

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΙΙ**  
**ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009**

Εξετάσεις Ιουνίου- Τετάρτη 2/6

**Διάρκεια 3 ώρες**

**Άσκηση 1** (3 μονάδες)

Θεωρήστε ένα σήμα  $x(\cdot)$  και ας συμβολίζουμε με  $\hat{x}(\cdot)$  την απόκριση στο  $x$  ενός γραμμικού και χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(\xi) = i \operatorname{sgn}(\xi).$$

α) Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος  $s(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{x} \sin(2\pi f_c t)$ .

β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της  $\hat{s}(\xi)$  στην περίπτωση που  $\hat{x}(\xi) = A \left(1 - \frac{|\xi|}{W}\right)^+$  με  $W \ll f_c$ .

γ) Αν το  $x(\cdot)$  είναι η πληροφορία που θέλουμε να μεταδώσουμε, τι πλεονεκτήματα βλέπετε να παρουσιάζει η μετάδοση του σήματος  $s(\cdot)$  σε σχέση με τη μετάδοση ενός σήματος στην ίδια φέρουσα συχνότητα διαμορφωμένου κατά πλάτος από τη  $x(\cdot)$  με καταπιεσμένο φέρον;

**Άσκηση 2** (3 μονάδες)

Θεωρήστε μια στάσιμη υπό την ευρεία έννοια διαδικασία  $X(\cdot)$  με μέση τιμή μηδέν και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_X(\tau)$ , και μια τυχαία μεταβλητή  $\Theta$  ομοιόμορφα κατανομημένη στο  $[0, 2\pi]$  και ανεξάρτητη από την  $X$ .

α) Δείξτε ότι η διαδικασία  $Y(t) = X(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta)$  είναι στάσιμη υπό την ευρεία έννοια και υπολογίστε τη μέση της τιμή και την συνάρτηση αυτοσυσχέτισής της.

β) Αν η  $X$  είναι μια ανέλιξη Gauss ισχύει το ίδιο και για την  $Y$ ;

γ) Αν η  $X$  είναι μια ανέλιξη Gauss και  $R_X(\tau) = A \operatorname{sinc}(W\tau)$  υπολογίστε την πυκνότητα φάσματος ισχύος και τη συνολική ισχύ της διαδικασίας  $Z(t) = Y^2(t)$ .

**Άσκηση 3** (4 μονάδες)

Δύο αντίστασεις  $R_1, R_2$  και ένας πυκνωτής χωρητικότητας  $C$  συνδέονται όπως στο διπλανό σχήμα.

α) Δείξτε ότι η έξοδος  $y(t)$  ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$R_1 R_2 C \dot{y}(t) + (R_1 + R_2)y(t) = R_2 X(t) + R_1 n(t)$$

όπου  $X(t), n(t)$  είναι τα σήματα τάσης που φαίνονται στο σχήμα.

β) Δείξτε ότι μπορούμε να γράψουμε την τάση εξόδου ως

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t),$$

όπου η  $y_1$  ικανοποιεί την εξίσωση

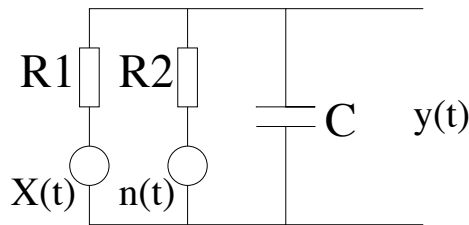
$$R_1 C \dot{y}_1(t) + \frac{R_1 + R_2}{R_2} y_1(t) = X(t)$$

και η  $y_2$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$R_2 C \dot{y}_2(t) + \frac{R_1 + R_2}{R_1} y_2(t) = n(t).$$

γ) Θεωρήστε τώρα ότι  $X(t) = A \cos(2\pi f t)$  ενώ η  $n$  είναι λευκός θόρυβος Gauss με πυκνότητα φάσματος ισχύος  $\frac{N_0}{2}$ . Υπολογίστε την  $y_1$  και δείξτε ότι η  $y_2$  είναι μια στάσιμη ανέλιξη Gauss.

δ) Αν θεωρήσουμε την  $y_1$  ως το σήμα εξόδου και την  $y_2$  ως θόρυβο εξόδου ποιος είναι ο σηματοθρομβικός λόγος στην έξοδο;



**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**