ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ Ι

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2006

Κεφάλαιο 2ο

Υποδείγματα αγορών μιας περιόδου

Θα αρχίσουμε τώρα να κάνουμε υποθέσεις για τη δυναμική των πρωτογενών προϊόντων και θα ερευνήσουμε αν με αυτές τις επιπλέον υποθέσεις μπορούμε να εξάγουμε ακριβέστερα συμπεράσματα για την τιμολόγηση παραγώγων βάσει της αρχής της μη επιτηδειότητας. Σκοπός μας είναι να φτάσουμε στην ανάλυση υποδειγμάτων που θεωρούνται ρεαλιστικά για τις πραγματικές αγορές. Θα φτάσουμε σε αυτόν βήμα βήμα ξεκινώντας από ένα πολύ απλό υπόδειγμα που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια σαν δομικό στοιχείο για την κατασκευή πιο σύνθετων.

1. Το διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου

Κάθε ρεαλιστικό υπόδειγμα θα πρέπει να ενέχει μια τυχαιότητα ως προς την χρονική εξέλιξη της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος και να λαμβάνει υπ΄ όψιν την μεταβολή της αξίας του χρήματος με το χρόνο. Το διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου έχει αυτά τα χαρακτηριστικά στην απλούστερη δυνατή μορφή. Η αγορά μας θα αποτελείται μόνο από το πρωτογενές προϊόν και ένα ομόλογο. Η τρέχουσα τιμή του προϊόντος θα είναι $S_0 = s_0$ και μας ενδιαφέρει μόνο μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή T. Η S_T θα είναι μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να λάβει μόνο δύο τιμές: την τιμή s_1 με πιθανότητα p $(0 < p < 1)$ ή την τιμή s_2 με πιθανότητα $1-p$. Χωρίς βλάβη ας υποθέσουμε ότι $s_1 > s_2$. Είναι εύκολο να δείτε ότι η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει κάποιους περιορισμούς στις τιμές που μπορεί να πάρει η S_T. Συγκεκριμένα,

$$s_2 < s_0 e^{rT} < s_1. \tag{1}$$

Η αρχική αξία του ομολόγου θα είναι e^{-rT} ενώ η αξία του στο χρόνο T θα είναι 1.

Η απόδοση $f(S_T)$ ενός ευρωπαϊκού παραγώγου επί αυτού του προϊόντος με χρόνο ωρίμανσης T θα είναι κι αυτή μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές: $f_1 = f(s_1)$ με πιθανότητα p και $f_2 = f(s_2)$ με πιθανότητα $1-p$. Θα θέλαμε να τιμολογήσουμε ένα τέτοιο παράγωγο. Μια απλοϊκή προσέγγιση θα ήταν να το τιμολογήσουμε όσο είναι η σημερινή αξία της αναμενόμενης απόδοσής του στην ωρίμανση. Δηλαδή,

$$A_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^p[f(S_T)] := e^{-rT}(pf_1 + (1-p)f_2). \tag{2}$$

Κάτι τέτοιο όμως μπορεί να επιτρέψει στρατηγικές επιτηδειότητας, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα: Έστω $s_0 = \$80,\ s_1 = \$100,\ s_2 = \$70,\ p = \frac{1}{2},\ r = 0$. Η αξία που θα δίνει ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού σε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς στην τιμή \$90 (με απόδοση $f_1 = \$(100-90)^+ = \$10,\ f_2 = \$(70-90)^+ = 0$) είναι $A_0 = \frac{1}{2}\$10 + \frac{1}{2}0 = \$5$. Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μια στρατηγική επιτηδειότητας αν η τιμή διαπραγμάτευσης αυτού του παραγώγου στην αγορά ήταν \$5. Φτιάχνουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από αρνητική θέση σε 3 παράγωγα, θετική θέση στο προϊόν και δανεισμό (αρνητική θέση στο ομόλογο) \$65. Η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου είναι: $-3 \times \$5 + \$80 - \$65 = 0$. Αν στο χρόνο T το προϊόν πάρει την τιμή $s_1 = \$100$ η αξία του χαρτοφυλακίου μας θα είναι: $-3 \times \$10 + \$100 - \$65 = \$5$. Αν πάλι το προϊόν πάρει την τιμή $s_2 = \$70$ τότε η αξία του χαρτοφυλακίου μας θα είναι: $-3 \times 0 + \$70 - \$65 = \$5$. Έχουμε δηλαδή κέρδος \$5 χωρίς κίνδυνο! Αυτό συμβαίνει γιατί όπως θα δούμε η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει μια τιμή για κάθε παράγωγο στα πλαίσια του διωνυμικού υποδείγματος που στο παράδειγμά μας δεν είναι \$5. Στο τέλος αυτής της διάλεξης θα ξέρουμε πώς να υπολογίσουμε την θεωρητικά δίκαιη αυτή τιμή και πώς να κατασκευάσουμε μια στρατηγική επιτηδειότητας αν η τιμή διαπραγμάτευσης είναι διαφορετική.

Για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο με απόδοση f θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από ϕ μέρη του πρωτογενούς προϊόντος και ψ ομόλογα έτσι ώστε η αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο T να ταυτίζεται με την αξία του παραγώγου, ανεξάρτητα με το ποιά είναι η τιμή της (τυχαίας μεταβλητής) S_T. Δηλαδή, $\phi S_T + \psi = f(S_T)$. Στο διωνυμικό υπόδειγμα που μελετάμε αυτό ισοδυναμεί με το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} \phi s_1 + \psi &= f_1 \\ \phi s_2 + \psi &= f_2. \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό μπορεί πάντα (για κάθε (f_1, f_2)) να λυθεί και η λύση του δίνεται από τις:

$$\phi = \frac{f_1 - f_2}{s_1 - s_2}, \qquad \psi = \frac{s_1 f_2 - s_2 f_1}{s_1 - s_2}. \tag{3}$$

Αφού το χαρτοφυλάκιο αυτό έχει την ίδια αξία με το παράγωγο στο χρόνο T, από την αρχή της μη επιτηδειότητας θα πρέπει να έχουν και την ίδια αρχική αξία. Επομένως η θεωρητικά δίκαιη τιμή του παραγώγου είναι:

$$f_0 = \phi s_0 + \psi e^{-rT},$$

και αντικαθιστώντας τα ϕ, ψ από την (3) παίρνουμε:

$$f_0 = e^{-rT}\left(q f_1 + (1-q) f_2\right) = e^{-rT}\mathbb{E}^q[f(S_T)], \tag{4}$$

όπου

$$q = \frac{e^{rT} s_0 - s_2}{s_1 - s_2}. \tag{5}$$

Εδώ αξίζει να κάνουμε μερικές σημαντικές παρατηρήσεις:

1. Από την (1) που είναι συνέπεια της αρχής της μη επιτηδειότητας έχουμε ότι $0 < q < 1$.

2. Αξίζει να προσέξουμε την ομοιότητα της (4) με την (2). Η δίκαιη αρχική αξία του παραγώγου είναι μεν η σημερινή αξία της αναμενόμενης απόδοσής του, αυτή η αναμενόμενη απόδοση όμως πρέπει να υπολογιστεί ως προς το μέτρο που αποδίδει πιθανότητα q στο ενδεχόμενο το πρωτογενές προϊόν να πάρει την τιμή s_1, και $1 - q$ στο ενδεχόμενο το πρωτογενές προϊόν να πάρει την τιμή s_2. Όπως φαίνεται δε από την (5) το q αυτό **είναι ανεξάρτητο** από την πιθανότητα p που το μοντέλο μας αποδίδει στο ενδεχόμενο το πρωτογενές προϊόν να πάρει την τιμή s_1.

3. Το ίδιο το πρωτογενές προϊόν μπορεί να εκληφθεί σαν παράγωγο με συνάρτηση απόδοσης $f(S_T) = S_T$. Εφαρμόζοντας την (4) σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι

   $$S_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^q[S_T]. \tag{6}$$

   Είναι εύκολο να δείτε ότι η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την (5) και ορίζει επομένως το μέτρο πιθανότητας ως προς το οποίο υπολογίζεται η αναμενόμενη τιμή στην (4). Η ιδιότητα αυτή διέπει όλα τα υποδείγματα που θα μελετήσουμε και είναι το σημείο αφετηρίας της σύγχρονης προσέγγισης στην τιμολόγηση παραγώγων. Θα καλούμε τα μέτρα πιθανότητας που ικανοποιούν την (6) *αδιάφορα κινδύνου* (risk-neutral).

Συνοψίζοντας όσα είδαμε στα πλαίσια του διωνυμικού υποδείγματος μιας περιόδου έχουμε:

- Κάθε παράγωγο μπορεί να τιμολογηθεί βάσει της αρχής της μη επιτηδειότητας. Όταν συμβαίνει αυτό λέμε ότι η αγορά που περιγράφεται από το υπόδειγμά μας είναι *πλήρης*.
- Υπάρχει ένα μοναδικό q τέτοιο ώστε $0 < q < 1$ και για το οποίο ισχύει η (6).
- Έχοντας υπολογίσει αυτό το q, η θεωρητικά δίκαιη τιμή ενός παραγώγου δίνεται από την (4).

Ας δούμε τέλος πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μια στρατηγική επιτηδειότητας αν η τιμή διαπραγμάτευσης ενός παραγώγου F_0 είναι διαφορετική από την θεωρητικά δίκαιη f_0. Συνθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο X που αποτελείται από το παράγωγο, αρνητική θέση στο παράλληλο χαρτοφυλάκιο που το αναπαράγει και μετρητά $f_0 - F_0$. Η αρχική αξία του X είναι μηδενική. Από την κατασκευή του παράλληλου χαρτοφυλακίου όμως η αξία του X στο χρόνο T θα είναι

$$V_T(X) = f(S_T) - f(S_T) + (f_0 - F_0)e^{rT} = (f_0 - F_0)e^{rT}$$

Παίρνοντας θετική ή αρνητική θέση στο X ανάλογα αν η f_0 είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της F_0 έχουμε μια στρατηγική επιτηδειότητας.

Το χαρακτηριστικό του χαρτοφυλακίου του προηγούμενου παραδείγματος είναι ότι αν και περιέχει το παράγωγο, η απόδοσή του δεν εξαρτάται από την έκβαση της τιμής του προϊόντος με κίνδυνο. Μια τέτοια στρατηγική ονομάζεται *αντιστάθμιση* του κινδύνου (hedging) και το χαρτοφυλάκιο που την υλοποιεί αντισταθμιστικό.

2. Το υπόδειγμα Arrow-Debreu

Στο γενικότερο υπόδειγμα μιας περιόδου θα θεωρήσουμε N προϊόντα, εκ των οποίων το πρώτο θα είναι πάντα ένα ομόλογο. Η αρχικές τιμές των προϊόντων θα περιγράφονται από ένα διάνυσμα $p \in \mathbb{R}^N$: $p^\top = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$, όπου $p_\alpha = S_\alpha(0)$ είναι η αρχική αξία του προϊόντος α για $\alpha = 1, \ldots, N$. Και πάλι μας ενδιαφέρει μόνο μια μεταγενέστερη στιγμή T στην οποία η αγορά μας μπορεί να βρεθεί σε M δυνατές καταστάσεις. Οι καταστάσεις αυτές περιγράφονται από ένα $N \times M$ πίνακα D. Κάθε μια από τις M στήλες του D περιγράφει τις τιμές των N προϊόντων στην αντίστοιχη κατάσταση. Έτσι,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \ldots & D_{NM} \end{pmatrix}$$

όπου $D_k^\top = (D_{1k}, D_{2k}, \ldots, D_{Nk})$ είναι οι τιμές των N προϊόντων στην κατάσταση k. Επειδή η τελική αξία του ομολόγου είναι 1 σε όλες τις τελικές καταστάσεις και η αρχική του αξία είναι e^{-rT}, έχουμε πάντοτε: $D_{1k} = 1$ για κάθε $k = 1, \ldots, M$ και $p_1 = e^{-rT}$.

Μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητα $\pi_k > 0, k = 1, \ldots, M$ στο ενδεχόμενο η αγορά μας να βρεθεί στην k-οστή κατάσταση στο χρόνο T, οπότε η αξία των προϊόντων $S(T)$ θα είναι ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^N$ που παίρνει την τιμή D_k με πιθανότητα π_k.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι μπορούμε να πάρουμε θετική ή αρνητική θέση σε κάθε προϊόν της αγοράς χωρίς περιορισμούς ως προς το μέγεθος της θέσης. Έτσι, ένα χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από ένα διάνυσμα $\theta \in \mathbb{R}^N$ τα στοιχεία του οποίου είναι η θέση μας σε κάθε προϊόν. Η αρχική αξία ενός χαρτοφυλακίου θ είναι επομένως $\theta \cdot S(0) = \sum_\alpha \theta_\alpha p_\alpha$, ενώ η αξία του στο χρόνο T ($=\theta \cdot S(T)$) είναι μια τυχαία μεταβλητή: στο ενδεχόμενο που το σύστημα θα βρεθεί στο χρόνο T στην κατάσταση k ($k = 1, \ldots, M$) η αξια του χαρτοφυλακίου θ είναι $(D^\top \theta)_k := \sum_\alpha \theta_\alpha D_{\alpha k}$.

Για παράδειγμα στο διωνυμκό υπόδειγμα που μελετήσαμε έχουμε $p^\top = (e^{-rT}, s_0)$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix},$$

$\pi_1 = p$, $\pi_2 = 1 - p$, ενώ ένα χαρτοφυλάκιο από ϕ μέρη του πρωτογενούς προϊόντος και ψ ομόλογα περιγράφεται από το διάνυσμα $\theta = (\psi, \phi)$.

Παρακάτω θα γράφουμε $u \geq 0$ (αντίστοιχα > 0) για ένα διάνυσμα u αν όλες οι συνιστώσες του είναι μη αρνητικές (αντίστοιχα θετικές.)

Η αρχή της μη επιτηδειότητας αξιώνει ότι δεν μπορεί να υπάρξει δυνατότητα κέρδους χωρίς την ανάληψη κινδύνου. Με το συμβολισμό που αναπτύξαμε η αρχή της μη επιτηδειότητας στο υπόδειγμα Arrow-Debreu μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$(D^\top \theta) \geq 0 \text{ και } \theta \cdot p = 0 \implies (D^\top \theta) = 0. \tag{7}$$

Στις ασκήσεις των φυλλαδίων θα δούμε ότι η (7) συνεπάγεται την ακόλουθη πρόταση που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο:

Πρόταση 1 Αν D, p ικανοποιούν την (7) έχουμε:
α. Αν $(D^\top \theta) \geq 0$ τότε $\theta \cdot p \geq 0$.
β. Αν $(D^\top \theta) = 0$ τότε $\theta \cdot p = 0$.

Μια ενδιαφέρουσα ισοδύναμη διατύπωση της αρχής της μη επιτηδειότητας είναι προσφέρει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1 Η παραπάνω συνθήκη (7) ικανοποιείται τότε και μόνο όταν το γραμμικό σύστημα $Du = p$ έχει λύση $u \in \mathbb{R}^M$ με $u > 0$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το παραπάνω σύστημα έχει λύση $u > 0$ και ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο $\theta \in \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $(D^\top \theta) \geq 0$ και $\theta \cdot p = 0$. Τότε :

$$0 = \theta \cdot p = \theta \cdot (Du) = (D^\top \theta) \cdot u.$$

Εφόσον όμως $(D^\top \theta) \geq 0$ και $u > 0$ ο μόνος τρόπος να έχουμε $(D^\top \theta) \cdot u = 0$ είναι να έχουμε $D^\top \theta = 0$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα υποθέσουμε ότι η (7) ικανοποιείται και θα αποδείξουμε ότι το σύστημα $Du = p$ έχει λύση με $u > 0$. Η ύπαρξη λύσης του παραπάνω συστήματος είναι σχετικά εύκολο να δειχθεί. Πράγματι, αν $\mathcal{N}(D^\top)$ είναι ο πυρήνας του $D^\top$ και $\langle p \rangle$ είναι ο γραμμικός χώρος διάστασης 1 που παράγει το διάνυσμα p τότε η παραπάνω πρόταση (1β) ουσιαστικά δηλώνει ότι

$$\mathcal{N}(D^\top) \subset \langle p \rangle^\perp \text{ και άρα } p \in \mathcal{N}(D^\top)^\perp = \mathfrak{Im}(D).$$

Το να δείξουμε ότι υπάρχει *θετική* λύση u είναι σημαντικά δυσκολότερο και απαιτεί την επίκληση του θεωρήματος του διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου (separating hyperplane theorem) που αποδεικνύεται στο παράρτημα του κεφαλαίου (θεώρημα 3.) Έστω λοιπόν L η εικόνα του $\langle p \rangle$ κάτω από τον μετασχηματισμό $D^\top$:

$$L = \{D^\top \theta \mid \theta \in \mathbb{R}^N;\ \theta \cdot p = 0\},$$

και

$$C = \{w \in \mathbb{R}^M \mid w \geq 0 \text{ και } \sum_{k=1}^{M} w_k = 1\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο L είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^M$ ενώ το C είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^M$. Επιπλεόν, από την (7) έχουμε ότι $L \cap C = \emptyset$. Συνεπώς από το θεώρημα 3 έχουμε ότι υπάρχει $x^* \in \mathbb{R}^M$ τέτοιο ώστε:

$$x^* \cdot y = 0, \text{ για κάθε } y \in L, \text{ και}$$

$$x^* \cdot u > 0, \text{ για κάθε } u \in C.$$

Εφόσον για $k = 1, 2, \ldots, M$ το μοναδιαίο διάνυσμα $e_k \in C$ έχουμε $x_k^* = x^* \cdot e_k > 0$. Επιπλέον, κάθε διάνυσμα κάθετο στο p είναι και κάθετο στο Dx^* αφού αν $\theta \cdot p = 0$ τότε

$$(Dx^*) \cdot \theta = x^* \cdot (D^\top \theta) = 0, \text{ διότι } D^\top \theta \in L.$$

Επομένως $Dx^* = \lambda p$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Το λ αυτό μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: σύμφωνα με την παραδοχή που έχουμε κάνει το πρώτο προϊόν είναι ένα ομόλογο με αρχική αξία $p_1 = e^{-rT}$ και τελική αξία 1 σε όλες τις δυνατές καταστάσεις. Εξισώνοντας τις πρώτες συντεταγμένες των Dx^* και λp λαμβάνουμε:

$$\lambda p_1 = \lambda e^{-rT} = (Dx^*)_1 = \sum_{k=1}^{M} D_{1k} x_k^* = \sum_{k=1}^{M} x_k = \|x^*\|_1 .$$

Συνεπώς $\lambda = \|x^*\|_1 e^{rT}$ και άρα το διάνυσμα

$$u = \frac{e^{-rT}}{\|x^*\|_1} x^*$$

είναι λύση του γραμμικού συστήματος $Du = p$ με $u > 0$. □

Αν ορίσουμε $q_k := u_k e^{rT}$, έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{M} q_k = 1.$$

Εφόσον $u \geq 0$ μπορούμε να φανταστούμε ότι τα q_k ορίζουν ένα νέο μέτρο πιθανότητας q στο χώρο των δυνατών ενδεχομένων: στο ενδεχόμενο το σύστημα να βρεθεί στο χρόνο T στην κατάσταση k αποδίδεται πιθανότητα q_k. (Όπως και στο διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου οι πιθανότητες αυτές δεν έχουν καμμιά σχέση και δεν πρέπει να συγχέονται με τις πιθανότητες π_k που αποδίδει το μοντέλο μας σε αυτά τα ενδεχόμενα.) Επιπλέον, οι υπόλοιπες εξισώσεις του γραμμικού συστήματος ($\alpha = 2, 3, \ldots, N$) γράφονται ως εξής:

$$\sum_{k=1}^{M} D_{\alpha k} u_k = p_\alpha \Leftrightarrow e^{-rT} \sum_{k=1}^{M} q_k D_{\alpha k} = p_\alpha \Leftrightarrow e^{-rT} \mathbb{E}^q[S_\alpha(T)] = S_\alpha(0), \qquad \alpha = 2, 3, \ldots, N.$$

Το q είναι λοιπόν ένα αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας. Ακόμη, εφόσον $u > 0$ έχουμε ότι $q_k > 0 \Leftrightarrow \pi_k > 0$. Όταν συμβαίνει αυτό θα λέμε ότι τα μέτρα πιθανότητας π και q είναι ισοδύναμα και θα γράφουμε $q \sim \pi$. Μπορούμε λοιπόν τώρα να επαναδιατυπώσουμε το θεώρημα 1 ως εξής:

Θεώρημα 2 Η αρχή της μη επιτηδειότητας ικανοποιείται τότε και μόνο όταν υπάρχει ένα αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας q, τέτοιο ώστε $q \sim \pi$.

Γιατί να προτιμήσουμε αυτή τη διατύπωση; Οι έννοιες του αδιάφορου κινδύνου μέτρου πιθανότητας και της ισοδυναμίας δυο μέτρων μπορούν να οριστούν για κάθε υπόδειγμα που θα θεωρήσουμε και η παραπάνω διατύπωση είναι καθολική για όλα τα υποδείγματα. (σε αντίθεση με τη διατύπωση στο θεώρημα 1).

Έχοντας προσδιορίσει σαφώς τους περιορισμούς που οφείλει να πληροί το μοντέλο μας ώστε να ικανοποιείται η αρχή της μη επιτηδειότητας θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στην τιμολόγηση παραγώγων των προϊόντων της αγοράς μας. Η απόδοση ενός τέτοιου παραγώγου στο χρόνο T θα είναι συνάρτηση των τιμών των πρωτογενών προϊόντων στο χρόνο T και θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα $f \in \mathbb{R}^M : f^\top = (f_1, \ldots, f_M)$, όπου f_k θα είναι η απόδοση του παραγώγου αν στο χρόνο T η αγορά βρεθεί στην κατάσταση k. Αν θέλουμε να αναπαραγάγουμε την απόδοση του παραγώγου αυτού πρέπει να βρούμε ένα χαρτοφυλάκιο, δηλαδή ένα $\theta \in \mathbb{R}^N$, που η αξία του σε κάθε μια από τις M καταστάσεις ταυτίζεται με την αξία του χαρτοφυλακίου, δηλαδή

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha D_{\alpha k} = f_k, \qquad k = 1, \ldots, M. \tag{8}$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα ($D^\top \theta = f$) με M εξισώσεις και N αγνώστους. Αν το σύστημα αυτό έχει λύση $\theta \in \mathbb{R}^N$ τότε η αρχική αξία του παραγώγου επιβάλλεται από την αρχή της μη επιτηδειότητας και πρέπει να ταυτίζεται με την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου που αναπαράγει την απόδοσή του: $V_0(f) = \theta \cdot p$.

Παράδειγμα 1 Θεωρήστε ένα υπόδειγμα αγοράς μιας περιόδου με

$$p = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι έχουμε δύο προϊόντα με κίνδυνο καθένα από τα οποία ακολουθεί το διωνυμικό υπόδειγμα. Π.χ. το δεύτερο προϊόν της αγοράς έχει σημερινή αξία 8 ενώ στο χρόνο T η αξία του είναι είτε 10 (καταστάσεις 1 και 2) είτε 6 (καταστάσεις 3 και 4.) Θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο για το οποίο $f^\top = (13, 16, 5, 8)$. Είναι εύκολο να δείτε ότι το σύστημα $D^\top \theta = f$ έχει μοναδική λύση με $\theta^\top = (1, 2, -1)$ άρα η αρχική αξία αυτού του παραγώγου είναι $V_0 = 1 \times 0,9 + 8 \times 2 + 6 \times (-1) = 10,9$. (Προσέξτε και πάλι ότι οι πιθανότητες π_k δεν παίζουν ρόλο στην τιμολόγηση του παραγώγου.)

Σημείωση: Το γραμμικό σύστημα $D^\top \theta = f$ ενδέχεται να μην έχει μονοσήμαντη λύση. Επομένως είναι δυνατόν να υπάρχουν διαφορετικά χαρτοφυλάκια που αναπαράγουν την απόδοση του παραγώγου. Σε αυτήν την περίπτωση δεν έχει σημασία ποιό από αυτά θα χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε την αρχική αξία του παραγώγου καθώς όλα τα χαρτοφυλάκια που αναπαράγουν την απόδοση του παραγώγου έχουν την ίδια αρχική αξία. Αυτός ο ισχυρισμός είναι συνέπεια της αρχής της μη επιτηδειότητας και μπορούμε να τον αποδείξουμε ως εξής: Γνωρίζουμε ότι από την αρχή της μη επιτηδειότητας υπάρχει $u \in \mathbb{R}^M$ ώστε $Du = p$. Επομένως αν $D^\top \theta_1 = D^\top \theta_2 = f$ έχουμε:

$$(\theta_1 - \theta_2) \cdot p = (\theta_1 - \theta_2) \cdot (Du) = D^\top (\theta_1 - \theta_2) \cdot u = 0.$$

