ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ Ι
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2006

Το υπόδειγμα του Vasicek: Το υπόδειγμα του Black για την τιμολόγηση παραγώγων του επιτοκίου είναι απλό και ευρέως χρησιμοποιούμενο. Ένα βασικό του μειονέκτημα όμως είναι ότι δεν μοντελοποιεί την δυναμική του επιτοκίου παρά μόνο την κατανομή του κάποια μελλοντική στιγμή. Συνεπώς μπορεί μόνο να χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση παραγώγων ευρωπαϊκού τύπου. Το υπόδειγμα του Vasicek, όπως και υποδείγματα διωνυμικών δέντρων που εξετάσαμε πριν, μοντελοποιεί την εξέλιξη στο χρόνο των επιτοκίων. Μπορεί συνεπώς να χρησιμοποιηθεί και για την τιμολόγηση παραγώγων που η αξία τους εξαρτάται από την τροχιά των επιτοκίων.

Η κεντρική υπόθεσή του είναι ότι το στιγμιαίο επιτόκιο ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση Ornstein-Uhlenbeck:

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma d\beta(t), \tag{1}$$

όπου οι α, μ, σ είναι θετικές σταθερές, ενώ η $\beta(\cdot)$ είναι ανέλιξη Wiener κάτω από το αδιάφορο κινδύνου μέτρο $\mathbb{Q}$. Με μια πρώτη ματιά βλέπει κανείς ότι ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της (1) τείνει να επαναφέρει την $r(\cdot)$ στην τιμή μ. Η λύση της εξίσωσης χωρίς τον θόρυβο ($\sigma = 0$) με αρχική συνθήκη $r(0) = r_0$ θα ήταν

$$r_D(r_0; t) = r_0 e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}).$$

Ο υπερτιθέμενος λευκός θόρυβος περιμένουμε να δημιουργήσει διακυμάνσεις γύρω από αυτήν την λύση. Και η στοχαστική διαφορική εξίσωση (1) όμως μπορεί να λυθεί ακριβώς. Από τον κανόνα του Itô:

$$d(e^{\alpha t} r(t)) = e^{\alpha t}(\alpha r(t)dt + dr(t)) = \mu\alpha e^{\alpha t}dt + \sigma e^{\alpha t} d\beta(t).$$

Επομένως

$$r(t) = r_0 e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} d\beta(s) = r_D(r_0; t) + \sigma Z_t, \tag{2}$$

όπου

$$Z_t := e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} d\beta(s).$$

Η $Z.$ είναι ανέλιξη Gauss (γιατί;) Επομένως όλες οι πολυδιάστατες κατανομές της καθορίζονται από τις μέσες τιμές και τις συνδιακυμάνσεις των τιμών της. Φυσικά $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_t] = 0$ (γιατί;), ενώ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_t Z_s] &= e^{-\alpha(t+s)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^t e^{\alpha p} d\beta(p)\int_0^s e^{\alpha q} d\beta(q)\right] \\
&= e^{-\alpha(t+s)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\int_0^{t\wedge s} e^{\alpha p} d\beta(p))^2\right] \\
&= e^{-\alpha(t+s)}\int_0^{t\wedge s} e^{2\alpha p} dp \\
&= \frac{e^{-\alpha|t-s|} - e^{-\alpha(t+s)}}{2\alpha}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Ειδικώτερα,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_t^2] = \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha},$$

και άρα

$$r(t) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} N\left(r_D(r_0; t), \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right).$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την (2) στο διάστημα $[0,T]$ λαμβάνουμε:

$$\int_0^T r(t)dt = \int_0^T r_D(r_0;t)dt + \sigma \int_0^T Z_t dt.$$

Επειδή τώρα η $Z.$ είναι ανέλιξη Gauss, ο τελευταίος όρος της παραπάνω σχέσης θα ακολουθεί κανονική κατανομή. Μάλιστα και το διάνυσμα $(Z_T, \int_0^T Z_t dt) \in \mathbb{R}^2$ θα ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή. Από το θεώρημα του Fubini η αναμενόμενη τιμή του $\int_0^T Z_t dt$ είναι μηδέν ενώ τη διασπορά του μπορούμε να την υπολογίσουμε ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\int_0^T Z_s ds)^2\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\int_0^T Z_s ds)(\int_0^T Z_t dt)\right] \\
&= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_t Z_s] ds dt = 2\int_0^T \int_0^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_t Z_s] ds dt \\
&= 2\int_0^T \int_0^t e^{-\alpha t}\frac{e^{\alpha s} - e^{-\alpha s}}{2\alpha} ds dt = \int_0^T \eta(t)^2 dt,
\end{aligned}$$

