I)



- Ο ρόλος της τριβής στην παγκόσμια οικονομία είναι πολύ σημαντικός. Ολόκληρα βιομηχανικά-μηχανολογικά συστήματα είναι άχρηστα μετά από μακροχρόνια χρήση, λόγω των αρνητικών φαινομένων της τριβής και της επακόλουθης φθοράς.
- Ανεπτυγμένες χώρες: εξοικονόμηση μέχρι και 1,6% του ΑΕΠ από μείωση αρνητικών επιπτώσεων τριβής!
- Δυστυχώς, για την εξέλιξή της, η μαθηματική θεωρία τριβής παραμένει σχεδόν αναλλοίωτη από την εποχή των Amontons και Coulomb, δηλαδή:

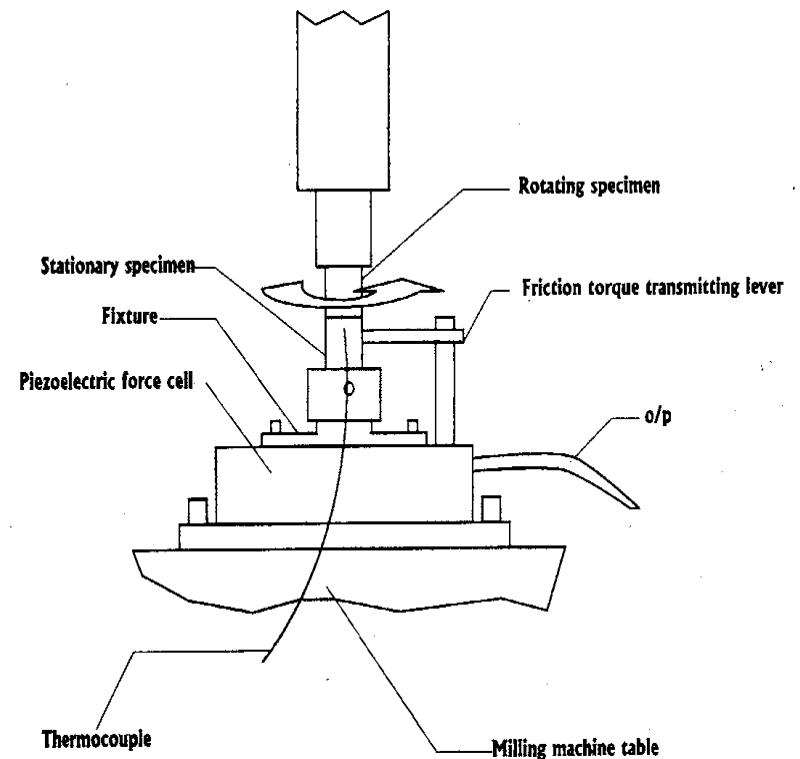
συντελεστής τριβής = διατμητική τάση / ορθή τάση



Παλινδρομική Συγκόλληση με Τριβή (II)



- Σημαντική διεργασία που χρησιμοποιείται ευρέως για συγκόλληση εκτεταμένων μεταλλικών επιφανειών
- Επιτυγχάνεται με την άσκηση ορθής τάσης στα μέταλλα προς συγκόλληση, την παλινδρομική κίνηση υπό κάποια ταχύτητα του ενός μετάλλου σε σχέση με το άλλο και την ταυτόχρονη αύξηση της θερμοκρασίας
- Κατά την επίλυση των εξισώσεων, εξαγωγή συμπερασμάτων και για την εξάρτηση του συντελεστή τριβής από ταχύτητα, θερμοκρασία





Αναλυτικό Μοντέλο Επαφής (I)

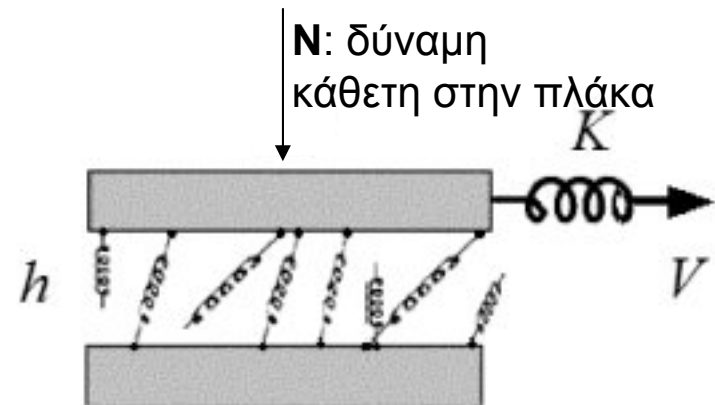


- Δύο άκαμπτες επιφάνειες συνδεδεμένες με ελαστικές δεσμούς που καταστρέφονται ακαριαία και δημιουργούνται με επαφή
- Συμπεριφορά δεσμών ως ελαστικά ελατήρια μήκους ηρεμίας $l^{(0)}$ και σταθεράς ελατηρίου κ
- Η κίνηση της πάνω πλάκας με ταχύτητα V αναπαριστάται ως κίνηση λόγω δύναμης ελατηρίου σταθεράς K
- Εξίσωση κίνησης πάνω πλάκας:

$$M\ddot{X} + \eta\dot{X} + F_b + K(X - Vt) = 0$$

F_b δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ των δεσμών-ελατηρίων που συνδέουν τις πλάκες και εξαρτάται από το ρυθμό καταστροφής-δημιουργίας των δεσμών αυτών

η : παράμετρος εξασθένησης κίνησης λόγω κάθετης δύναμης N



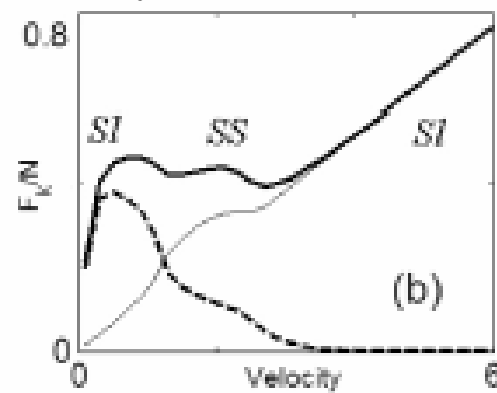
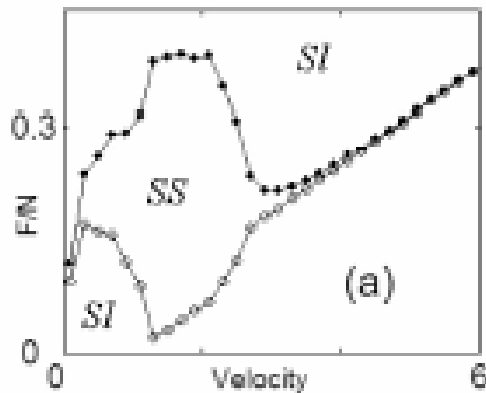


Αναλυτικό Μοντέλο Επαφής (II)



- Μεταβολή του συντελεστή τριβής με την ταχύτητα

$$\text{Συντελεστής τριβής} = F_k / N, \text{ όπου } F_k = \int_0^{\Delta t} K(X - Vt)dt / \Delta t, \quad \Delta t \rightarrow \infty$$

