Λύσεις Θεμάτων Προόδου Μαΐου 2005
στο μάθημα "Γραμμικός και μη- Προγραμματισμός"

ΘΕΜΑ 1

$$\max(2x_1 + 5x_2)$$

με περιορισμούς

$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 10$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Κανονική μορφή:

$$\max(2x_1 + 5x_2)$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$2x_1 + x_2 + x_5 = 10$$

Η τάξη του πίνακα του συστήματος είναι 3, άρα θα πρέπει να έχω 3 μη μηδενικές μεταβλητές στη βασική λύση. Αυτό σημαίνει ότι θα έχω $\frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ πιθανούς συνδυασμούς για να υπολογίσω τις πιθανές βασικές λύσεις του προβλήματος

i) $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \{ x_3 = 12 \quad x_4 = 6 \quad x_5 = 10 \}$ Βασική Εφικτή Λύση ✓

ii) $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \{ x_2 = 4 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 6 \}$ Βασική Εφικτή Λύση ✓

Θ1

iii) $x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_2 = 6 & x_3 = -6 \\ & x_5 = 4 \end{array} \right\}$ Βασική λύση ✗

iv) $x_1 = x_5 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_2 = 10 & x_3 = -18 \\ & x_4 = -4 \end{array} \right\}$ Βασική λύση ✗

v) $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 12 & x_4 = -6 \\ & x_5 = -14 \end{array} \right\}$ Βασική λύση ✗

vi) $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 6 & x_3 = 6 \\ & x_5 = -2 \end{array} \right\}$ Βασική λύση ✗

vii) $x_2 = 0 = x_5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 5 & x_3 = 7 \\ & x_4 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$ Βασική Εφικτή λύση ✓

viii) $x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = \frac{12-18}{-2} = 3 & x_2 = \frac{6-12}{-2} \\ & x_5 = 10-6-3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$ Βασική Εφικτή λύση ✓

ix) $x_3 = x_5 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = \frac{12-30}{-5} = +\frac{18}{5} & x_2 = \frac{10-24}{-5} = \frac{14}{5} \\ x_4 = 6 - \frac{32}{5} = -2/5 & \end{array} \right\}$ Βασική λύση ✗

x) $x_4 = x_5 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 4 & x_2 = 2 \\ & x_3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$ Βασική Εφικτή λύση ✓

Οι κορυφές ορίζονται από τις Β.Ε. λύσεις και η αντικειμενική συνάρτηση θα παίρνει τιμές

$$Z_i = 0 \quad Z_{ii} = 20 \quad Z_{vii} = 10 \quad Z_{viii} = 21 \quad Z_x = 18$$

$$\Downarrow$$

Η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι η

$$Z_{max} = Z_{viii} = 21 \quad \text{για} \left\{ \begin{array}{l} x_{1opt} = 3 \\ x_{2opt} = 3 \end{array} \right\}$$

ΘΕΜΑ 2

Έστω x_{ij} ο χώρος που ενοικιάζει η εταιρεία τον μήνα i για j μήνες. Έτσι, θα έχω 6 μεταβλητές:

x_{11}, x_{12}, x_{13} : χώρος που ενοικιάζεται τον 1° μήνα για 1, 2 και 3 μήνες αντίστοιχα.

x_{21}, x_{22} : χώρος που ενοικιάζεται τον 2° μήνα για 1 και 2 μήνες αντίστοιχα.

x_{31} : χώρος που ενοικιάζεται τον 3° μήνα για 1 μήνα

Συνολικά, η εταιρεία θα πληρώσει:

$1000(x_{11}+x_{21}+x_{31})$ για ό,τι ενοικιάσει για 1 μήνα

$1800(x_{12}+x_{22})$ για ό,τι ενοικιάσει για 2 μήνες

$2500(x_{13})$ για ό,τι ενοικιάσει για 3 μήνες

Συνεπώς, το συνολικό κόστος που θέλει να ελαχιστοποιήσει είναι:

$$Z = 1000(x_{11}+x_{21}+x_{31}) + 1800(x_{12}+x_{22}) + 2500(x_{13})$$

Τον πρώτο μήνα θέλει $25\,000 \, m^2$, συνεπώς ο χώρος που θα ενοικιαστεί τον πρώτο μήνα (και για 1 και για 2 και για 3 μήνες) θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσος με $25000 \, m^2$, δηλαδή

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \geq 25000$$

Για τον 2ο μήνα, η εταιρεία είναι πιθανόν να έχει χώρο διαθέσιμο από τον 1° μήνα (λόγω ενοικιάσεως χώρου για 2 ή 3 μήνες) και επίσης είναι πιθανόν να ενοικιάσει χώρο για 1 ή 2 μήνες. Συνολικά ο χώρος αυτός θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσος με τα 10000 που χρειάζεται η εταιρεία τον 2° μήνα, δηλαδή:

$$x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} \geq 10000$$

Για τον 3^o μήνα, η εταιρεία ενδέχεται να έχει χώρο που έχει ήδη ενοικιάσει από τον 1^o μήνα (x_{13}) ή τον 2^o μήνα (x_{22}) και επιπλέον μπορεί να ενοικιάσει επιπλέον χώρο για 1 μήνα (x_{31}). Ο συνολικός αυτός χώρος θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσος με $20\,000\ m^2$, δηλαδή:

$$x_{13} + x_{22} + x_{31} \geq 20000$$

Έτσι, το πρόβλημα ως πρόβλημα Γ.Π. διατυπώνεται ως:

$$\min\left(Z = 1000(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 1800(x_{12} + x_{22}) + 2500x_{13}\right)$$

με περιορισμούς:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 25000$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} \geq 10000$$

$$x_{13} + x_{22} + x_{31} \geq 20000$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{31} \geq 0$$

Θέμα 3

Κανονική μορφή: $\max(z = -x_1 + 3x_2)$

με περιορισμούς

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 \quad &= 4\\
2x_1 - x_2 \quad + x_4 &= 2\\
x_2 \quad + x_5 &= 3
\end{aligned}
$$

$$x_i \geq 0 \,, i = 1, 2, \ldots, 5$$

Στην πρώτη ισότητα εισάγουμε την τεχνητή μεταβλητή t_1, και έτσι το πρόβλημα προς επίλυση γίνεται:

$$\max(z = -x_1 + 3x_2 - Mt_1)$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + t_1 \quad &= 4\\
2x_1 - x_2 \quad + x_4 &= 2\\
x_2 \quad + x_5 &= 3
\end{aligned}
$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots 5 \,, \quad t_1 \geq 0$$

Αντικαθιστώντας την t_1 στην αντικειμενική συνάρτηση παίρνουμε:

$$Z = -x_1 + 3x_2 - M(4 - x_1 - 2x_2 + x_3) = (-1+M)x_1 + (3+2M)x_2 - Mx_3 - 4M$$

1ος Πίνακας Simplex

BM	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	t_1	b
← t_1	1	2	-1	0	0	1	4
x_4	2	-1	0	1	0	0	2
x_5	0	1	0	0	1	0	3
$\bar{c}_j + \tilde{c}_j M$	1-M	-3-2M	M	0	0	0	4M

Θ3

$\bar{C}_1 + C_1^* M = 1 - M < 0$ και $\bar{C}_2 + C_2^* M = -3-2M < 0$, άρα η λύση αυτή δεν είναι βέλτιστη. Εάν επιλέξω την x_2 ως εισερχόμενη μεταβλητή παρατηρώ ότι λόγω του κανόνα του ελάχιστου πηλίκου εξερχόμενη μεταβλητή θα είναι η τεχνητή μεταβλητή t_1. Έτσι, οι γραμμές του νέου πίνακα Simplex θα είναι:

(αξονική γραμμή) $= \frac{1}{2}[1, 2, -1, 0, 0, 1, 4]$

(2η γραμμή) $= [2, -1, 0, 1, 0, 0, 2] - (-1)\cdot[1/2, 1, -1/2, 0, 0, 1/2, 2]$

(3η γραμμή) $= [0, 1, 0, 0, 1, 0, 3] - 1\cdot[1/2, 1, -1/2, 0, 0, 1/2, 2]$

(4η γραμμή) $= [1-M, -3-2M, M, 0, 0, 0, 4M] - (-3-2M)[1/2, 1, -1/2, 0, 0, 1/2, 2]$

2ος Πίνακας Simplex

BM	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5	t_1	B
x_2	1/2	1	-1/2	0	0	1/2	2
x_4	5/2	0	-1/2	1	0	1/2	4
⇐ x_5	-1/2	0	1/2	0	1	-1/2	1
$\bar{C}_j + C_j^* M$	5/2	0	-3/2	0	0	$\frac{3}{2}+M$	6

$\bar{C}_3 + C_3^* M = -3/2 < 0$, άρα η x_3 θα είναι η εισερχόμενη μεταβλητή και προφανώς η x_5 θα είναι η εξερχόμενη. Ο επόμενος πίνακας Simplex υπολογίζεται ως:

(αξονική γραμμή) $= \frac{1}{1/2}[-1/2, 0, 1/2, 0, 1, -1/2, 1]$

(1η γραμμή) $= [1/2, 1, -1/2, 0, 0, 1/2, 2] - (-1/2)[-1, 0, 1, 0, 2, -1, 2]$

(2η γραμμή) $= [5/2, 0, -1/2, 1, 0, 1/2, 4] - (-1/2)[-1, 0, 1, 0, 2, -1, 2]$

$(4\eta \ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}) = [5/2, 0, -3/2, 0, 0, \frac{3}{2}+M, 6] - (-\frac{3}{2})[-1, 0, 1, 0, 2, -1, 2]$

3ος Πίνακας Simplex

ΒΜ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	θ
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_4	2	0	0	1	1	0	5
x_3	-1	0	1	0	2	-1	2
$\bar{C}_j + C_j^* M$	1	0	0	0	3	3+M	9