όπου

$$\eta(t) := \frac{1 - e^{-\alpha s}}{\alpha}.$$

Στη δεύτερη ισότητα παραπάνω έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα του Fubini. Μπορούμε να το κάνουμε αφού

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[|Z_t Z_s|] \le \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_t^2]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_s^2]\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

Επομένως,

$$\int_0^T r(t)dt \overset{\mathbb{Q}}{\sim} N\left(\int_0^T r_D(r_0;t)\ dt, \sigma^2 \int_0^T \eta^2(s)ds\right).$$

Συνεπώς μπορούμε να τιμολογήσουμε ομόλογα χωρίς τοκομερίδια εύκολα:

$$B(0,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}\right] = e^{-\int_0^T r_D(r_0;t)\ dt + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^T \eta(s)^2 ds}.$$

με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία του ομολόγου τη στιγμή t :

$$B(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\middle| \mathcal{F}_t\right] = e^{-\int_0^{T-t} r_D(r(t);s)\ ds + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^{T-t} \eta(s)^2 ds}.$$

Ενθυμούμενοι τη μορφή της λύσης $r_D(r_0,t)$ της ντετερμινιστικής εξίσωσης μπορούμε να ξαναγράψουμε την προηγούμενη σχέση ως:

$$B(t,T) = e^{-\eta(T-t)r(t) - \mu\alpha \int_0^{T-t} \eta(s)ds + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^{T-t} \eta(s)^2 ds}. \tag{4}$$

Ο μόνος στοχαστικός όρος στον εκθέτη είναι ο $r(t)$ που έχει κανονική κατανομή κάτω από το $\mathbb{Q}$, συνεπώς η κατανομή της $B(t,T)$ κάτω από το $\mathbb{Q}$ είναι λογ. κανονική.

Θα θέλαμε τώρα να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς ενός ομολόγου όψεως L και ωρίμανσης T. Η ωρίμανση του δικαιώματος αγοράς είναι τη στιγμή $t < T$ ενώ η παραδοτέα τιμή είναι K. Η απόδοση του δικαιώματος στην ωρίμανσή του είναι βέβαια $V_t = (LB(t,T) - K)^+$. Η αρχική του αξία θα είναι λοιπόν:

$$V_0 = B(0,t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}[(LB(t,T) - K)^+], \tag{5}$$

όπου το $\mathbb{Q}_*$ είναι το μέτρο που αντιστοιχεί στη χρήση της $B(\cdot,t)$ ως numeraire. Γνωρίζουμε μάλιστα πώς να υπολογίζουμε $\mathbb{Q}_*$-αναμενόμενες τιμές:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}[X] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^t r(s)ds}X\right]}{B(0,t)}.$$

Στα πλαίσια του υποδείγματος του Black η βασική *υπόθεση* που κάναμε για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή στην (5) είναι ότι η κατανομή της $B(t,T)$ κάτω από το $\mathbb{Q}_*$ είναι λογαριθμική κανονική. Τούτο μπορεί να δειχθεί στα πλαίσια του υποδείγματος του Vasicek. Πράγματι, για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}\left[e^{\lambda r(t)}\right] = \frac{1}{B(0,t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda r(t)-\int_0^t r(s)ds}\right]$$

Όπως είδαμε όμως η κατανομή (κάτω από το $\mathbb{Q}$) του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X} = (r(t), \int_0^t r(s)ds)$ είναι 2-διάστατη κανονική. Η μέση του τιμή $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^2$ και ο πίνακας διασποράς του $\mathbf{D}$ μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από τις (2) και (3). Συνεπώς για οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ οι εκθετικές ροπές του $\mathbf{X}$ δίνονται από την σχέση:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\mathbf{u}\cdot\mathbf{X}}\right] = e^{\mathbf{u}\cdot\mathbf{M}+\frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}\mathbf{u}}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda r(t)-\int_0^t r(s)ds}\right] &= e^{\frac{\lambda^2}{2}\mathbf{D}_{11}+\lambda(\mathbf{M}_1-\mathbf{D}_{12})}e^{-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\int_0^t r(s)ds]+Var^{\mathbb{Q}}[\int_0^t r(s)ds]} \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{2}\mathbf{D}_{11}+\lambda(\mathbf{M}_1-\mathbf{D}_{12})}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^t r(s)ds}\right] \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{2}\mathbf{D}_{11}+\lambda(\mathbf{M}_1-\mathbf{D}_{12})}B(0,t).\end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}\left[e^{\lambda r(t)}\right] = e^{\frac{\lambda^2}{2}\mathbf{D}_{11}+\lambda(\mathbf{M}_1-\mathbf{D}_{12})},$$

και άρα η κατανομή κάτω από το $\mathbb{Q}_*$ της $r(t)$ είναι κανονική με μέση τιμή $\mathbf{M}_1 - \mathbf{D}_{12}$ και διασπορά

