Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16 **Διδάσκων: Μενέλαος Καραβέλας**

ΜΕΜ103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τμήμα Α
Εργαστήριο Προβλημάτων 5

Τρίτη, 24/11/15 - Τετάρτη, 25/11/15

Άσκηση 5.1 Αποδείξτε με εις άτοπο απαγωγή ότι:
Εάν $x, y \in \mathbb{R}$ και $y \leq x + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R}$, τότε $y \leq x$.

α'. Γράψτε την απόδειξη σε στρωτά μαθηματικά ελληνικά.

β'. Διατυπώστε την πρόταση σε τυπική γλώσσα και αποδείξτε ότι η άρνηση της πρότασης συνεπάγεται μία αντίφαση.

Άσκηση 5.2 Ορίστε m^n, για $m, n \in \mathbb{N}_0$, αναδρομικά με

$$m^0 = 1 \qquad \text{και} \qquad m^{n+1} = m^n m.$$

Θεωρώντας γνωστές τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, δείξτε, με κατάλληλα επαγωγικά επιχειρήματα, ότι

α'. $m^{n+r} = m^n m^r$

β'. $m^{nr} = (m^n)^r$

γ'. $(mn)^r = m^r n^r$

Άσκηση 5.3 Έστω $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \beta > 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^n.$$

Άσκηση 5.4 Δείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

α'. $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + ... + n)^2$

β'. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

Άσκηση 5.5 Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

α'. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n \cdot (n+1) = \dfrac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

β'. $q + q^2 + ... + q^n = q\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$, όπου $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$

Άσκηση 5.6 Για ποιους φυσικούς αριθμούς ισχύουν οι ανισότητες

α΄. $n < 2^n$

β΄. $n! > n$

γ΄. $2^n \geq n^3 + 1$

δ΄. $2n^2 < 3^{n-1}$

ε΄. $n! < \frac{(n+1)^n}{2}$