

Μπτχ πρόγραμμα: "Εφαρμοσμένα & Υπολογιστικά Μαθηματικά"

Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 1 (χ.ε. 2015/16)

1η σειρά ασκήσεων: Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes (α)

Άσκηση 1η

Αποδείξτε ότι εάν το όριο $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, f, \alpha)$ υπάρχει, τότε $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[a, b]$, και

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, f, \alpha) = \int_a^b f d\alpha .$$

Αποδείξτε επίσης ότι η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο $[a, b]$. Με χρήση αυτού του αποτελέσματος, υπολογίστε τα όρια

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right)$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} \right), \quad k \geq 0 ,$$

και αποδείξτε ότι τό όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{2} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n+1}}{n} \right)$$

είναι θετικός αριθμός.

Άσκηση 2η

Εάν f συνεχής στο $[0, 1]$, για $a, b > 0$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx .$$

Να υπολογίσετε επίσης το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx .$$

Άσκηση 3η

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και α αυστηρά αύξουσα στο $[a, b]$. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_a^x f(t) d\alpha(t) .$$

Να αποδείξετε ότι για $x \in [a, b]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{\alpha(x+h) - \alpha(x)} = f(x) .$$

Άσκηση 4η

(1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{if } x \in (0, 1] , \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $[0, 1]$, αλλά δεν είναι συνάρτηση φραγμένης μεταβολής.

(2) Για $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{x^\beta}\right) & \text{if } x \in (0, 1] , \\ 0 & \text{if } x = 0 . \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση φραγμένης μεταβολής εάν και μόνον εάν $\alpha > \beta$.

Άσκηση 5η

Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

(1) Εάν η f είναι συνάρτηση φραγμένης μεταβολής στο $[a, b]$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.

(2) Εάν η f είναι συνάρτηση φραγμένης μεταβολής στο $[a, b]$, τότε η $|f|^p$, $1 \leq p < +\infty$ είναι επίσης συνάρτηση φραγμένης μεταβολής στο $[a, b]$.

Άσκηση 6η

Υποθέτουμε ότι η α είναι συνάρτηση φραγμένης μεταβολής στο $[a, b]$, και ότι οι συναρτήσεις f_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann-Stieltjes ως προς την α επί του $[a, b]$. Αποδείξτε ότι εάν η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a, b]$ στην f , τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann-Stieltjes, και

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d\alpha(x) .$$

Παράδοση: μέχρι 30/10/2015