

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ Ι**  
**ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2007**  
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV (Ημερομηνία Παράδοσης 21/11/2007)

**Άσκηση 1** Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι €50, ενώ η τιμή ενός εντόκου γραμματίου 6 μηνών όψεως €100 είναι €94,176. Υποθέτουμε ότι σε 6 μήνες η τιμή της μετοχής θα είναι είτε €60 είτε €42. Βάσει του παραπάνω υποδείγματος:

- α) Τιμολογήστε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς 100 μετοχών με ωρίμανση σε 6 μήνες και τιμή άσκησης €48 ανά μετοχή.
- β) Συνθέστε ένα χαρτοφυλάκιο από μετοχές και έντοκα γραμμάτια 6 μηνών με απόδοση ίδια με το παραπάνω δικαίωμα.
- γ) Τιμολογήστε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης 100 μετοχών με την ίδια ωρίμανση και τιμή άσκησης.
- δ) Αν η τιμή διαπραγματεύσεως ενός δικαιώματος πώλησης σαν αυτό του ερωτήματος (γ) είναι €230 κατασκευάστε μια στρατηγική επιτηδειότητας.

**Άσκηση 2** Θεωρούμε την εξής αγορά μιας περιόδου με τρία χρεώγραφα και τέσσερις καταστάσεις:

- Το χρεώγραφο 1 είναι ένα άνευ κινδύνου ομόλογο με  $r = 0$ .
- Το χρεώγραφο 2 είναι μια μετοχή με αρχική τιμή 1, και τελική τιμή  $1-\varepsilon$  ή  $1+\varepsilon$ , όπου  $\varepsilon > 0$ .
- Το χρεώγραφο 3 είναι μια άλλη μετοχή με αρχική τιμή 1, και τελική τιμή  $1-\varepsilon$  ή  $1+\varepsilon$ .

Ας αριθμήσουμε τις 4 δυνατές τελικές καταστάσεις ως εξής:

- 1) και οι δύο μετοχές αξίζουν  $1 + \varepsilon$ ,
- 2) το χρεώγραφο 2 αξίζει  $1 + \varepsilon$  και το χρεώγραφο 3 αξίζει  $1 - \varepsilon$ ,
- 3) το χρεώγραφο 3 αξίζει  $1 + \varepsilon$  και το χρεώγραφο 2 αξίζει  $1 - \varepsilon$ ,
- 4) και οι δύο μετοχές αξίζουν  $1 - \varepsilon$ .

α. Γράψτε τον πίνακα  $D$  των δυνατών τελικών καταστάσεων σύμφωνα με το υπόδειγμα Arrow-Debreu. Βρείτε όλα τα μέτρα πιθανότητας  $\pi$  στον χώρο των τελικών καταστάσεων για τα οποία

$$\mathbb{E}^\pi[X_i(T)] = e^{rT} X_i(0), \quad i = 1, 2, 3.$$

Με  $X_i(0)$  (αντίστοιχα  $X_i(T)$ ) συμβολίζουμε την αρχική (αντίστοιχα τελική) αξία του χρεωγράφου  $i$ .

γ. Έστω ένα παράγωγο με απόδοση  $f_k$  στην τελική κατάσταση  $k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Ποια είναι οι ελάχιστη και η μέγιστη αρχική του αξία που επιτρέπεται από την αρχή της μη επιτηδειότητας;

δ. Ποια παράγωγα μπορούν να τιμολογηθούν ακριβώς;

ε. Ποιά είναι η "δίκαιη" αρχική αξία του παραγώγου με απόδοση  $f_k = 0, 1k$  στην κατάσταση  $k$ ;

στ. Βρείτε το χαρτοφυλάκιο που αναπαράγει την απόδοση αυτού του παραγώγου.

**Άσκηση 3** Το κουπόνι στοιχήματος του ΟΠΑΠ έδινε την Πέμπτη 8 Νοεμβρίου τις ακόλουθες αποδόσεις για τον αγώνα ποδοσφαίρου Αστέρας Τρίπολης -Ολυμπιακός: 1: 20, X: 5, 2: 1,10 (Αυτό σημαίνει ότι στοίχημα €1 σε νίκη του Αστέρα πληρώνει €20 σε ενδεχόμενη νίκη του Θρασύβουλου και 0 διαφορετικά, στοίχημα €1 σε ισόπαλο αποτέλεσμα πληρώνει €5 σε περίπτωση ισοπαλίας και 0 διαφορετικά, ενώ στοίχημα €1 σε νίκη του Ολυμπιακού πληρώνει €1,10 σε ενδεχόμενη νίκη του Ολυμπιακού και 0 διαφορετικά.) Θεωρήστε μια αγορά με τα εξής τρία προϊόντα: στοίχημα €1 σε νίκη του Αστέρα, στοίχημα €1 σε νίκη του Ολυμπιακού, και στοίχημα €1 στην ισοπαλία, και γράψτε τον πίνακα  $D$  των τελικών καταστάσεων κατά το υπόδειγμα Arrow-Debreu. Κατασκευάστε τώρα ένα χαρτοφυλάκιο με αρνητικές θέσεις σε όλα τα προϊόντα και αρχική αξία -€100 τέτοιο ώστε η τελική του αξία να μην εξαρτάται από το αποτέλεσμα του αγώνα. Ποιά είναι η τελική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου; Είναι αυτό το χαρτοφυλάκιο μια στρατηγική επιτηδειότητας για το γραφείο στοιχημάτων; Επαναλάβετε τώρα

το ίδιο αλλά για αποδόσεις:  $1 : p_1$ ,  $X : p_2$ ,  $2 : p_3$ . Δείξτε ότι αν  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} > 1$  είναι δυνατόν να κατασκευαστεί μια στρατηγική επιτηδειότητας με αρνητικές θέσεις σε όλα τα προϊόντα. (Τώρα πάρτε ένα δελτίο στοιχήματος ή επισκευτείτε μια ιστοσελίδα γραφείου στοιχημάτων και επιβεβαιώστε ότι πάντα οι αποδόσεις που προσφέρονται ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα.)

**Άσκηση 4** Στην παραπάνω άσκηση βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι αποδόσεις  $p_1, p_2, p_3$  ώστε η αγορά που περιέχει τα τρία παραπάνω προϊόντα και ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με αρχική αξία 1 και τελική αξία 1 ανεξαρτήτως της έκβασης του αγώνα να μην επιτρέπει στρατηγικές επιτηδειότητας.

**Άσκηση 5** Στο υπόδειγμα Arrow-Debreu δείξτε ότι αν για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}^N$  τέτοιο ώστε  $\theta \cdot p = 0$  και  $D^\top \theta \geq 0$ , έχουμε  $D^\top \theta = 0$  τότε:

$$D^\top \theta \geq 0 \implies \theta \cdot p \geq 0$$