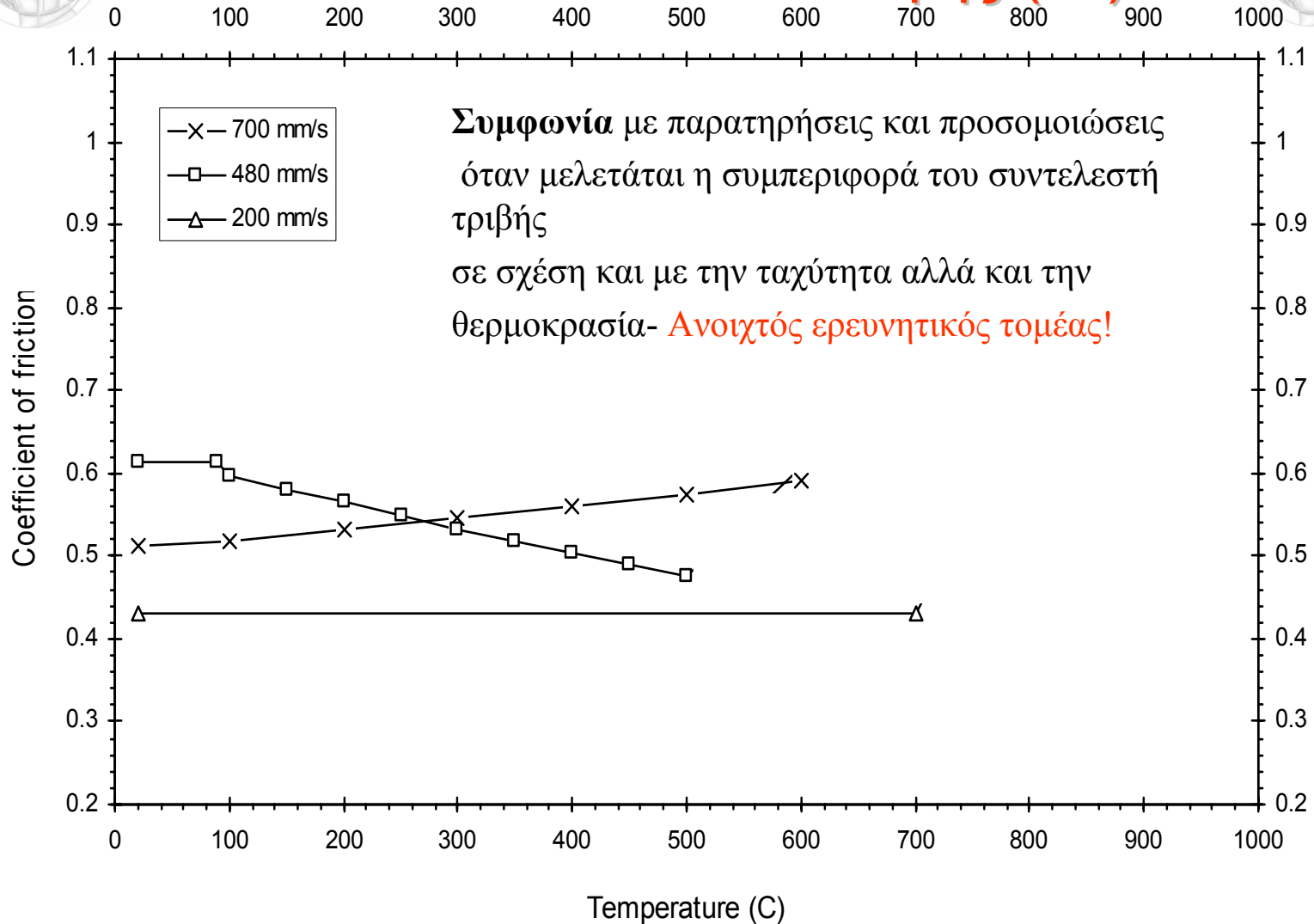


- Ενδιάμεση περιοχή ταχυτήτων όπου μείωση του συντελεστή τριβής για αύξηση της ταχύτητας (περιοχή **stick-slip**)

– Οφείλεται στην αλληλεπίδραση των φαινομένων της ρήξεως των δεσμών μεταξύ των 2 πλακών και της διατμητικής τάσης που υπάρχει λόγω της τριβής των πλακών (φαινόμενα ιξώδους φύσεως)



Αναλυτικό Μοντέλο Επαφής (III)





Προσκρούσεις κυμάτων σε παράκτιες κατασκευές



- Επικίνδυνα για προξένηση καταστροφών
- Απαραίτητο οι πολιτικοί μηχανικοί να γνωρίζουν κατά το σχεδιασμό παράκτιων κατασκευών (προβλητών, μολών κλπ) φορτία/πιέσεις που είναι δυνατόν αυτές να δεχτούν.





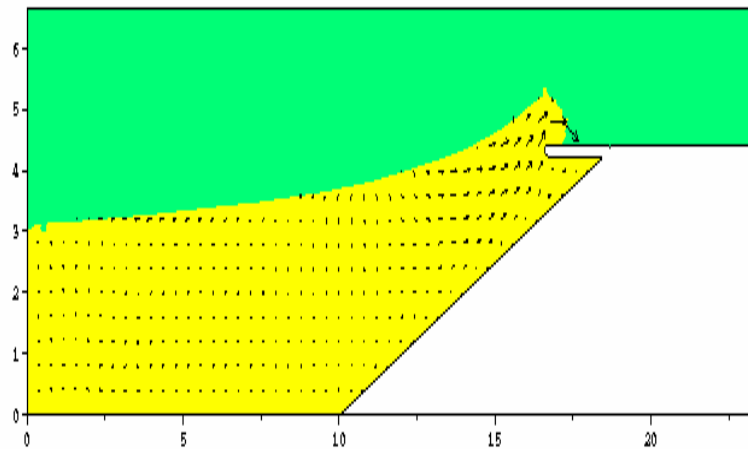
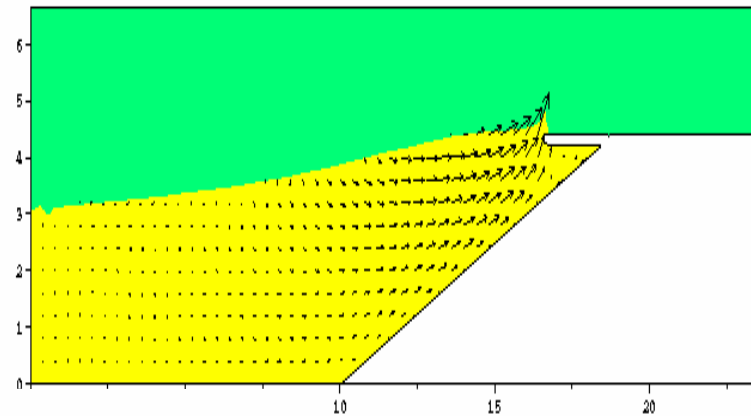
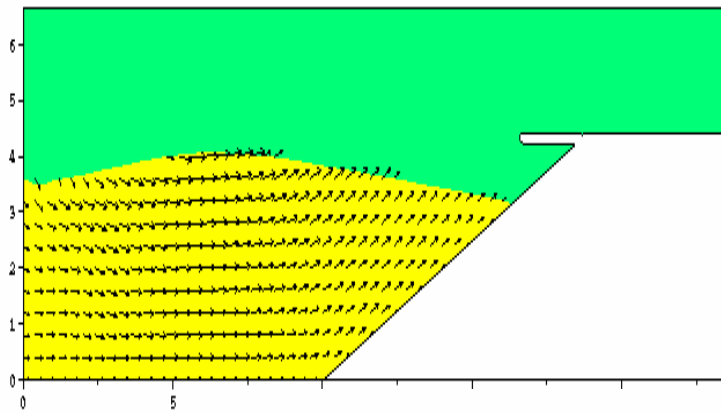
Μοντελοποίηση πρόσκρουσης κυμάτων (I)



