

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ Ι
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2006
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV (Ημερομηνία Παράδοσης 14/2/2007)

Άσκηση 1 Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι S_0 και για τη δυναμική της υποθέτουμε ότι ακολουθεί το λογαριθμικό κανονικό υπόδειγμα με ρυθμό απόδοσης μ και μεταβλητότητα σ .

α) Ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή και ποιά η διασπορά της τιμής της μετοχής έπειτα από χρόνο T ;

β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή Z με τυπική κανονική κατανομή ($Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$) να βρεθεί στο διάστημα $(-1,96, +1,96)$ είναι 0,95 βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την τιμή της μετοχής έπειτα από χρόνο T .

γ) Ποιά είναι η πιθανότητα να ασκηθεί ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς της μετοχής με τιμή άσκησης K και χρόνο ωρίμανσης T ;

δ) Ποιά είναι η πιθανότητα η S_T να είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη τιμή της;

Άσκηση 2 Ένα “ενισχυμένο” ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K έχει απόδοση $f(S_T) = ((S_T - K)^+)^2$.

α) Υπολογίστε την τρέχουσα αξία του από τον τύπο των Black και Scholes.

β) Υπολογίστε το “Δέλτα” και το “Βέγα” του παραγώγου.

Άσκηση 3 Έστω ένα ευρωπαϊκού τύπου παράγωγο με απόδοση στην ωρίμανση

$$f(S_T) = \begin{cases} 1, & \text{αν } S_T \geq K \\ 0, & \text{αν } S_T < K. \end{cases}$$

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο των Black και Scholes βρείτε την αξία του παραγώγου τη χρονική στιγμή t , σαν συνάρτηση της τιμής του πρωτογενούς προϊόντος S_t .

β) Βρείτε το “Δέλτα” αυτού του παραγώγου. Πώς συμπεριφέρεται αυτό καθώς το t πλησιάζει το T ;

γ) Με βάση την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα, σχολιάστε αν είναι ρεαλιστικό να τιμολογηθεί ένα τέτοιο παράγωγο από τον τύπο των Black και Scholes.

δ) Αν στην αγορά μας διατίθενται δικαιώματα αγοράς του ίδιου προϊόντος με ωρίμανση T και τιμές άσκησης $K - h$, K , $K + h$, με τιμές διαπραγμάτευσης $c(K - h)$, $c(K)$, και $c(K + h)$ αντίστοιχα, δείξτε από την αρχή της μη επιτηδειότητας ότι η αρχική αξία του παραγώγου θα πρέπει να ικανοποιεί τη διπλή ανισότητα:

$$\frac{c(K - h) - c(K)}{h} \geq V_0(f) \geq \frac{c(K) - c(K + h)}{h}.$$

Άσκηση 4 Έστω ένα ευρωπαϊκό παράγωγο μιας μετοχής με απόδοση στην ωρίμανση $f(S_T) = S_T^N$. Τιμολογήστε το παράγωγο βάσει του τύπου των Black και Scholes. Θεωρήστε γνωστά το άνευ κινδύνου επιτόκιο r και την μεταβλητότητα της μετοχής σ .

Άσκηση 5 Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (για $\alpha > 1$)

$$x^\alpha = \alpha(\alpha - 1) \int_0^\infty (x - K)^+ K^{\alpha-2} dK$$

και το θεώρημα Fubini για να εναλλάξουμε την ολοκλήρωση και την αναμενόμενη τιμή, έχουμε:

$$\mathbb{E}^\mathbb{Q}[S_T^\alpha] = \alpha(\alpha - 1) \int_0^\infty \mathbb{E}^\mathbb{Q}[(S_T - K)^+] K^{\alpha-2} dK.$$

Χρησιμοποιήστε αυτή την παρατήρηση και τον τύπο για την αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς:

$$c(S_0, T, K) = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

για να τιμολογήσετε το παράγωγο της προηγούμενης άσκησης.

Άσκηση 6 Τιμολογήστε τώρα το παράγωγο της άσκησης 4 λύνοντας τη διαφορική εξίσωση των Black και Scholes. Προσπαθήστε να βρείτε λύση της μορφής $V(t, x) = h(t)x^N$. Ποια διαφορική εξίσωση πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $h(t)$; Με ποια τελική συνθήκη; Λύστε τώρα αυτή την εξίσωση.