Παράδειγμα 2 Θεωρήστε ένα υπόδειγμα αγοράς μιας περιόδου με

$$p = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 8 \\ 6 \\ 10,9 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 8 & 5 \\ 13 & 16 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε τώρα ότι η αγορά μας είναι αυτή του προηγούμενου παραδείγματος με την προσθήκη του παραγώγου που τιμολογήσαμε εκεί στα προς διαπραγμάτευση προϊόντα. Κάθε παράγωγο που μπορεί να αναπαραχθεί με ένα χαρτοφυλάκιο θ, όπου $\theta^\top = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ μπορεί επίσης να αναπαραχθεί και από το χαρτοφυλάκιο $\tilde{\theta}$ με $\tilde{\theta}^\top = (\theta_1 + \theta_4, \theta_2 + 2\theta_4, \theta_3 - \theta_4, 0)$ (γιατί;), ενώ:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} \cdot p &= 0,9 \times (\theta_1 + \theta_4) + 8 \times (\theta_2 + 2\theta_4) + 6 \times (\theta_3 - \theta_4) + 10,9 \times 0 \\ &= 0,9 \times \theta_1 + 8 \times \theta_2 + 6 \times \theta_3 + 10,9 \times \theta_4 \\ &= \theta \cdot p. \end{aligned}$$

Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι το γραμμικό σύστημα $D^\top \theta = f$ έχει για κάθε $f \in \mathbb{R}^M$ λύση $\theta \in \mathbb{R}^N$ αν και μόνο αν η τάξη του πίνακα D είναι M. Σε αυτήν την περίπτωση κάθε παράγωγο μπορεί να αναπαραχθεί και να τιμολογηθεί, οπότε η αγορά που περιγράφει το μοντέλο μας είναι πλήρης. Στην αντίθετη περίπτωση θα υπάρχουν παράγωγα για τα οποία το σύστημα (8) δεν έχει λύση, και η αρχή της μη επιτηδειότητας δεν αρκεί για να προσδιορίσουμε την αξία του παραγώγου. Και πάλι όμως η αρχή της μη επιτηδειότητας μπορεί να δώσει εκτιμήσεις για την αρχική αξία του παραγώγου. Πιο συγκεκριμένα, αν ένα χαρτοφυλάκιο έχει σε όλες τις δυνατές τελικές καταστάσεις μεγαλύτερη αξία από αυτήν του παραγώγου, τότε η αρχική αξία του παραγώγου δεν μπορεί να ξεπερνά αυτή του χαρτοφυλακίου:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha D_{\alpha k} \geq f_k, \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, M\} \Longrightarrow V_0(f) \leq \theta \cdot p.$$

Επομένως, αν $\mathcal{M}_+ = \{\theta \in \mathbb{R}^N : \ \sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha D_{\alpha k} \geq f_k, \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, M\}\} = \{\theta \in \mathbb{R}^N : \ D^\top \theta \geq f\}$, τότε

$$V_0(f) \leq \min_{\theta \in \mathcal{M}_+} \theta \cdot p = e^{-rT} \min_{\theta \in \mathcal{M}_+} \theta \cdot (e^{rT} p). \tag{9}$$

Ο υπολογισμός του ελαχίστου στην τελευταία έκφραση είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραματισμού. Το δυϊκό του πρόβλημα είναι:

$$\max_{q \in \mathcal{I}} q \cdot f, \quad \text{όπου } \mathcal{I} = \{q \in \mathbb{R}^M : \ q \geq 0, \ Dq = e^{rT} p\}.$$

Παρατηρήστε ότι το εφικτό σύνολο του δυϊκού προγράμματος είναι ακριβώς τα αδιάφορα κινδύνου μέτρα πιθανότητας, ενώ η αντικειμενική συνάρτηση $q \cdot f$ είναι η αναμενόμενη (κάτω από το q) απόδοση του παραγώγου στο χρόνο T. Επιπλέον, το σύνολο $\mathcal{I}$ είναι μη κενό και συμπαγές. Επομένως, το ελάχιστο στην (9) λαμβάνεται για κάποιο $\theta \in \mathcal{M}_+$ και ισούται με τη λύση του δυϊκού προβλήματος:

$$V_0(f) \leq V_0^{\max} := e^{-rT} \max_{q \in \mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f(S(T))].$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε ένα κάτω φράγμα για την αρχική αξία του παραγώγου:

$$V_0(f) \geq V_0^{\min} := e^{-rT} \min_{q \in \mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f(S(T))].$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ακόμη και σε μια μη πλήρη αγορά η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει περιορισμούς στην αρχική αξία ενός παραγώγου. Είναι εύλογο να διερευνήσουμε αν οι παραπάνω εκτιμήσεις είναι οι ακριβέστερες που μπορεί να πάρει κανείς. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι θετική.

Πρόταση 2 Αν το αρχικό μας υπόδειγμα αγοράς ικανοποιεί την αρχή της μη επιτηδειότητας και $V_0^{\min} \neq V_0^{\max}$ τότε οποιαδήποτε αρχική αξία v_0 του παραγώγου στο διάστημα $(V_0^{\min}, V_0^{\max})$ αποκλείει την ύπαρξη στρατηγικής επιτηδειότητας.

Απόδειξη: Διευρύνουμε την αγορά μας συμπεριλαμβάνοντας και το παράγωγο στα προϊόντα που είναι διαθέσιμα προς διαπραγμάτευση με αρχική τιμή v_0. Η διευρυμένη αυτή αγορά έχει τώρα διάνυσμα αρχικών τιμών και πίνακα τελικής κατάστασης

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} e^{-rT} \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}, \text{ και } \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \ldots & D_{NM} \\ f_1 & f_2 & \ldots & f_M \end{pmatrix} \in \Pi_{(N+1)\times M}$$

αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^M$, τέτοιο ώστε $u > 0$ και $\tilde{D}u = \tilde{p}$ οπότε από το θεώρημα 1 δεν μπορεί να κατασκευαστεί στρατηγική επιτηδειότητας χρησιμοποιώντας τα προϊόντα της διευρυμένης αυτής αγοράς.

