

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V

Άσκηση 1 Αν ρίξετε δυο ζάρια, ποια είναι η μέση τιμή και ποια η διασπορά του αθροίσματος των ενδείξεων;

Άσκηση 2 Στρίβουμε ένα νόμισμα 4 φορές και συμβολίζουμε με X το μήκος της μεγαλύτερης ακολουθίας από ίδια διαδοχικά αποτελέσματα. Ποια είναι η κατανομή της X ; Ποια είναι η μέση της τιμή και ποια η διασπορά της;

Άσκηση 3 Αν επαναλάβετε N φορές ένα πείραμα με πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{1}{N}$ και τα αποτελέσματα των πειραμάτων είναι ανεξάρτητα, ποια είναι η πιθανότητα το πείραμα να πετύχει τουλάχιστον μια φορά; Ποιό είναι το όριο καθώς $N \rightarrow \infty$;

Άσκηση 4 Σε μια παρτίδα πόκερ κάθε παίκτης παίρνει 5 φύλλα από τα 52 της τράπουλας. Αν ένας παίκτης δεν έχει πάρει άσο στις πρώτες δυο παρτίδες δικαιούται να παραπονιέται ότι είναι άτυχος; Πόσες παρτίδες πρέπει να παίξει κανείς ώστε η πιθανότητα να έχει πάρει τουλάχιστον έναν άσο να είναι μεγαλύτερη από $\frac{9}{10}$;

Άσκηση 5 Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός παρτίδων πόκερ που πρέπει να παίξει κανείς μέχρι να πάρει 4 άσους στο μοίρασμα; Πόσες παρτίδες πρέπει να παίξει κανείς ώστε η πιθανότητα να έχει πάρει τουλάχιστον μια φορά 4 άσους στο μοίρασμα να είναι μεγαλύτερη από $\frac{1}{2}$;

Άσκηση 6 Έστω X το πλήθος των εξάρων που φέρνουμε αν ρίξουμε 5400 ζαριές. Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της X ; Ποια είναι η διασπορά της;

Άσκηση 7 Η πιθανότητα μετάδοσης ενός λάθους ψηφίου σ' ένα κανάλι επικοινωνίας είναι 10^{-6} . Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να συμβούν 20 λάθη κατά τη μετάδοση ενός σήματος μήκους 10^7 ψηφίων;

Άσκηση 8 Αν οι αριστερόχειρες είναι περίπου το 1% του πληθυσμού, εκτιμήστε την πιθανότητα σε μια τάξη με 200 εγγεγραμμένους να έχουμε τουλάχιστον 3 αριστερόχειρες.

Άσκηση 9 Η πιθανότητα νίκης μας σε μια παρτίδα ενός παιχνιδιού είναι $\frac{1}{2}$. Πριν από κάθε παρτίδα έχουμε δικαίωμα να στοιχηματίσουμε ένα ποσό, το οποίο διπλασιάζεται αν κερδίσουμε την παρτίδα και χάνεται αν χάσουμε την παρτίδα. Ξεκινάμε στοιχηματίζοντας 1 στην πρώτη παρτίδα και κάθε φορά που χάνουμε διπλασιάζουμε το στοιχήμά μας ώσπου να κερδίσουμε μια παρτίδα. Έχουμε δει ότι με πιθανότητα 1 αυτό θα συμβεί σε πεπερασμένο πλήθος παρτίδων. Ποιο θα είναι το συνολικό μας κέρδος από την αρχή του παιχνιδιού μέχρι και την πρώτη μας νίκη; Αν η

τυχαία μεταβλητή K είναι το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι την πρώτη μας νίκη, ποια είναι η μέση τιμή της K ; Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια αρχική περιουσία $N = 2^n - 1$ οπότε δεν μπορούμε να αντέξουμε περισσότερες από n χαμένες παρτίδες. Ποια είναι η πιθανότητα να χάσουμε όλη μας την περιουσία πριν προλάβουμε να κερδίσουμε κάποια παρτίδα; Έστω K_n το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι είτε να σημειώσουμε μια νίκη, είτε να μας τελειώσει η περιουσία, δηλαδή $K_n = \min\{K, n\}$. Ποια είναι η κατανομή του κέρδους μας U_n μέχρι τη στιγμή K_n ; Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή του U_n ;

Άσκηση 10 Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι ώστε να εμφανιστούν και οι έξι όψεις του;