- Δυναμικές Ροές
 - Εξισώσεις Navier-Stokes
 - Εξίσωση συνέχειας
 - Επίλυση με VOF σχήματα
- Διακριτοποίηση με Πεπερασμένες Διαφορές
- Δομημένα Πλέγματα
- Προσομείωση **Σολιτονίων** (κυμάτων μεγάλου πλάτους με μία και μοναδική ανύψωση τα οποία δεν έπονται ούτε ακολουθούνται από άλλες ανυψώσεις ή υφέσεις)-είναι τα πιο ενδιαφέροντα κύματα από σχεδιαστική άποψη για τους μηχανικούς (έχουν μέγιστη ενέργεια)



Μοντελοποίηση πρόσκρουσης κυμάτων (II)

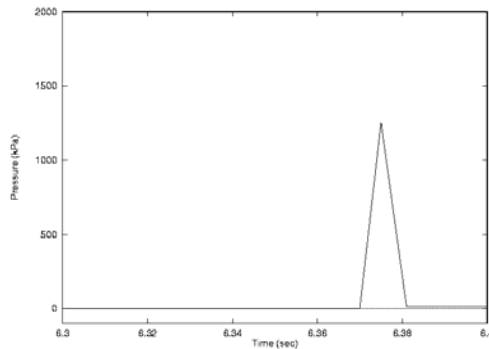




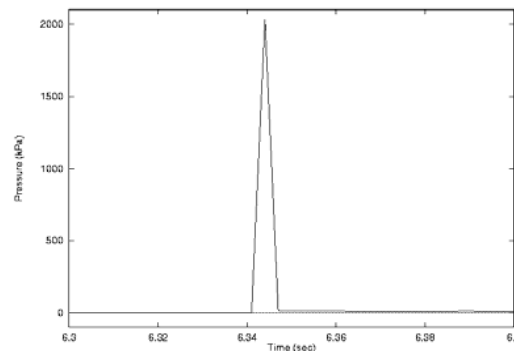
Μοντελοποίηση πρόσκρουσης κυμάτων (III)



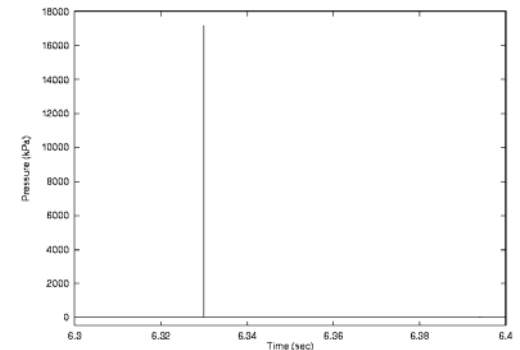
- Μέγιστη πίεση κατά κρούση δεν παραμένει σταθερή αλλά μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με χρονικό βήμα Δt !
- Αυτό όμως που παραμένει σταθερό σύμφωνα με θεώρημα διατήρηση ορμής είναι το ολοκλήρωμα της πίεσης με το χρόνο (pressure impulse)