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}_*}[r(t)] = \mathrm{Var}_{\mathbb{Q}}[r(t)] = \mathbf{D}_{11} = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha t}).$$

Από την (4) βλέπουμε ότι και κάτω από το $\mathbb{Q}_*$ η αξία του ομολόγου $B(t,T)$ ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή και άρα η (5) γίνεται:

$$\begin{aligned}V_0 &= LB(0,t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}[(B(t,T)-K/L)^+] \\ &= LB(0,t)\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}[B(t,T)]N(d_1)-\frac{K}{L}N(d_2)\right) \\ &= LB(0,T)N(d_1)-KB(0,t)N(d_2), \end{aligned} \tag{6}$$

όπου

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}[B(t,T)]}{K/L}\right) \pm \frac{1}{2}\eta^2(T-t)\mathbf{D}_{11}}{\eta(T-t)\mathbf{D}_{11}^{1/2}} = \frac{\ln\left(\frac{LB(0,T)}{KB(0,t)}\right) \pm \frac{1}{2}\eta^2(T-t)\mathbf{D}_{11}}{\eta(T-t)\mathbf{D}_{11}^{1/2}}. \tag{7}$$

Το υπόδειγμα των Hull&White: Συγκρίνοντας την τιμή του δικαιώματος αγοράς του ομολόγου που λαμβάνουμε από το υπόδειγμα του Vasicek με αυτήν που λαμβάνουμε από το υπόδειγμα του Black φαίνεται ότι συμφωνούν αν στο μοντέλο του Black θέσουμε τη διασπορά της $\ln B(t,T)$ ίση με $\eta^2(T-t)\mathbf{D}_{11}$. Προσοχή όμως! Ενώ στο μοντέλο του Black οι τιμές των ομολόγων ($B(0,t)$ και $B(0,T)$)

που χρησιμοποιούμε είναι οι παρατηρούμενες τιμές τους, στο μοντέλο του Vasicek είναι εκείνες που υπολογίζονται από την (5) και ενδεχομένως διαφορετικές από τις παρατηρούμενες. Οι Hull και White πρότειναν μια τροποποίηση του υποδείγματος του Vasicek ώστε οι τιμές των ομολόγων όπως υπολογίζονται από το μοντέλο να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες παρατηρούμενες.

Συγκεκριμένα, αν η τιμή μ προς την οποία " έλκεται " το στιγμιαίο επιτόκιο δεν είναι σταθερή, αλλά μια μη στοχαστική συνάρτηση του χρόνου, όλοι οι υπολογισμοί που κάναμε στο υπόδειγμα του Vasicek μπορούν να γίνουν με τον ίδιο ουσιαστικά τρόπο. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι το στιγμιαίο επιτόκιο ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dr(t) = \alpha(\mu(t) - r(t))dt + \sigma d\beta(t), \tag{8}$$

όπου οι α, σ είναι θετικές σταθερές, η $\mu(\cdot)$ είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου, ενώ η $\beta(\cdot)$ είναι ανέλιξη Wiener κάτω από το αδιάφορο κινδύνου μέτρο $\mathbb{Q}$, τότε όπως θα εξακριβώσετε επαναλαμβάνοντας τους προηγούμενους υπολογισμούς:

$$B(0,T) = \exp\left(-\eta(T)r_0 - \alpha\int_0^T e^{-\alpha t}\int_0^t \mu(s)e^{\alpha s}ds\; dt + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds\right).$$

Εναλλάσσοντας την σειρά ολοκλήρωσης στο διπλό ολοκλήρωμα και παίρνοντας το λογάριθμο των δύο μελών της μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση ως εξής:

$$\ln B(0,T) = \left(-\eta(T)r_0 - \alpha\int_0^T \mu(s)\eta(T-s)ds + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds\right). \tag{9}$$

Ως εδώ δεν έχουμε επιλέξει τη μορφή της συνάρτησης $\mu(\cdot)$. Θα προσπαθήσουμε να το κάνουμε τώρα με τέτοιο τρόπο ώστε να *προσαρμόσουμε* το αποτέλεσμα της (9) στις παρατηρούμενες τιμές των ομολόγων. Πιο συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $B(0,\cdot)$ είναι μια γνωστή (ομαλή) συνάρτηση (η παρατηρούμενη τιμή των ομολόγων) και θα προσπαθήσουμε να επιλέξουμε τη συνάρτηση $\mu(\cdot)$ ώστε η (9) να ικανοποιείται για κάθε $T \geq 0$. Ειπωμένο διαφορετικά, θα προσπαθήσουμε να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση (9) ως προς μ.

