Περιεχομενα

0. Προλογος

Οι παρούσες σημειώσεις χρησιμοποιήθηκαν στις παραδόσεις του μαθήματος Φυσική Ι γιά την κατεύθυνση Εφαρμοσμένων Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Κρήτης το χειμερινό εξάμηνο 2013.

Οι σημειώσεις

- περιέχουν σχεδόν το σύνολο των παραδόσεων αλλά πιθανόν όχι το 100%,
- είναι πιθανόν να περιέχονται μικρά τμήματα τα οποία δεν διδάχθηκαν,
- σε ορισμένες ασκήσεις παρατίθεται μία αναλυτική λύση και σε άλλες συνοπτική,
- υπάρχουν (εκτός απροόπτου) ορισμένα λάθη και θα ήμουν ευγνώμων σε όποιον μου υποδείκνυε κάποιο από αυτά.

Σταύρος Κομηνέας
Ηράκλειο, 20/1/2014.

1. Εισαγωγη

1.1. **Φυσική και Μαθηματικά.** Η Φυσική κάνει περιγραφή του κόσμου, η οποία γίνεται με τα Μαθηματικά. Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται η ανάπτυξη νέων μαθηματικών μεθόδων ώστε να προχωρήσει η φυσική περιγραφή.

Στη Φυσική αξία έχει ό,τι είναι δυνατόν να δώσει μετρήσιμα αποτελέσματα. Έτσι, ενδιαφέροντα θεωρούνται και αναπτύσσονται τα μαθηματικά τα οποία θα χρησιμοποιηθούν προς αυτή την κατεύθυνση. Άλλα μαθηματικά εργαλεία, μέθοδοι, κλπ τα οποία δεν βοηθούν αυτόν τον σκοπό, δεν εκτιμώνται. Στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά βρισκόμαστε κοντά σε αυτόν τον τρόπο επιστημονικής προόδου. Εδώ, οι αφορμές γιά νέες μαθηματικές μεθόδους δίνονται από προβλήματα που προκύπτουν στο χώρο της Φυσικής και άλλων επιστημών και μπορούν να συνεισφέρουν στην περιγραφή ή στη λύση τους.

Παρατήρηση 1. *Σε τι θα μπορούσε να χρησιμεύσει η Φυσική όσον αφορά τη Χρηματοοικονομία, τη Μαθηματική Μοντελοποίηση, την Ανάλυση (ή όποια άλλη δική μου μαθηματική κατεύθυνση) ;*

Μπορούμε να δούμε ότι η Φυσική προσφέρει πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα γιά τα οποία μία αυστηρή Μαθηματική Μοντελοποίηση θα ήταν ενδιαφέρουσα και χρήσιμη.

Τα προβλήματα αυτά μπορεί να έχουν ιδιαίτερες απαιτήσεις σε Μαθηματική Ανάλυση και έτσι παρουσιάζουν ενδιαφέρον γιά έναν μαθηματικό.

Ας δούμε παραδείγματα. Η Μηχανική αναπτύχθηκε τους περασμένους αιώνες με αφορμή την ανάγκη περιγραφής κινήσεως σωμάτων (π.χ., ουρανίων σωμάτων). Πολλοί μαθηματικοί ανέπτυξαν μία σειρά μεθόδων οι οποίες σήμερα χρησιμοποιούνται στον κλάδο της Φυσικής που λέγεται "Κλασσική Μηχανική".

Δεν μπορούμε να δώσουμε μία εξ' ίσου σαφή απάντηση όσον αφορά την Χρηματοοικονομία. Ας καταφύγουμε λοιπόν στην παρατήρηση και στη μέτρηση (δηλαδή στην κατ' εξοχήν μέθοδο της Φυσικής): η ανάπτυξη ομάδων χρηματοοικονομικής ανάλυσης σε επενδυτικές τράπεζες, όπως άρχισαν να διαμορφώνονταν πριν δύο δεκαετίες, βασίστηκε σε φυσικούς οι οποίοι κατάφεραν να θέσουν και να μελετήσουν τα σχετικά θέματα με βάση τις δικές τους επιστημονικές εμπειρία. Αυτές οι ομάδες σήμερα αποτελούνται από φυσικούς και μαθηματικούς.

1.2. **Μετρήσεις και μονάδες.** Αντιμετωπίζουμε ως πρώτο πρόβλημα το ότι χρειαζόμαστε μία συμφωνία ως προς το πώς μετράμε τα φυσικά μεγέθη. Χρειαζόμαστε πρότυπα μεγέθη (μήκος, χρόνος κλπ) με τα οποία θα κάνουμε μετρήσεις, δηλαδή, θα συγκρίνουμε κάθε άλλο μέγεθος.

Στο πιό διαδεδομένο σύστημα μονάδων (S.I.) τα πρότυπα μεγέθη, δηλαδή, οι μονάδες, ορίστηκαν με βάση την "*ανθρώπινη κλίμακα*". Π.χ., το μέτρο (μονάδα μήκους) είναι στα μέτρα του μεγέθους που αναγνωρίζουμε στην καθημερινή ζωή.

Πάντως, με αυτό τον ορισμό, κάποια βασικά μεγέθη της Φυσικής, έχουν άβολες τιμές. Γιά παράδειγμα, η ταχύτητα του φωτός προκύπτει να έχει τη μεγάλη τιμή

$$c = 299\,792\,458\,\text{meters/sec} \approx 3 \times 10^8\,\text{m/sec}.$$

Ως μονάδα χρόνου κάποτε οριζόταν ένα κλάσμα της μέσης ηλιακής ημέρας. Τώρα, το *δευτερόπλεπτο* ορίζεται ως το χρονικό διάστημα που απαιτείται γιά να κάνει ενεργειακές μεταπτώσεις (9 192 631 770 *κύκλους*) ένα άτομο καισίου. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται με μεγάλη ακρίβεια η μονάδα χρόνου.

Ως μονάδα μάζας έχουμε το *χιλιόγραμμο.*

Σε κάθε πρόβλημα βρισκόμαστε αντιμέτωποι με διαφορετικές κλίμακες μεγεθών. Έτσι βρισκόμαστε στην ανάγκη να ορίζουμε πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια των βασικών μονάδων. Ας δούμε παραδείγματα.

- Η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/sec} = 300\,000\,\mathrm{km/sec}$.
- Ένα σωματίδιο ή ένα φιλμ από τα μικρότερα που μπορούν να κατασκευαστούν έχει διαστάσεις μερικών νανομέτρων (nm), δηλαδή, μερικών $10^{-9}\,\mathrm{m}$.
- Ένας σκληρός δίσκος έχει χωρητικότητα δεδομένων 500 Gigabyte/in^2, δηλαδή, 500×10^9 byte/in^2 (σημειώστε ότι $1\,\mathrm{inch} = 2.54\,\mathrm{cm}$).
- Η εγγραφές στη μνήμη ενός υπολογιστή γίνεται προσπάθεια να συμβαίνουν σε χρόνους picosecond ($10^{-12}\,\mathrm{sec}$).

Γενικότερα:

kilo−	10^3	milli−	10^{-3}
mega−	10^6	micro−	10^{-6}
giga−	10^9	nano−	10^{-9}
tera−	10^{12}	pico−	10^{-12}.

Παράδειγμα 1.1. Η μεγαλύτερη ταχύτητα που έχει επιτευχθεί από αυτοκίνητο είναι 1228 km/h. Ποιά είναι αυτή η ταχύτητα στις συνηθισμένες μονάδες της Φυσικής (m/sec);
Λύση.

$$1228\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \left(1228 \times 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}\right)\left(\frac{1\,\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{sec}}\right) = 341.1\,\mathrm{m/sec}.$$

Παρατηρήστε ότι η δεύτερη παρένθεση (μετά την 1η ισότητα) είναι ίση με τη μονάδα, διότι $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{sec}$.

Κάθε εξίσωση της Φυσικής είναι μία ισότητα μεταξύ αριθμών αλλά επίσης είναι και μία ισότητα μεταξύ διαστάσεων. Γιά παράδειγμα, αν ένα σώμα έχει ταχύτητα v, τότε σε χρόνο t διανύει απόσταση d ίση με

$$d = vt.$$

Ώστε, αν υποθέσουμε τις τιμές $v = 2\,\mathrm{m/sec}$ και $t = 5\,\mathrm{sec}$ τότε το δεξιό μέλος της εξίσωσης δίνει $(2\,\mathrm{m/sec})(5\,\mathrm{sec}) = 10\,\mathrm{m} \Rightarrow d = 10\,\mathrm{m}$ και αυτό πραγματικά εκφράζει μήκος, όπως φαίνεται από τις μονάδες του αποτελέσματος.