$$2\Delta t, p_{\max}/2$$



$$\Delta t, p_{\max}$$



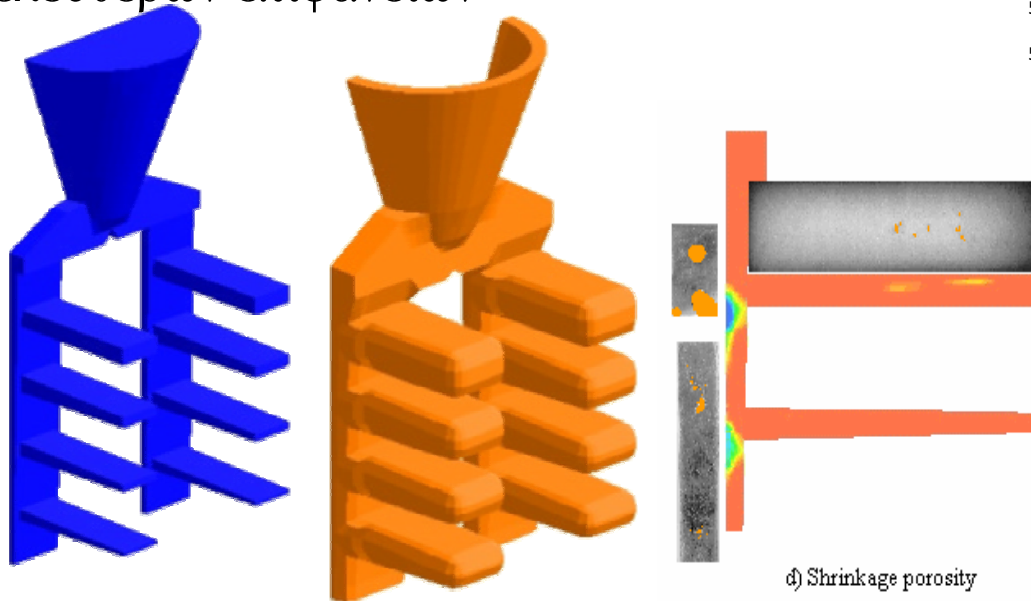
$$\Delta t/2, 2p_{\max}$$



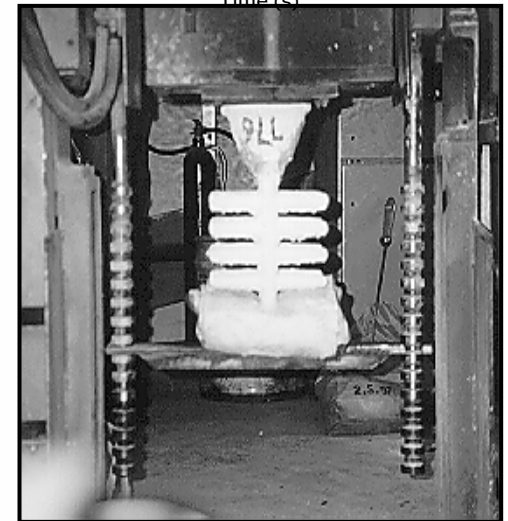
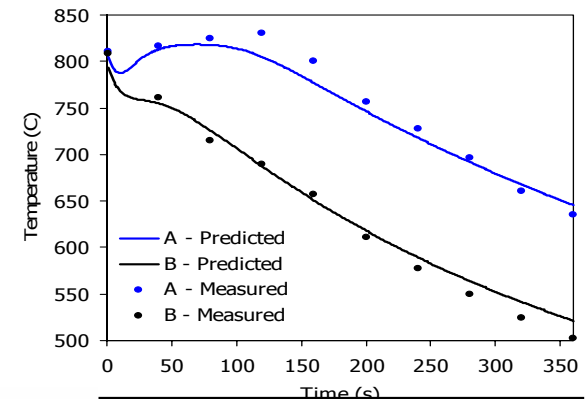
Άλλες Εφαρμογές (I)

- Χύτευση μετάλλων

Σύνθετη διεργασία που συνδυάζει αλλαγή φάσης, μεταφορά θερμότητας, και ροές ελευθέρων επιφανειών



(κέλυφος πάχους 10mm)