$\bar{C}_j + C_j^* M \geq 0 \ \ \forall j$, άρα η παρούσα λύση αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση του προβλήματος, δηλαδή

$\underline{x}_{opt} = [0, 3, 2, 5, 0, 0]^T$ με $Z_{max} = 9$

Θέμα 4

$$\min\left(z = 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4\right)$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\geq 10 \\ 2x_1 + 4x_3 + x_4 &\geq 5 \\ -x_1 + 3x_3 &\geq -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\min\left(z = 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4\right)$$

$$\begin{aligned} \cancel{4}^{2}x_1 + \cancel{2}x_2 + \cancel{6}^{3}x_3 &= \cancel{10}^{5} \\ 2x_1 + 4x_3 + x_4 - x_5 &= 5 \\ -x_1 + 3x_3 - x_6 &= -6 \\ (\Leftrightarrow x_1 - 3x_3 + x_6 &= 6) \end{aligned}$$

$r(A) = 3$

BM: x_2, x_4, x_6

$$\min\Big(z = \cancel{4x_1} + 5 - \cancel{2x_1} - \cancel{3x_3} + \cancel{3x_3} + 5 - \cancel{2x_1} - 4x_3 + x_5$$

$$= 10 - 4x_3 + x_5\Big)$$

1ος Simplex

BM	x_1	x_2	$\downarrow x_3$	x_4	x_5	x_6	b
x_2	2	1	3	0	0	0	5
$\leftarrow x_4$	2	0	4	1	-1	0	5
x_6	1	0	-3	0	0	1	6
$\bar{c}_j$	0	0	4	0	-1	0	10

$\bar{c}_3 > 0 \Rightarrow x_3$: εισερχόμενη μεταβλητή

Ελάχιστο πηλίκο: $\min\left\{\frac{5}{3}, \frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4} \Rightarrow x_4$: εξερχόμενη μεταβλητή

Θ4 ②

$\left.\begin{array}{l} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{array}\right\}$ ΒΜ

$$B = \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{c}_B^T = \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{c}_N^T = \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\underline{c}}^T_{N\,2^{os}\,\text{Simplex}} = \underline{c}_B^T B^{-1} \cdot N - \underline{c}_N^T = \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \end{array} \\ [-2, -1, 0]$$

$\overline{\underline{c}}^T_{N\,2^{os}\,\text{simplex}} \leq 0 \Rightarrow$ βρήκαμε η βέλτιστη λύση (ελαχιστοποίηση)

$$\underline{b}_{2^{os}\,\text{Simplex}} = B^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 5/4 \\ 39/4 \end{bmatrix}$$

$$\overline{Z}_{opt} = 10 + \underline{c}_B^T B^{-1} \cdot \underline{b} = 10 - 5 = 5$$

$\Rightarrow$ βέλτιστη λύση η $\underline{x}_{opt_1} = [0, 5/4, 5/4, 0, 0, 39/4]^T$

με $Z_{min} = 5$

Επειδή όμως $\overline{c}_5 = 0 \Rightarrow \exists$ εναλλακτική βέλτιστη λύση γιατί κάθε αύξηση του x_5 δεν αλλάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

$$(\text{νέα στήλη } x_5) = B^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c}\text{στήλη } x_5 \\ \text{αρχικού πίνακα}\end{array}\right) = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

2ος Simplex

BM	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
← x_2					$3/4$		$5/4$
x_3					$-1/4$		$5/4$
x_6					$-3/4$		$39/4$
$\bar{c}_j$	-2			-1	0		

Για να βγει το x_5 από τις μη-βασικές μεταβλητές, προφανώς θα πρέπει το x_2 να βγει από τη βάση

⇓

x_5, x_3, x_6 } νέες BM

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_5 & x_3 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underline{C}_B^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_5 & x_3 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$C_N^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\overline{\underline{C}}_{N\,3^{os}\,Simplex}^T = \underline{C}_B^T B^{-1} \cdot N - C_N^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_4 \end{matrix} \\ [-2,\ 0,\ -1] \end{array}$$

$$\overline{\underline{C}}_{N\,3^{os}\,Simplex}^T \le 0 \Rightarrow \text{βέλτιστη λύση [νέα!]}$$

$$Z_{opt} = \underline{C}_B^T B^{-1} \cdot \underline{b} + 10 = -5 + 10 = 5$$

και $$\underline{b}_{3^{os}\,Simplex} = B^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Θ4

3ος Simplex

BM	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_5							5/3
x_3							5/3
x_6							11
$\bar{c}_j$	-2	0		-1			5

$$\underline{x}_{opt_2} = [0, 0, 5/3, 0, 5/3, 11]^T$$

με $Z_{min} = 5$

$\Downarrow$

κάθε κυρτός συνδυασμός των 2 βέλτιστων λύσεων θα είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος Γ.Π.

$\Downarrow$

$$\underline{x}_{opt_3} = \lambda \cdot \underline{x}_{opt_1} + (1-\lambda)\, \underline{x}_{opt_2}$$

$$0 < \lambda < 1$$