1.3. **Ασκήσεις.**

***Άσκηση* 1.1.** ([1] π.4) Σύμφωνα με τον θρύλο ο Φειδιππίδης έτρεξε από τον Μαραθώνα στην Αθήνα το 490 π.χ. με ταχύτητα 23 ιππικών ανά ώρα. Το "ιππικό" ήταν μονάδα μέτρησης μήκους στην Αρχαία Ελλάδα: 1 ιππικό ήταν 4 στάδια και 1 στάδιο οριζόταν να είναι 6 πλέθρα. Ξέρουμε ότι ένα πλέθρο είναι ίσο με 30.8 m. Πόσο γρήγορα έτρεχε ο Φειδιππίδης σε m/sec;
Λύση. Χρησιμοποιούμε απλούς λόγους μεταξύ μονάδων:

$$23\,\text{ιππικά/h} = \left(23\,\frac{\text{ιππικά}}{\mathrm{h}}\right)\left(\frac{4\,\text{στάδια}}{1\,\text{ιππικό}}\right)\left(\frac{6\,\text{πλέθρα}}{\text{στάδιο}}\right) = 552\,\left(\frac{\text{πλέθρα}}{\mathrm{h}}\right).$$

Χρειαζόμαστε ένα ακόμα βήμα:

$$552\,\left(\frac{\text{πλέθρα}}{\mathrm{h}}\right) = 552\,\left(\frac{\text{πλέθρα}}{\mathrm{h}}\right)\left(\frac{30.8\,\mathrm{m}}{\text{πλέθρο}}\right)\left(\frac{1\,\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{sec}}\right) = 4.7\,\mathrm{m/sec}.$$

Ερώτηση: σε πόσο χρόνο έτρεξε ο Φειδιππίδης την απόσταση του Μαραθωνίου;

***Άσκηση* 1.2.** Η Γη είναι κατά προσέγγιση σφαίρα ακτίνας $6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$. Πόση είναι (α) η περιφέρειά της σε km; (β) η επιφάνειά της σε km^2; (γ) ο όγκος της σε km^3;
Λύση. .

(α)

$$2\pi \times 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m} = (12.74\pi \times 10^6)\,\mathrm{m}\,\frac{1\,\mathrm{km}}{1000\,\mathrm{m}} = 4 \times 10^4\,\mathrm{km}.$$

(β)

$$4\pi(6.37\times10^6)^2\,\mathrm{m}^2 = 510\times10^{12}\,\mathrm{m}^2 = 510\times10^6\,\mathrm{km}^2 = 5.10\times10^8\,\mathrm{km}^2.$$

(γ)

$$\frac{4\pi}{3}(6.37\times10^6)^3\,\mathrm{m}^3 = 1080\times10^{18}\,\mathrm{m}^3 = 1083\times10^9\,\mathrm{km}^3 = 1.08\times10^{12}\,\mathrm{km}^3.$$

Καλύτερα θα ήταν αν γράφαμε την ακτίνα ως $6.37\times10^3\,\mathrm{km}$. Ωστε, π.χ., η επιφάνεια είναι $4\pi(6.37\times10^3)^2\,\mathrm{km}^2 = 5.10\times10^8\,\mathrm{km}^2$.