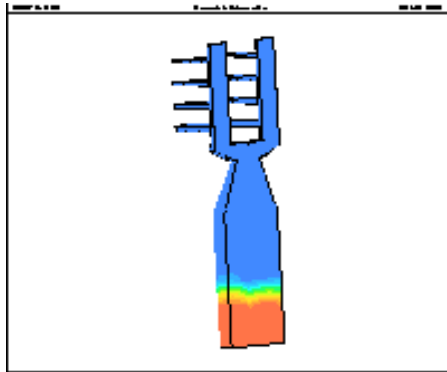




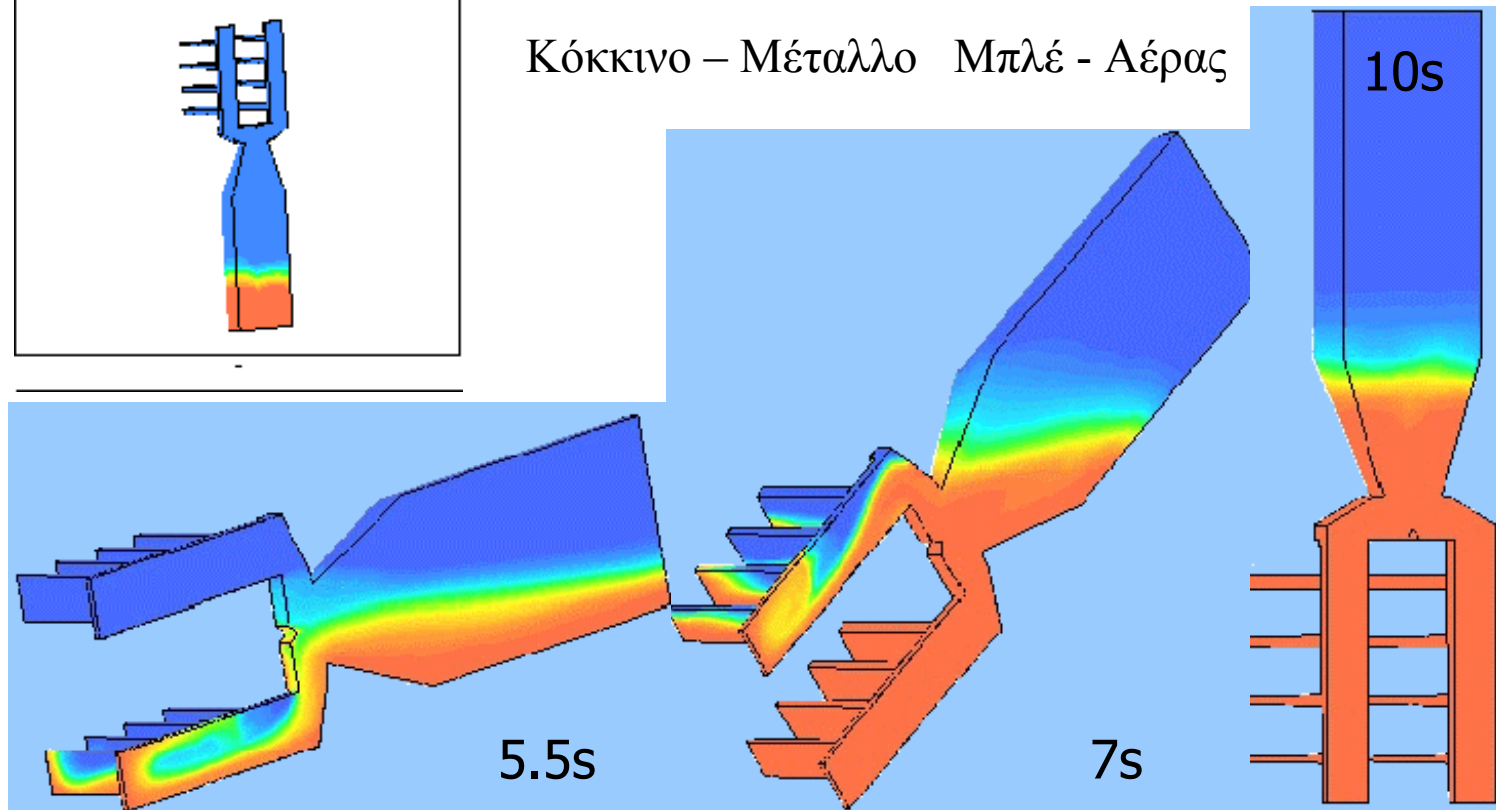
Άλλες Εφαρμογές (II)



- Καλούπι και εκμαγείο περιστρέφονται 180° σε 10 s.



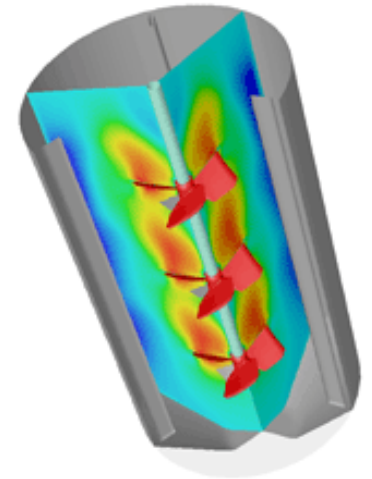
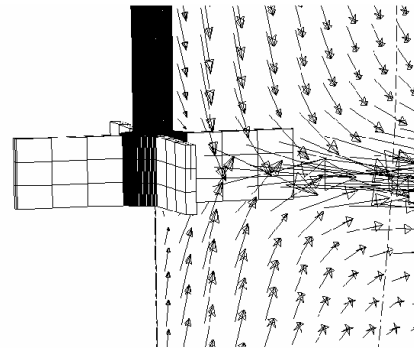
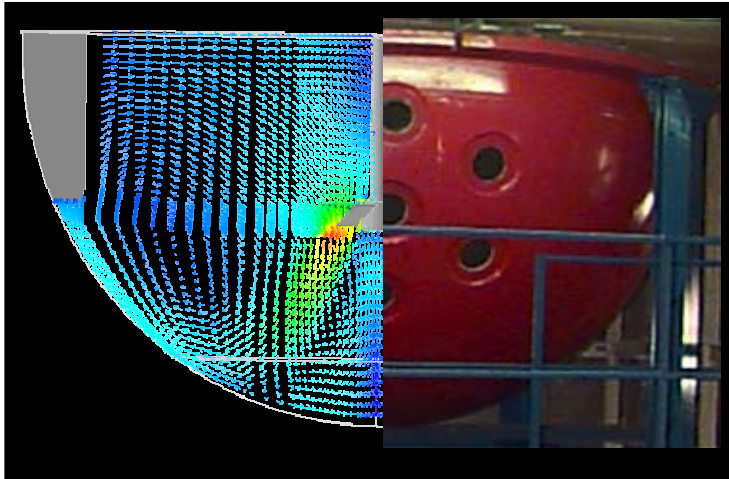
Κόκκινο – Μέταλλο Μπλέ - Αέρας



