

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ Ι**  
**ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2007**  
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙ (Ημερομηνία Παράδοσης 31/10/2007)**

**Άσκηση 1** Ένας επενδυτής συνάπτει ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης για την αγορά ενός προϊόντος προς €29200. Η μελλοντική τιμή του συμβολαίου τις πέντε επόμενες μέρες κυμαίνεται ως εξής: 29250, 29300, 29275, 29225 και 29250 (οι τιμές σε ευρώ.) Αν το υπόλοιπο στο λογαριασμό περιωριού του επενδυτή είναι αρχικά €2000, περιγράψτε την κίνηση του λογαριασμού του τις επόμενες μέρες.

**Άσκηση 2** α) Αποδείξτε ότι αν η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε για κάθε  $x \geq 0$  :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^{\infty} (x - y)^+ f''(y) dy.$$

β) Θεωρώντας γνωστή την τιμή όλων των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς με ωρίμανση στο χρόνο  $T$ , τιμολογήστε ένα ευρωπαϊκό παράγωγο με απόδοση στο χρόνο  $T$  ίση με  $S_T(2S_0 - S_T)$ .

**Άσκηση 3** Στο διευθύνοντα σύμβουλο μιας εταιρείας προτείνεται να αναλάβει υπουργικό αξίωμα. Όταν αυτός είχε προσληφθεί σαν διευθύνων σύμβουλος, η εταιρεία του πρόσφερε σαν bonus ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς της μετοχής της εταιρείας με χαμηλή παραδοτέα τιμή τα οποία μπορεί μόνο να ασκήσει και όχι να πουλήσει, και που δεν έχουν φτάσει ακόμη στην ωρίμανση. Έτσι τώρα έχει προσωπικό συμφέρον στην εταιρεία αφού όσο υψηλότερη είναι η τιμή της μετοχής της όταν τα δικαιώματά του φτάσουν στην ωρίμανση τόσο μεγαλύτερο θα είναι το κέρδος του. Τίθεται λοιπόν ένα ηθικό ζήτημα σε συνδυασμό με την πρόθεσή του να αναλάβει υπουργικά καθήκοντα. Από την άλλη είναι παράλογο να του ζητηθεί να απεμπολήσει τα δικαιώματα αγοράς που κατέχει και που ήδη έχουν αποκτήσει μεγάλη αξία. Κάποιος σύμβουλος του του προτείνει να υπογράψει ένα προθεσμιακό συμβόλαιο ώστε να πουλήσει τις μετοχές που θα πάρει στην ωρίμανση ασκώντας τα δικαιώματα έναντι της προθεσμιακής τιμής  $S_0 e^{rT}$  και ισχυρίζεται ότι έτσι θα είναι σαν να έχει πουλήσει τις μετοχές σήμερα και να έχει καταθέσει τη σημερινή τους αξία σε άνευ κινδύνου λογαριασμό. Εσείς τι γνώμη έχετε; Αν ακολουθήσει τη συμβουλή θα πάψει να έχει συμφέροντα στην αξία της μετοχής;

**Άσκηση 4** Μια μετοχή έχει τρέχουσα τιμή €50,25 και πρόκειται να αποδώσει μέρισμα €2 ανά μετοχή σε 2 μήνες. Το ετήσιο επιτόκιο είναι σταθερό 5% υπολογισμένο με συνεχή απόδοση. Για ποια τιμή του  $K$  είναι οι σημερινές αξίες των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης με ωρίμανση σε 6 μήνες και παραδοτέα τιμή  $K$  ίσες;

**Άσκηση 5** Ένα ευρωπαϊκό παράγωγο έχει απόδοση στην ωρίμανση που δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(S_T) = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K_1 \text{ ή } S_T \geq K_4, \\ M \frac{S_T - K_1}{K_2 - K_1} & , K_1 \leq S_T \leq K_2, \\ M & , K_2 \leq S_T \leq K_3, \\ M \frac{K_4 - S_T}{K_4 - K_3} & , K_3 \leq S_T \leq K_4. \end{cases}$$

Συνθέστε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από ευρωπαϊκά δικαιώματα μόνο και έχει την ίδια απόδοση. Στη συνέχεια υπολογίστε την αρχική αξία του παραγώγου και αποδείξτε ότι:

$$\frac{c(S_0, T, K_1) - c(S_0, T, K_2)}{K_2 - K_1} \geq \frac{c(S_0, T, K_3) - c(S_0, T, K_4)}{K_4 - K_3}.$$