Πράγματι εφόσον το $\mathcal{I}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^M$ τότε το μέγιστο και το ελάχιστο στα δυϊκά προβλήματα που θεωρήσαμε παραπάνω λαμβάνονται, δηλαδή υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}^M$ τέτοια ώστε $x, y \geq 0$, $Dx = Dy = p$ και
$$V_0^{\min} = x \cdot f,\ V_0^{\max} = y \cdot f.$$
Επιπλέον από την αρχή της μη επιτηδειότητας για το αρχικό μας υπόδειγμα υπάρχει $w \in \mathbb{R}^M$ με $w > 0$ και $Dw = p$. Αν λοιπόν $v_0 \in (V_0^{\min}, V_0^{\max})$ υπάρχουν θετικές σταθερές α, β, γ τέτοιες ώστε $\alpha + \beta + \gamma = 1$ και
$$v_0 = \alpha V_0^{\min} + \beta V_0^{\max} + \gamma(w \cdot f) = (\alpha x + \beta y + \gamma w) \cdot f.$$
Ορίζουμε τώρα $u = \alpha x + \beta y + \gamma w$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $Du = p$ και $u > 0$. Επιπλέον,
$$\tilde{D}u = \begin{pmatrix} Du \\ f \cdot u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ v_0 \end{pmatrix} = \tilde{p},$$
και άρα στη διευρυμένη αγορά δεν υπάρχουν ευκαιρίες επιτηδειότητας.
□

Πόρισμα 1 Η αρχική αξία ενός παραγώγου καθορίζεται από την αρχή της μη επιτηδειότητας αν και μόνο αν η $\mathbb{E}^q[f(S(T))]$ έχει την ίδια τιμή για όλα τα αδιάφορα κινδύνου μέτρα πιθανότητας q.

Σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα η αγορά είναι πλήρης αν και μόνο αν τα $\sup_{q\in\mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f(S_T)]$ και $\inf_{q\in\mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f(S_T)]$ ταυτίζονται για κάθε $f \in \mathbb{R}^M$. Όμως,
$$\sum_{k=1}^{M} q_k f_k = \sum_{k=1}^{M} \tilde{q}_k f_k,\ \forall f \in \mathbb{R}^M \Leftrightarrow q = \tilde{q},$$
επομένως ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η τιμή *κάθε* παραγώγου f να καθορίζεται από την αρχή της μη επιτηδειότητας είναι το σύνολο $\mathcal{I}$ να είναι μονοσύνολο.

Παράδειγμα 3 (Τριωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου)
Θεωρήστε ένα υπόδειγμα αγοράς μιας περιόδου με
$$p = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$
Ας βρούμε πρώτα τα αδιάφορα κινδύνου μέτρα πιθανότητας q. Θα πρέπει:
$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ (12q_1 + 10q_2 + 8q_3) \times 0,9 = 9 \end{cases}$$
Η γενική λύση αυτού του συστήματος είναι $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{1-t}{2}, t, \frac{1-t}{2})$ με $t \in \mathbb{R}$. Για να έχουμε $q \geq 0$ θα πρέπει $t \in [0, 1]$. Επομένως,
$$\mathcal{I} = \{ \begin{pmatrix} (1-t)/2 \\ t \\ (1-t)/2 \end{pmatrix} :\ t \in [0, 1]\}$$
Άρα η αγορά αυτού του υποδείγματος ικανοποιεί την αρχή της μη επιτηδειότητας και δεν είναι πλήρης. Έστω τώρα ένα παράγωγο με διάνυσμα απόδοσης $f \in \mathbb{R}^3$. Τότε αν $q \in \mathcal{I}$ έχουμε:
$$\mathbb{E}^q[f] = \frac{1-t}{2} f_1 + t f_2 + \frac{1-t}{2} f_3 = \frac{f_1 + f_3}{2} + t(f_2 - \frac{f_1 + f_3}{2}).$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να τιμολογείται ένα παράγωγο από την αρχή της μη επιτηδειότητας είναι η παραπάνω έκφραση να είναι ανεξάρτητη του t. Επομένως ένα παράγωγο με απόδοση f μπορεί να τιμολογηθεί αν και μόνο αν $f_1 + f_3 = 2f_2$ και τότε η αρχική του αξία θα είναι $V_0(f) = 0,9 \times f_2$.

Έστω τώρα ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης 9, δηλαδή $f^\top = (3, 1, 0)$. Τότε

$$\max_{q\in\mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f] = \max_{t\in[0,1]} \frac{3-t}{2} = \frac{3}{2}$$

και

$$\min_{q\in\mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f] = \min_{t\in[0,1]} \frac{3-t}{2} = 1.$$

Επομένως στο υπόδειγμα αυτό έχουμε τις εκτιμήσεις: $0,9 \leq c(9, T, 9) \leq 1,35$.