2. Κινηση σε μια διασταση

2.1. **Θέση και ταχύτητα.** Ας υποθέσουμε ότι ένα αυτοκίνητο κινείται σε έναν διάδρομο (αυτοκινητόδρομο, πίστα, κλπ). Γιά να περιγράψουμε την κίνησή του είναι βολικό να θεωρήσουμε ότι η θέση του βρίσκεται σε ένα σημείο. Αυτό σημαίνει ότι όλο το αυτοκίνητο θα θεωρήσουμε ότι βρίσκεται σε ένα σημείο. Στο σημείο αυτό θα μπορούσε να είναι ένα αντιπροσωπευτικό σημείο του αυτοκινήτου. Γιά την περίπτωση αγώνων αυτοκινήτων, αυτό θα ήταν η μπροστινή άκρη του. Αν το κινητό βρίσκεται σε μία αρχική χρονική στιγμή στη θέση εκκίνησης, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι γνωρίζουμε ότι την χρονική στιγμή $t_1 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_1 = 0$. Είναι σαφέστερο να πούμε ότι θέτουμε την δεδομένη χρονική στιγμή ως $t = 0$ και την θέση ως $x = 0$. Μετά από περέλευση κάποιου χρόνου t_2 το κινητό έχει διανύσει μία απόσταση x_2. Γενικά, ως θέση x του κινητού, θεωρούμε την απόστασή που έχει διανύσει από ένα αρχική σημείο το οποίο έχουμε ορίσει, κατά σύμβαση, ότι είναι το σημείο αρχής, όπου $x = 0$.

Αν το κινητό βρίσκεται στη θέση $x = x_1$ την χρονική στιγμή $t = t_1$ και στην θέση $x = x_2$ την χρονική στιγμή $t = t_2$, τότε διανύει απόσταση $\Delta x = x_2 - x_1$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$.

Ορίζουμε ως *μέση ταχύτητα* τον λόγο

$$v_\mu = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2.1}$$

Π.χ., γιά $x_1 = 19\,\mathrm{m},\ x_2 = 277\,\mathrm{m}$ και $t_1 = 1\,\mathrm{sec},\ t_2 = 4\,\mathrm{sec}$ έχουμε

$$v_\mu = \frac{277\,\mathrm{m} - 19\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{sec} - 1\,\mathrm{sec}} = 86\,\mathrm{m/sec}.$$

Δείτε ότι αν εναλλάξουμε τις τιμές $x_1 = 277\,\mathrm{m},\ x_2 = 19\,\mathrm{m}$ τότε η ταχύτητα θα ήταν αρνητική $v_\mu = -86\,\mathrm{m/sec}$. Το πρόσημο της ταχύτητας μας λέει, κατά σύμβαση, εάν η κίνηση είναι προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά.

Παρατήρηση 2. *Αν σχεδιάσουμε μία ευθεία επάνω στην οποία κινείται το σωμάτιο, τότε κάθε σημείο παριστάνει μία δυνατή θέση του κινητού. Αν επιλέξουμε ένα δεδομένο σημείο O ως σημείο αναφοράς (σημείο μηδέν), τότε κάθε σημείο της ευθείας μπορεί να ορισθεί από την απόστασή του από το O. Την απόσταση ονομάζουμε x και θέτουμε θετικό πρόσημο γιά τα σημεία δεξιά του O και αρνητικό πρόσημο γιά τα σημεία αριστερά του O.*

2.2. **Στιγμιαία ταχύτητα.** Έστω ότι γιά το κινητό που είδαμε έχουμε την επιπλέον πληροφορία ότι βρίσκεται στη θέση $x = 119\,\mathrm{m}$ τη χρονική στιγμή $t = 3\,\mathrm{sec}$. Αυτό δίνει ταχύτητα

$$v_\mu = \frac{119\,\mathrm{m} - 19\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{sec} - 1\,\mathrm{sec}} = 50\,\mathrm{m/sec}.$$

Μπορούμε επίσης να υπολογίζουμε ότι στο χρόνο $t = 3\,\mathrm{sec}$ έως $t = 4\,\mathrm{sec}$ η ταχύτητα είναι

$$v_\mu = \frac{277\,\mathrm{m} - 119\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{sec} - 3\,\mathrm{sec}} = 158\,\mathrm{m/sec}.$$

Αν μετρήσουμε την θέση σε περισσότερες χρονικές στιγμές θα έχουμε πιό λεπτομερή καταγραφή της ταχύτητας και αυτή μπορεί να αλλάζει σε κάθε χρονικό διάστημα. Γιά κάθε χρονικό διάστημα Δt το κινητό διανύει απόσταση Δx, αν έχουμε τη δυνατότητα να μετρήσουμε οσοδήποτε μικρά διαστήματα Δt τότε τα ονομάζουμε dt και τις αντίστοιχες μετατοπίσεις ονομάζουμε dx. Η ταχύτητα τότε είναι

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{2.2}$$

Αυτή είναι η *στιγμιαία ταχύτητα* την στιγμή t_1, αλλά και τη στιγμή t_2 αφού η τελευταία είναι ακριβώς δίπλα στην πρώτη.