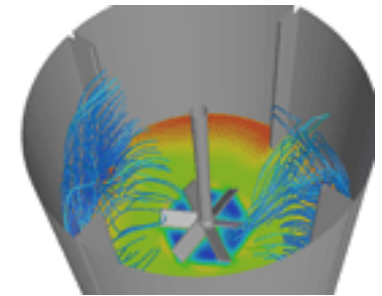


Άλλες Εφαρμογές (III)

Δοχεία ανάμειξης

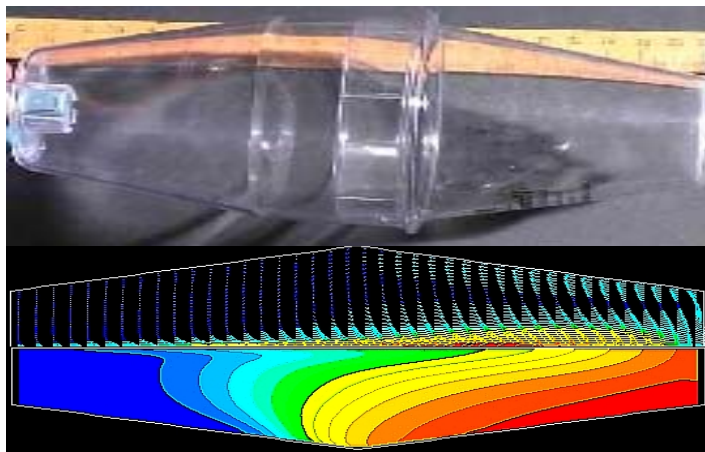


Η ανάμειξη ρευστών σε δοχεία ανάδευσης αποτελεί μια από τις πλέον σημαντικές διεργασίες στις βιομηχανίες χημικών, βιοχημικών, πετροχημικών και φαρμακευτικών.

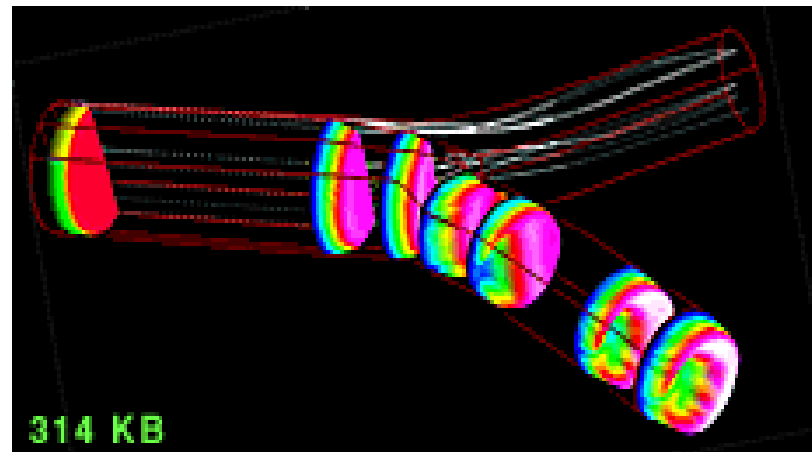
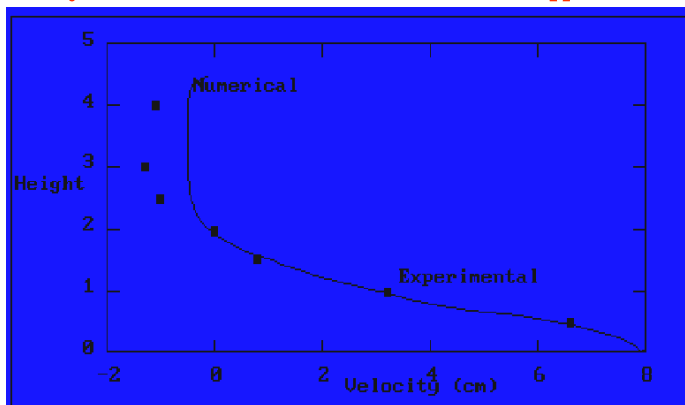




