

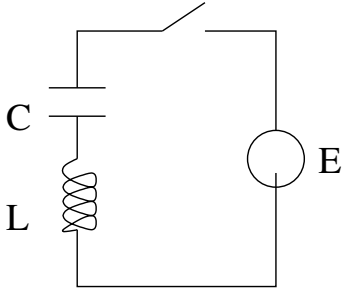
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Πρόβλημα 1 Έστω $(\tau_*, x_*(t) : t \leq \tau_*)$ η λύση του παρακάτω προβλήματος ελεύθερου τελικού χρόνου.

$$\min \int_0^\tau (x^2(t) + \dot{x}^2(t)) dt, \quad x(0) = 0, \quad x(\tau) = \tau^2 + 1, \quad \tau > 0.$$

Βρείτε μια (αλγεβρική) εξίσωση που ορίζει το τ_* και τη μορφή της λύσης x_* συναρτήσει του τ_* .

Πρόβλημα 2 Στο κύκλωμα του σχήματος ο πυκνωτής έχει αρχική τάση V_0 . Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι C και η εμπέδηση του πηνίου είναι L .



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνουμε το διακόπτη και για $t \geq 0$ η τάση της πηγής $E(t)$ μπορεί να καθορίζεται από εμάς με τον περιορισμό $|E(t)| < E_0$. Θέλουμε να ασκήσουμε τέτοιο έλεγχο ώστε να φέρουμε το σύστημα στον ελάχιστο δυνατό χρόνο στην κατάσταση όπου ο πυκνωτής είναι αποφορτισμένος και το κύκλωμα δεν διαρρέεται από ρεύμα.

α) Αποδείξτε ότι ο βέλτιστος έλεγχος είναι της μορφής bang-bang.

β) Σχεδιάστε την βέλτιστη τροχιά s' ένα διάγραμμα με άξονες την τάση του πυκνωτή V και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα I , αν $V_0 = 3E_0$.

γ) Υπολογίστε συναρτήσει των L, C τον ελάχιστο χρόνο.

Οι εξισώσεις του συστήματος είναι $I = CdV/dt$ και $E = LdI/dt + V$.

Πρόβλημα 3 Σε μια οικονομία υπάρχουν δύο τομείς, ο ν.1 που παράγει πλουτοπαραγωγικά αγαθά και ο ν.2 που παράγει καταναλωτικά αγαθά. Συμβολίζουμε με $x_i(t)$ το μέγεθος του τομέα i και με $u(t)$ (έλεγχος) το κλάσμα των επενδύσεων μας στον τομέα 1 ($0 \leq u(t) \leq 1$). Οι εξισώσεις του συστήματος είναι:

$$\dot{x}_1(t) = (\alpha u(t) - \beta)x_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \alpha(1 - u(t))x_1(t),$$

για κάποιες θετικές σταθερές α, β . Αρχικά $x_1(0) = w, x_2(0) = 0$. Για ένα δεδομένο χρονικό ορίζοντα T θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το

$$x_2(T) = \int_0^T \alpha(1 - u(t))x_1(t) dt.$$

Βρείτε τον (μοναδικό υποψήφιο) βέλτιστο έλεγχο και διερευνήστε ως προς τις τιμές των α, β .

Πρόβλημα 4 Θεωρήστε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού

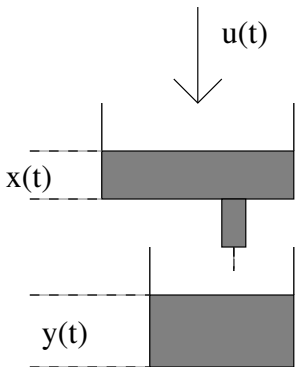
$$x^2(T) + \int_0^T u^2(t) dt,$$

όπου

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad \text{για όλα τα } t \in [0, T].$$

Υπολογίστε τη συνάρτηση αξίας και δείξτε ότι ικανοποιεί την αντίστοιχη εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman.

Πρόβλημα 5 Θεωρήστε το σύστημα δεξαμενών που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ορίζουμε $u(t)$ την παροχή νερού ($0 \leq u(t) \leq 1$), $x(t)$ το επίπεδο της στάθμης του νερού στο πάνω δοχείο και $y(t)$ το επίπεδο της στάθμης του νερού στο κάτω δοχείο. Οι εξισώσεις του συστήματος είναι

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

$$\dot{y}(t) = x(t).$$

Αρχικά $x(0) = y(0) = 0$.

α) Μεγιστοποιήστε τη στάθμη $y(1)$ αν $x(1) = 0, 5$.

β) Σχεδιάστε τα βέλτιστα μεγέθη.

γ) Βρείτε τη συνάρτηση αξίας και δείξτε ότι ικανοποιεί την αντίστοιχη εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman.