

Μτπχ πρόγραμμα: "Εφαρμοσμένα & Υπολογιστικά Μαθηματικά"

Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 1 (χ.ε. 2015/16)

2η σειρά ασκήσεων: Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ασκηση 1η

Εστω S είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι το S έχει μέτρο μηδέν.

Ασκηση 2η

Εστω ότι το σύνολο $S \subset \mathbf{R}$ έχει μέτρο μηδέν.

- Αποδείξτε ότι κάθε υποσύνολο του S έχει μέτρο μηδέν.
- Για δοθέν $x \in \mathbf{R}$, ορίζουμε $S+x = \{s+x : s \in S\}$. Δείξτε ότι το $S+x$ έχει μέτρο μηδέν.
- Για δοθέν πεπερασμένο $p > 0$ ορίζουμε $pS = \{ps : s \in S\}$. Δείξτε ότι το pS έχει μέτρο μηδέν.

Ασκηση 3η

Υποθέτουμε ότι $\{f_n\}$ και $\{g_n\}$ είναι αύξουσες ακολουθίες συναρτήσεων επί του διαστήματος I , και θέτουμε $u_n = \max(f_n, g_n)$. Δείξτε ότι αν $f_n \nearrow f$ σ.π. στο I και $g_n \nearrow g$ στο I , τότε $u_n \nearrow \max(f, g)$ σ.π. στο I .

Ασκηση 4η

Υποθέτουμε ότι η $\{f_n\} \subset L(I)$ ικανοποιεί $(\forall n) f_n(x) \geq 0$, σ.π. στο I , $f_n \rightarrow f$, και $(\exists A < \infty)$ τ.ω. $(\forall n) \int_I f_n dx \leq A$. Δείξτε ότι $f \in L(I)$ και $\int_I f dx \leq A$ (Λήμμα Fatou).

Ασκηση 5η

Προσδιορίστε, με απόδειξη, όλα τα $p \in \mathbf{R}$ για τα οποία το ολοκλήρωμα Lebesgue $\int_0^\infty x^p \sin(x^2) dx$ υπάρχει.

Άσκηση 6η

Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα ολοκληρώματα Lebesgue

$$\int_0^1 (x \ln x)^2 dx, \quad \int_0^1 \ln x \ln((1-x)^2) dx, \quad , \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\ln x} dx$$

υπάρχουν.

Άσκηση 7η

Προσδιορίστε το σύνολο $\mathcal{S}$ των τιμών $s \in \mathbf{R}$ για τις οποίες καθένα από τα παρακάτω ολοκληρώματα Lebesgue υπάρχουν για κάθε συνάρτηση $f \in L(I)$,

$$\int_0^1 f(x) \cos(2\pi s x) dx, \quad \int_0^\infty f(x) e^{sx} dx, \quad \int_0^\infty \frac{f(x)}{x^2 + s^2} dx.$$

Γιά κάθε $s \notin \mathcal{S}$, βρείτε μία φραγμένη συνεχή συνάρτηση f για την οποία τα ολοκληρώματα δεν υπάρχουν.

Άσκηση 8η

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, $f(0) = 0$ και $f'(0)$ υπάρχει. Αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) x^{-3/2} dx$ υπάρχει.

Άσκηση 9η

Υποθέτουμε ότι $f \in L([0, 1])$, και θέτουμε $g_n(x) := f(x) \sin(nx)$ για κάθε $n \in \mathbf{Z}$. Αποδείξτε ότι: (α) $g_n \in L([0, 1])$, και (β) $\int_0^1 g_n dx \rightarrow 0$, καθώς $|n| \rightarrow \infty$.

Άσκηση 10η

Εάν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο I , και η f' υπάρχει σ.π. στο I , δείξτε ότι η f' είναι μετρήσιμη στο I .

Παράδοση: μέχρι 15/12/2015