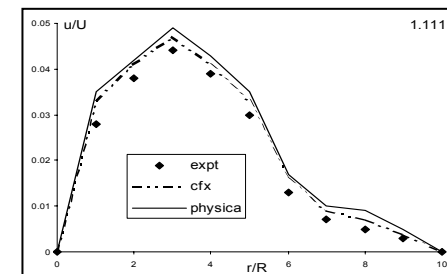
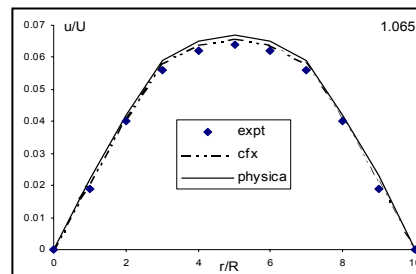
Άλλες Εφαρμογές (IV)



Ανάλυση της ροής αέρα
μέσα από αναπνευστήρα



Ρευστοδυναμική μελέτη της
καρωτίδας





Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα



- **Σημασία Εφαρμογής Μαθηματικής-Αριθμητικής Μοντελοποίησης** σε προβλήματα που απαντώνται στη Μηχανολογία
- **Μεθοδολογία** επίλυσης-αντιμετώπισης προβλημάτων με τη χρήση κατάλληλων τεχνικών-εργαλείων (κάποιες από τις προτεινόμενες μεθόδους βρίσκονται **ήδη σε χρήση** στη βιομηχανία για βελτιστοποίηση διεργασιών)
- **Ανοιχτά πεδία έρευνας** για πολλές διεργασίες-προβλήματα τόσο σε μαθηματικό όσο και υπολογιστικό επίπεδο



Βιβλιογραφία



- Chapelle, P., H. Abou-Chakra, N. Christakis, M.K. Patel, A. Abu-Nahar, U. Tüzün, M. Cross, 2004a: *Computational model for prediction of particle degradation during dilute phase pneumatic conveying. The use of a laboratory scale degradation tester for the determination of degradation propensity.* Advanced Powder Technology 15, 1, p.13-30.
- Chapelle, P., N. Christakis, H. Abou-Chakra, I. Bridle, M.S.A. Bradley, M.K. Patel, M. Cross, 2004b: *Computational model for prediction of particle degradation during dilute phase pneumatic conveying. Modelling of dilute phase pneumatic conveying.* Advanced Powder Technology 15, 1, p.31-50.
- Christakis, N, N.W.H. Allsop, R.G. Beale, A.J. Cooper, J.M. Dennis, 2002a: *A Volume of Fluid Numerical Model for Wave Impacts at Coastal Structures.* Water & Maritime Engineering 154, 3, p. 159-168.
- Christakis, N, M.K. Patel, M. Cross, J. Baxter, H. Abou-Chakra, U. Tüzün 2002b: *Predictions of Segregation of Granular Material with the aid of PHYSICA, a 3-D Unstructured, Finite-Volume Modelling Framework.* Int. J. Numer. Meth. Fluids 40, p. 281-291.
- Christakis, N., T.N. Croft, M.K. Patel, 2002c: *A new unstructured algorithm based on the Volume of Fluid method for tracking material interfaces in a finite-volume framework.* In: R. Herbin & D. Kroner (Eds) Finite Volumes for Complex Applications III (Third International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications , Porquerolles, France), p. 487-494, Hermes Penton Ltd.. London UK.
- Eriksson K., Estep D., Hansbo P., Johnson C., 1996: *Computational Differential Equations.* Cambridge University Press.
- Filipov, A.E., Klafter, J., Urbakh, M., 2004: *Friction through dynamical formation and rupture of molecular bonds,* PHYS. REV. LETT., VOL.92, 135503.
- Fowkes N.D., Mahony J.J., 1994: *An Introduction to Mathematical Modelling.* John Wiley & Sons, Chichester.
- Hirsch, C., 1994: *Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization.* John Wiley & Sons, Chichester.
- Vairis A., N. Christakis, 2005: *Recent Advances On Friction Modelling Within A Computational Mechanics Framework.* In: Proceedings of 1st International conference EpsMsO, Athens, Greece.
- Versteeg H.K., Malalasekera W, 1995: *An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method.* Longman, Harlow.
- Wang, J., N. Christakis, M.K. Patel, M.C. Leaper, M. Cross, 2004c: *A Computational Model of Coupled Heat and Moisture Transfer with Phase Change in Granular Sugar During Varying Environmental Conditions.* Numerical Heat Transfer, Part A, 45, 8, p.751-776.