Συνοψίζοντας όσα είδαμε στο πλαίσιο του γενικού υποδείγματος μιας περιόδου των Arrow & Debreu έχουμε:

- Η αρχή της μη επιτηδειότητας ικανοποιείται τότε και μόνο όταν υπάρχει αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας ($q \in \mathcal{I}$) ώστε $q \sim \pi$.
- Η αγορά που περιγράφει το υπόδειγμα είναι πλήρης, όταν υπάρχει *μοναδικό* τέτοιο μέτρο.
- Σε κάθε περίπτωση αν η απόδοση ενός παραγώγου στο χρόνο T είναι $f(S(T))$, τότε η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει τις παρακάτω ανισότητες για την αρχική του αξία:

$$\min_{q\in\mathcal{I}} e^{-rT}\mathbb{E}^q[f(S(T))] \ \leq\ V_0(f) \leq\ \max_{q\in\mathcal{I}} e^{-rT}\mathbb{E}^q[f(S(T))].$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα που αποδείξαμε για υποδείγματα μιας περιόδου παραμένουν (στην ουσία τους) σε ισχύ και για πολύ γενικότερα υποδείγματα και αναφέρονται συνήθως ως το *θεμελιώδες θεώρημα* της τιμολόγησης παραγώγων (fundamental theorem of asset pricing).

Είπαμε στην αρχή του κεφαλαίου ότι σκοπός μας είναι να αναλύσουμε υποδείγματα που θεωρούνται ρεαλιστικά. Τα υποδείγματα μιας περιόδου που μελετήσαμε έχουν δυο βασικά μειονεκτήματα. Σε ότι αφορά στα προϊόντα που μοντελοποιούμε, αυτά μπορούν να καταλήξουν μόνο σε ένα διακριτό σύνολο καταστάσεων. Σε ότι αφορά δε στην μελέτη παραγώγων αυτών των προϊόντων τα υποδείγματα μιας περιόδου δεν επιτρέπουν συναλλαγές μεταξύ της αρχικής και τελικής κατάστασης. Έτσι, δεν μπορούμε π.χ. να θεωρήσουμε παράγωγα αμερικανικού τύπου, αλλά ούτε και να χρησιμοποιήσουμε δυναμικά αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια για να αναπαράγουμε αποδόσεις ευρωπαϊκών παραγώγων. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πώς μπορούμε να αίρουμε τον τελευταίο αυτόν περιορισμό.

3. Παράρτημα: Το Θεώρημα του διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου

Θεώρημα 3 Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν L είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $L \cap C = \emptyset$ τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $x_* \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε:

$$y \cdot x_* = 0, \text{ για κάθε } y \in L, \text{ και}$$

$$u \cdot x_* > 0, \text{ για κάθε } u \in C.$$

Δηλαδή το υπερεπίπεδο $H = \{u \in \mathbb{R}^N : u \cdot x_* = 0$ περιέχει τον L, ενώ το κυρτό σύνολο C βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στον έναν από τους δύο ημιχώρους που αφορίζονται από το H.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $G = C - L = \{x \in \mathbb{R}^n : \; x = u - y, \;\; \text{με } u \in C, y \in L\}$. Το G είναι μη κενό και κυρτό (εύκολο) ενώ είναι και κλειστό. Πράγματι, έστω $x_n = u_n - y_n$ είναι μια ακολουθία στο G τέτοια ώστε $x_n \to x$. Η u_n είναι μια ακολουθία στο συμπαγές σύνολο C, επομένως υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της $u_{n_k} \to u \in C$. Αλλά και η ακολουθία y_{n_k} στον L θα συγκλίνει αφού $y_{n_k} = u_{n_k} - x_{n_k} \to u - x$, ενώ $u - x \in L$ αφού ο L ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό σύνολο. Επομένως $x = u - (u - x) \in G$ και άρα το G είναι κλειστό.

Έστω x_* εκείνο το σημείο του G με την ελάχιστη απόσταση από το μηδέν. $L \cap C = \emptyset \implies \|x_*\| > 0$. Από την κυρτότητα του G αν $x \in G$ τότε για κάθε $\alpha \in (0,1)$ έχουμε $\alpha x + (1-\alpha)x_* \in G$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \|x_*\|^2 &\leq \|\alpha x + (1-\alpha)x_*\|^2 \\ &= \alpha^2\|x\|^2 + (1-\alpha)^2\|x_*\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)x \cdot x_* \\ &= \|x_*\|^2 + \alpha^2\|x - x_*\|^2 + 2\alpha(x \cdot x_* - \|x_*\|^2). \end{aligned}$$

Από την παραπάνω (εφόσον $\alpha > 0$) έχουμε:

$$2(\|x_*\|^2 - x \cdot x_*) \leq \alpha\|x - x_*\|^2, \; \forall \alpha \in (0,1),$$

και παίρνοντας $\alpha \to 0$ παίρνουμε:

$$x \cdot x_* \geq \|x_*\|^2 > 0, \; \forall x \in G. \tag{10}$$

Αν $u \in C$ τότε $u = u - 0 \in G$ επομένως από την (10) έχουμε $u \cdot x_* > 0$.
Επιπλέον αν $y \in L$ τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $u - \lambda y \in G$ οπότε

$$\lambda y \cdot x_* < u \cdot x_*, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αυτό όμως μπορεί να συμβεί μόνο αν $y \cdot x_* = 0$.
□