Άσκηση 7 Ένας χρηματιστής διαχειρίζεται το ακόλουθο χαρτοφυλάκιο δικαιωμάτων επί της μετοχής μιας εταιρείας:

Τύπος Δικαιώματος	Θέση	Δέλτα	Γάμμα	Βέγα
Αγοράς	-1.000	0,50	2,2	1,8
Αγοράς	-500	0,80	0,6	0,2
Πώλησης	-2.000	-0,40	1,3	0,7
Αγοράς	-500	0,70	1,8	1,4

Στο χρηματιστήριο παραγώγων είναι διατίθενται προς διαπραγμάτευση δύο δικαιώματα αγοράς της ίδιας μετοχής με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

Δέλτα	Γάμμα	Βέγα
0,60	1,5	0,8
0,10	0,5	0,6

Περιγράψτε τι συναλλαγές πρέπει να κάνει ο χρηματιστής για να κάνει το χαρτοφυλάκιο του ουδέτερο ως προς Γάμμα, Δέλτα και Βέγα.

Άσκηση 8 Χρησιμοποιώντας μια επαναληπτική μέθοδο βρείτε προσεγγιστικά την μεταβλητότητα μιας μετοχής αξίας €50, όπως τεκμαίρεται από ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς της μετοχής με ωρίμανση σε 6 μήνες, παραδοτέα τιμή €55, και τιμή διαπραγμάτευσης €2,50. Θεωρήστε το ετήσιο άνευ κινδύνου επιτόκιο (υπολογισμένο με συνεχή απόδοση) σταθερό και ίσο προς 5%.

Άσκηση 9 Η τιμή μιας μετοχής είναι €25. Η μελλοντική τιμή της για ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης με βραχυ διάρκεια είναι € F . Ποιά είναι η μεταβλητότητα της μετοχής που τεκμαίρεται από ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς της ίδιας μετοχής με ωρίμανση σε 6 μήνες, τιμή άσκησης € F και τιμή διαπραγμάτευσης €5; Θεωρήστε το άνευ κινδύνου επιτόκιο σταθερό. Δίνεται ότι $N(0, 2533) = 0,6$.

Άσκηση 10 Ένα παράγωγο μιας μετοχής έχει απόδοση στην ωρίμανση

$$f(S_T) = \begin{cases} S_T^2/S_0, & \text{αν } S_t \geq K \\ 0, & \text{αν } S_t < K, \end{cases}$$

όπου $t \in (0, T)$. Τιμολογήστε αυτό το παράγωγο βάσει του λογαριθμικού κανονικού υποδείγματος.

Άσκηση 11 Δείξτε ότι αν η $V(t, x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης των Black και Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) - rV(t, x) = 0, \quad t < T, \quad x > 0,$$

τότε η συνάρτηση

$$u(\tau, y) = e^{\frac{(\kappa+1)^2}{4}\tau + \frac{\kappa-1}{2}y} V\left(T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, e^y\right),$$

όπου $\kappa = 2r/\sigma^2$ είναι λύση της εξίσωσης της θερμότητας:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\tau, y), \quad \tau > 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 12 Τιμολογήστε το παράγωγο της άσκησης 3 με άνω και εκτός φράγμα στο K . ($S_0 < K$)

Άσκηση 13 Υπολογίστε το "Γάμμα" ενός δικαιώματος αγοράς με κάτω και εκτός φράγμα M , ωρίμανση T , και παραδοτέα τιμή K ($K > M$). Πώς συμπεριφέρεται το πρόσημο του "Γάμμα" κοντά στο φράγμα; Τι πλεονέκτημα προσφέρει το γεγονός αυτό στην αντιστάθμιση;

Άσκηση 14 α. Ποια διαφορική εξίσωση, σε ποιο χωρίο και με ποιες συνοριακές συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $p(t, x)$ ώστε η αξία τη χρονική στιγμή $t < T$ ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με άνω και εκτός φράγμα M (δεδομένου ότι δεν έχει χάσει την αξία του μέχρι τη στιγμή t) να είναι $p(t, S_t)$ ($M \geq S_0$ και $M \geq K$.)

β. Πώς αλλάζει το αποτέλεσμα αν $M < K$;

γ. Ποια είναι η τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με την ίδια παραδοτέα τιμή, αλλά με άνω και εντός φράγμα M ;