Παρατηρήστε ότι η άγνωστη συνάρτηση μ εμφανίζεται στην παραπάνω εξίσωση μέσω της συνέλιξής της με τη συνάρτηση η. Εφαρμόζοντας λοπόν τον μετασχηματισμό Laplace στα δυο μέλη της εξίσωσης και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι η συνέλιξη δύο συναρτήσεων μετασχηματίζεται στο γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων θα πάρουμε μια αλγεβρική εξίσωση για την $\hat{\mu}$ την οποία μπορούμε εύκολα να λύσουμε. Αν μπορέσουμε έχοντας πια υπολογίσει την $\hat{\mu}$ να αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό Laplace θα έχουμε λύσει την εξίσωση. Πιο συγκεκριμένα,

$$\left(\int_0^{\cdot} \mu(s)\eta(\cdot - s)ds\right)\hat{}\,(u) = \hat{\mu}(u)\hat{\eta}(u),$$

$$\hat{\eta}(u) = \int_0^\infty e^{-ut}\eta(t)dt = \int_0^\infty e^{-ut}\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}dt = \frac{1}{u(\alpha+u)},$$

$$\left(\int_0^{\cdot} \eta^2(s)ds\right)\hat{}\,(u) = \frac{1}{u}(\eta^2)\hat{}\,(u) = \frac{2}{u^2(\alpha+u)(2\alpha+u)}.$$

Αν ορίσουμε λοιπόν $g(t) = -\ln B(0,t)$ και εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Laplace στην εξίσωση (9) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} -\hat{g}(u) &= -r_0\hat{\eta}(u) - \alpha\hat{\mu}(u)\hat{\eta}(u) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\int_0^{\cdot} \eta^2(s)ds\right)\hat{}\,(u) \\ &= -\frac{r_0}{u(\alpha+u)} - \alpha\frac{\hat{\mu}(u)}{u(\alpha+u)} + \frac{\sigma^2}{u^2(\alpha+u)(2\alpha+u)}. \end{aligned}$$

Επιλύοντας ως προς $\hat{\mu}$ έχουμε λοιπόν:

$$\alpha\hat{\mu}(u) = -r_0 + u(\alpha+u)\hat{g}(u) + \frac{\sigma^2}{u(2\alpha+u)}.$$

Απομένει τώρα να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\sigma^2}{u(2\alpha+u)} = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{2\alpha+u}\right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\widehat{\left(1-e^{-2\alpha\cdot}\right)}(u),$$

ενώ παρατηρώντας ότι $g(0) = 0$ και $g^{'}(0) = r_0$ έχουμε:

$$-r_0 + u(\alpha+u)\hat{g}(u) = (-g^{'}(0) - g(0)u + u^2\hat{g}(u)) + \alpha(-g(0) + u\hat{g}(u)) = \widehat{\left(g^{''} + \alpha g^{'}\right)}(u).$$

Συνεπώς,

$$\alpha\mu(t) = g^{''}(t) + \alpha g^{'}(t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1-e^{-2\alpha t}\right).$$

Με τον ίδιο τρόπο που κάναμε την τιμολόγηση δικαιωμάτων αγοράς ομολόγων κατά το υπόδειγμα του Vasicek μπορούμε να κάνουμε την τιμολόγηση και κατά το υπόδειγμα των Hull & White. Μάλιστα η τιμή του δικαιώματος αγοράς ενός ομολόγου όψεως L και ωρίμανσης T, με παραδοτέα τιμή K και ωρίμανση (του δικαιώματος) t δίνεται ακριβώς από τις σχέσεις (6) και (7). Μόνο που τώρα η θεωρητική τιμή που αποδίδει το υπόδειγμα στα ομόλογα (δηλαδή τα $B(0,t)$ και $B(0,T)$) λόγω της προσαρμογής ταυτίζεται με την παρατηρούμενη τιμή τους.

Το να τιμολογήσουμε ομόλογα με σταθερά τοκομερίδια είναι εξίσου εύκολο, αφού αυτά μπορούν να θεωρηθούν σαν μια σειρά από ομόλογα χωρίς τοκομερίδια. Τέλος ειναι δυνατόν να τιμολογήσουμε caps και floors στα πλαίσια του υποδείγματος, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η αξία ενός caplet στην ωρίμανσή του t είναι:

$$V_t = L \times (T-t)\left(r(t,T) - R\right)^+ B(t,T) = L\left[1 - B(t,T)(1 + R\times(T-t))\right]^+,$$

Συνεπώς η τιμολόγηση ενός caplet ανάγεται στην τιμολόγηση ενός δικαιώματος πώλησης ομολόγου όψεως $(1 + R\times(T-t))$ και ωρίμανσης T. Κατ΄ αντιστοιχία η τιμολόγηση ενός floorlet ανάγεται στην τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς ομολόγου.