

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ Ι
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2010
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV (Ημερομηνία Παράδοσης 29/10/2010)

Άσκηση 1 Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι €50, ενώ η τιμή ενός ομολόγου 6 μηνών όψεως €100 είναι €96. Υποθέτουμε ότι σε 6 μήνες η τιμή της μετοχής θα είναι είτε €60 είτε €42. Βάσει του παραπάνω υποδείγματος:

- α) Τιμολογήστε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς 100 μετοχών με ωρίμανση σε 6 μήνες και τιμή άσκησης €48 ανά μετοχή.
- β) Συνθέστε ένα χαρτοφυλάκιο από μετοχές και ομόλογα 6 μηνών με απόδοση ίδια με το παραπάνω δικαίωμα.
- γ) Τιμολογήστε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης 100 μετοχών με την ίδια ωρίμανση και τιμή άσκησης.
- δ) Αν η τιμή διαπραγματεύσεως ενός δικαιώματος πώλησης σαν αυτό του ερωτήματος (γ) είναι €23 κατασκευάστε μια στρατηγική arbitrage.

Άσκηση 2 Θεωρούμε την εξής αγορά μιας περιόδου με τρία προϊόντα και τέσσερις καταστάσεις. Το προϊόν 1 είναι ένα άνευ κινδύνου ομόλογο με $r = 0$, το προϊόν 2 είναι μια μετοχή με αρχική τιμή 1, το προϊόν 3 είναι μια άλλη μετοχή με αρχική τιμή 1. Ας αριθμήσουμε τις 4 δυνατές τελικές καταστάσεις ως εξής:

- 1) και οι δύο μετοχές αξίζουν $1 + \varepsilon$, για κάποιο $\varepsilon > 0$.
- 2) το προϊόν 2 αξίζει $1 + \varepsilon$ και το προϊόν 3 αξίζει $1 - \varepsilon$,
- 3) το προϊόν 3 αξίζει $1 + \varepsilon$ και το προϊόν 2 αξίζει $1 - \varepsilon$,
- 4) και οι δύο μετοχές αξίζουν $1 - \varepsilon$.

- α. Γράψτε τον πίνακα D των δυνατών τελικών καταστάσεων σύμφωνα με το υπόδειγμα Arrow-Debreu.
- β. Βρείτε όλα τα μέτρα πιθανότητας π στον χώρο των τελικών καταστάσεων για τα οποία

$$\mathbb{E}^\pi[X_i(T)] = e^{rT} X_i(0), \quad i = 1, 2, 3.$$

Με $X_i(0)$ (αντίστοιχα $X_i(T)$) συμβολίζουμε την αρχική (αντίστοιχα τελική) αξία του προϊόντος i .

γ. Έστω ένα παράγωγο με απόδοση f_k στην τελική κατάσταση k , $k = 1, 2, 3, 4$. Ποια είναι οι ελάχιστη και η μέγιστη αρχική του αξία που επιτρέπεται από την αρχή της μη επιτηδειότητας;

δ. Ποια παράγωγα μπορούν να τιμολογηθούν ακριβώς;

ε. Ποιά είναι η "δίκαιη" αρχική αξία του παραγώγου με απόδοση $f_k = 0, 1k$ στην κατάσταση k ;

στ. Βρείτε το χαρτοφυλάκιο που αναπαράγει την απόδοση αυτού του παραγώγου.

Άσκηση 3 Το κουπόνι στοιχήματος του ΟΠΑΠ της 24ης Οκτωβρίου δίνει τις ακόλουθες αποδόσεις για τον αγώνα ποδοσφαίρου ΑΕΚ -Παναθηναϊκός: 1: 2,65- X: 3,05- 2: 2,45 (Αυτό σημαίνει ότι στοίχημα €1 σε νίκη της ΑΕΚ πληρώνει €2,65 σε ενδεχόμενη νίκη της ΑΕΚ και 0 διαφορετικά, στοίχημα €1 σε ισόπαλο αποτέλεσμα πληρώνει €3,05 σε περίπτωση ισοπαλίας και 0 διαφορετικά, ενώ στοίχημα €1 σε νίκη του Παναθηναϊκού πληρώνει €2,45 σε ενδεχόμενη νίκη του Παναθηναϊκού και 0 διαφορετικά.)

Θεωρήστε μια αγορά με τα εξής τρία προϊόντα: στοίχημα €1 σε νίκη της ΑΕΚ, στοίχημα €1 σε νίκη του Παναθηναϊκού, και στοίχημα €1 στην ισοπαλία, και γράψτε τον πίνακα D των τελικών καταστάσεων κατά το υπόδειγμα Arrow-Debreu. Κατασκευάστε τώρα ένα χαρτοφυλάκιο με αρνητικές θέσεις σε όλα τα προϊόντα και αρχική αξία -€100 τέτοιο ώστε η τελική του αξία να μην εξαρτάται από το αποτέλεσμα του αγώνα. Ποιά είναι η τελική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου; Είναι αυτό το χαρτοφυλάκιο μια στρατηγική επιτηδειότητας για το γραφείο στοιχημάτων;

Άσκηση 4 Σαν γενίκευση της προηγούμενης άσκησης θεωρήστε μια αγορά που περιλαμβάνει ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με τελική αξία 1 και σημερινή αξία 1 (την αποχή από το στοίχημα), και τα τρία στοιχήματα με αποδόσεις: 1 : p_1 , X: p_2 , 2 : p_3 . Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε στην αγορά αυτή να μην υπάρχει στρατηγική arbitrage.

Άσκηση 5 Στο υπόδειγμα Arrow-Debreu δείξτε ότι αν για κάθε $\theta \in \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $\theta \cdot p = 0$ και $D^\top \theta \geq 0$, έχουμε $D^\top \theta = 0$ τότε:

$$D^\top \theta \geq 0 \implies \theta \cdot p \geq 0$$