Παράδειγμα 2.1. ([1] σελ. 19) Οδηγείτε αγροτικό αυτοκίνητο σε δρόμο γιά $8.4\,\mathrm{km}$ με $70\,\mathrm{km/h}$, όπου το αυτοκίνητο ξεμένει από καύσιμα και σταματά. Γιά τα επόμενα $30\,\mathrm{min}$ περπατάτε $2\,\mathrm{km}$ επιπλέον μέχρι να φθάσετε στο επόμενο πρατήριο καυσίμων.

(α) Πόση είναι η συνολική σας μετατόπιση;
(β) Πόσο είναι το συνολικό χρονικό διάστημα Δt κατά το οποίο κινηθήκατε;
(γ) Πόση ήταν η στιγμιαία και η μέση ταχύτητά σας;
Λύση. (α) $\Delta x = 8.4\,\mathrm{km} + 2\,\mathrm{km} = 10.4\,\mathrm{km}$

(β) $\Delta t = \Delta x / v$. Άρα

$$\Delta t = \frac{8.4\,\mathrm{km}}{70\,\mathrm{km/h}} + 30\,\mathrm{min} = 0.12\,\mathrm{h} + 0.5\,\mathrm{h} = 0.62\,\mathrm{h} \quad (= 37.2\,\mathrm{min}).$$

(γ) Μέση ταχύτητα

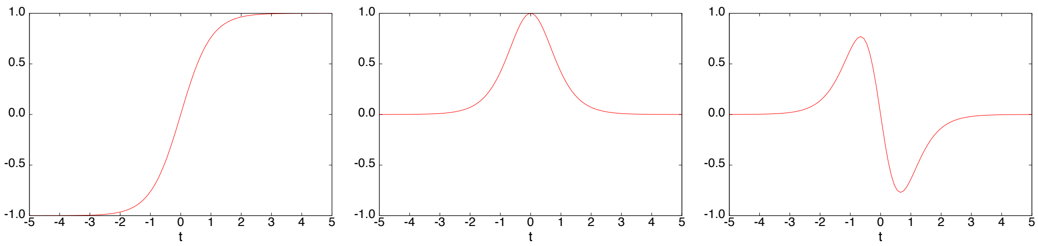
$$v_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10.4\,\mathrm{km}}{0.62\,\mathrm{h}} = 16.8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Στιγμιαία ταχύτητα (σχήμα $x = x(t)$)

$$v = 70\,\mathrm{km/h}, \qquad v = \frac{2\,\mathrm{km}}{30\,\mathrm{min}} = 4\,\mathrm{km/h}.$$

Παρατήρηση 3. *Το πρόσημο της ταχύτητας δίνει την κατεύθυνση της κίνησης. Το μέτρο της ταχύτητας χρησιμοποιείται όταν μας ενδιαφέρει η μεταβολή της θέσης με τον χρόνο και όχι η κατεύθυνση της κίνησης.*

Παράδειγμα 2.2. Το σχήμα αριστερά δίνει τη θέση σωματίου $x = x(t)$. Η κλίση της καμπύλης είναι αρχικά μηδέν, μετά περίπου σταθερή και τελικά πάλι μηδέν. Η κλίση δίνει την ταχύτητα του κινητού, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο μεσαίο σχήμα. Η επιτάχυνση του κινητού (η οποία είναι η κλίση της ταχύτητας) δίνεται στο δεξιό σχήμα. Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση είναι μη-μηδενική στα σημεία που μεταβάλλεται η ταχύτητα. □



2.3. **Επιτάχυνση.** Μεταβολή της ταχύτητας μετράται από τον λόγο

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{2.3}$$

όπου η ταχύτητα είναι v_1 στον χρόνο t_1 και v_2 στον χρόνο t_2. Την παραπάνω ονομάζουμε *μέση επιτάχυνση*.

Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{2.4}$$

και μπορεί να είναι διαφορετική κάθε χρονική στιγμή.

Η επιτάχυνση είναι ένα σημαντικό φυσικό μέγεθος, πράγμα που το αντιλαμβάνεται κανείς όταν ξεκινάει ένα τρένο από την ακινησία μέχρι τη μέγιστη ταχύτητά του, όταν ξεκινάει ένα ασανσέρ, κλπ.

Αν η ταχύτητά μας αυξάνεται με τον χρόνο τότε $a > 0$ και αν μειώνεται τότε $a < 0$, οπότε λέμε ότι έχουμε *επιβράδυνση*.

Βλέπουμε ότι

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \tag{2.5}$$

η οποία είναι η δεύτερη παράγωγος της θέσης ως προς χρόνο.

Παράδειγμα 2.3. ([1] σελ. 24) Έστω η θέση ενός σωματίου η οποία δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = 4 - 27t + t^3.$$

Λύση. Η ταχύτητά του είναι

$$v = \frac{dx}{dt} = -27 + 3t^2.$$

Η επιτάχυνσή του είναι

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t.\square$$

Παρατήρηση 4. *Το πρόσημο της επιτάχυνσης δεν μας λέει από μόνο του αν το σώμα επιταχύνεται ή επιβραδύνεται. Πρέπει να συγκρίνουμε τα πρόσημα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.*

2.3.1. *Σταθερή επιτάχυνση.* Έστω ότι η επιτάχυνση ενός σωματίου είναι σταθερή. Αυτό επιτυγχάνεται αν η ταχύτητά του είναι

$$v = v_0 + a_0\, t, \tag{2.6}$$

όπου v_0, a_0 είναι σταθερές. Βλέπουμε τότε πραγματικά ότι

$$a = \frac{dv}{dt} = a_0.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η μέση επιτάχυνση είναι

$$a_\mu = \frac{(v_0 + a_0 t_2) - (v_0 + a_0 t_1)}{t_2 - t_1} = a_0$$

δηλαδή είναι σταθερή και ίση με την στιγμιαία επιτάχυνση.

Η θέση του σωματίου δίνεται από

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2, \qquad x_0 : \text{σταθερά}. \tag{2.7}$$

Πραγματικά, έχουμε

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t. \tag{2.8}$$

Η σταθερά v_0 δίνει την v γιά $t = 0$.

2.4. **Σχετική ταχύτητα.** Η ταχύτητα με την οποία κινείται έναν κινητό έχει νόημα να μετρηθεί μόνο σε σχέση με ένα άλλο σώμα. Γιά παράδειγμα, όλα όσα βλέπουμε ακίνητα γύρω μας θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι κινούνται με την ταχύτητα που κινείται η Γη.

Παράδειγμα 2.4. Έστω ότι βρισκόμαστε σε αυτοκίνητο που τρέχει με $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$, ενώ ένα άλλο αυτοκίνητο κοντά μας κινείται με $v_2 = 100\,\mathrm{km/h}$. Με τι ρυθμό βλέπουμε να αλλάζει θέση το 2η αυτοκίνητο ως προς τη δική μας θέση;
Λύση. Η δική μας θέση είναι $x_1 = a + v_1 t$, ενώ η θέση του άλλου αυτοκινήτου είναι $x_2 = b + v_2 t$. Η θέση του 2ου αυτοκινήτου ώς προς την δική μας είναι

$$x_2 - x_1 = b - a + (v_2 - v_1)t,$$

ή αλλιώς, $\Delta x = c + vt$ όπου, Δx η απόσταση του 2ου από το δικό μας αυτοκίνητο,

$$v = v_2 - v_1$$

η σχετική ταχύτητα του άλλου αυτοκινήτου ως προς το δικό μας (δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της σχετικής θέσης του) και $c = b - a$ η διαφορά των θέσεών μας γιά $t = 0$. $\square$

Γιά να μετρήσουμε ταχύτητες θεωρούμε την ύπαρξη ενός συστήματος αναφοράς και μετράμε ταχύτητες σωμάτων ως προς αυτό το σύστημα. Κάθε άλλο σύστημα το οποίο κινείται ευθύγραμμα, με σταθερή ταχύτητα, ως προς σύστημα αναφοράς μπορεί επίσης να χρησιμεύσει ως σύστημα αναφοράς. Όλα αυτά τα συστήματα λέγονται *αδρανειακά συστήματα αναφοράς*.

Δείτε ότι η επιτάχυνση σώματος δεν εξαρτάται από το επιλεγόμενο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Π.χ., το αυτοκίνητο του παραδείγματος, αν επιταχύνει με μία επιτάχυνση a τότε θα βρίσκεται σε θέση $x_2 = b + v_2 t + (1/2)a_2 t^2$. Η επιτάχυνσή του θα είναι ίδια ως προς το έδαφος όπως και ως προς το δικό μας αυτοκίνητο, διότι

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = a_2, \qquad \frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = a_2. \tag{2.9}$$

Δεν είναι όλα τα συστήματα αδρανειακά. Γιά να το δούμε αυτό ας πάρουμε ένα αδρανειακό σύστημα και ένα άλλο το οποίο επιταχύνεται ως προς το αδρανειακό. Τότε η επιτάχυνση ενός κινητού είναι διαφορετική στο αδρανειακό από ότι στο επιταχυνόμενο σύστημα. Π.χ., ένα σώμα που είναι ακίνητο στο αδρανειακό σύστημα βλέπουμε να επιταχύνεται στο μη άλλο σύστημα.

2.5. **Ταχύτητα και θέση μέσω ολοκλήρωσης γιά σταθερή επιτάχυνση.** Γιά την περίπτωση σταθερής επιτάχυνσης $a = a_0$ έχουμε τη σχέση

$$dv = a\,dt, \qquad a: \text{σταθερά}, \tag{2.10}$$

δηλαδή, η ταχύτητα αυξάνεται ανάλογα του χρόνου. Μπορούμε να πάρουμε το *αόριστο ολοκλήρωμα* (ή αλλιώς *αντιπαράγωγο*) των δύο μελών της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \int dv &= \int a_0\,dt \\ \Rightarrow \int dv &= a_0 \int dt \\ \Rightarrow v &= v_0 + a_0 t. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Το v_0 είναι σταθερά και γιά $t = 0$ έχουμε $v = v_0$.

Ένα επόμενο βήμα προκύπτει από τον ορισμό της ταχύτητας

$$dx = v dt. \tag{2.12}$$

Παίρνουμε πάλι το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int dx &= \int v\,dt \\ \Rightarrow \int dx &= \int (v_0 + a_0 t)\,dt \\ \Rightarrow \int dx &= \int v_0\,dt + a_0 \int t\,dt \\ \Rightarrow x &= x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2} a_0 t^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Παράδειγμα 2.5. Γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση της πτώσης κοντά στην επιφάνεια της Γης είναι $g = 9.8\,\mathrm{m/sec}^2$. Ποιά είναι η θέση μίας μπάλας που εκτοξεύεται κατακόρυφα με ταχύτητα v_0;
Λύση. Η θέση κινητού με σταθερή επιτάχυνση $a = -g$ δίνεται από την

$$y = y_0 + v_0\,t - \frac{1}{2} g t^2$$

όπου χρησιμοποιούμε το y γιά τη θέση αφού μιλάμε γιά κατακόρυφη κίνηση. Παίρνουμε κατά σύμβαση τη φορά προς τα επάνω ώς θετική ώστε θεωρούμε την επιτάχυνση της βαρύτητας αρνητική. Το y_0 είναι η αρχική θέση του κινητού (γιά $t = 0$) και το v_0 είναι η αρχική του ταχύτητα (ταχύτητα εκτόξευσης). □

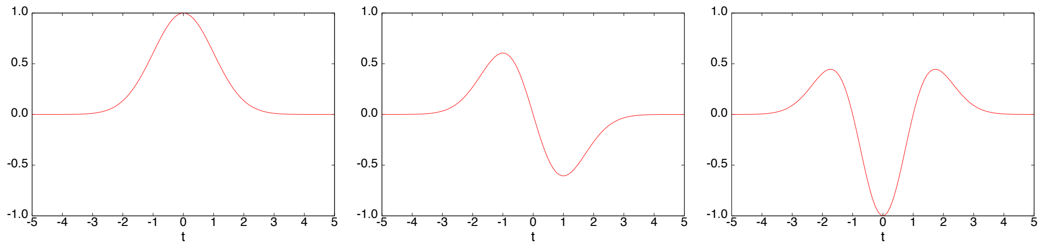
2.6. Ερωτήσεις.

Άσκηση 2.1. ([1] σελ. 91) Ένα αυτοκίνητο τρέχει αρχικά με ταχύτητα $v_0 = 78\,\mathrm{km/h}$ και κάποια στιγμή φρενάρει και αυτό του δίνει σταθερή επιβράδυνση. Τελικά το αυτοκίνητο χρειάζεται $\tau = 12\,\mathrm{sec}$ μέχρι να σταματήσει τελείως. Πόση είναι η επιτάχυνσή του;

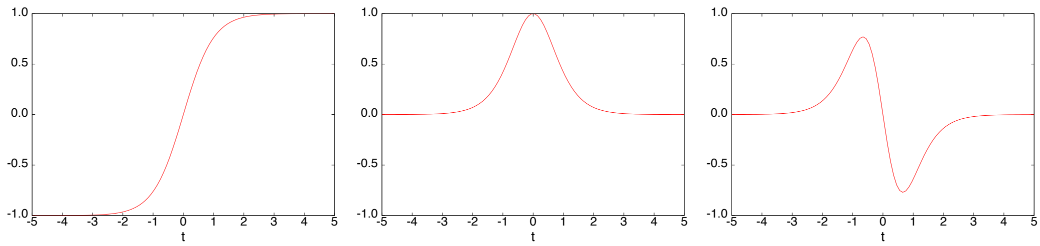
Λύση.

$$a = \frac{0 - v_0}{\tau} = \frac{-78}{12} = -6.5\,\mathrm{m/sec^2}.$$

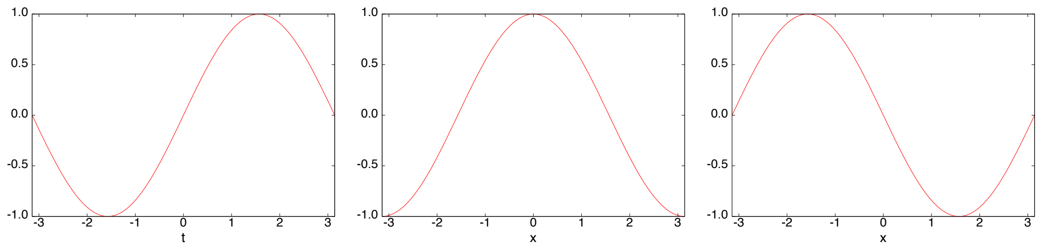
Άσκηση 2.2. Σχεδιάστε μία τυχούσα καμπύλη $x(t)$ και συζητήστε την ταχύτητα και επιτάχυνση του κινητού.



Σχημα 1. (α) Γκαουσιανή $x(t) = e^{-t^2/2}$ γιά τη θέση κινητού. (β) Η ταχύτητα $dx/dt = -t\,e^{-t^2/2}$. (γ) Η επιτάχυνση $d^2x/dt^2 = (t^2-1)\,e^{-t^2/2}$.



Σχημα 2. (α) Η θέση κινητού $x(t) = \tanh(t)$. (β) Η ταχύτητα $dx/dt = 1 - \tanh^2(t)$. (γ) Η επιτάχυνση $d^2x/dt^2 = -2\tanh(t)\,(1-\tanh^2(t))$.



Σχημα 3. (α) Η θέση κινητού $x(t) = \sin(t)$. (β) Η ταχύτητα $dx/dt = \cos(t)$. (γ) Η επιτάχυνση $d^2x/dt^2 = -\sin(t)$.

Λύση.

2.7. Ασκήσεις.

Άσκηση 2.3. ([1] σελ. 31) Ένα παιδί πετάει μία μπάλα κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα $v_0 = 12\,\mathrm{m/sec}$. (α) Πόσο χρόνο χρειάζεται η μπάλα γιά να φθάσει στο μέγιστο ύψος της; (β) Πόσο είναι το μέγιστο ύψος που φθάνει η μπάλα; (γ) Πόσο χρόνο κάνει η μπάλα γιά να φθάσει σε ύψος 5 m.

Λύση. (α) Η μπάλα υπόκειται σε σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9.8\,\mathrm{m/sec}$, με φορά προς τα κάτω (αντίθετη στην αρχική της ταχύτητα $v_0 > 0$). Η ταχύτητα της μπάλας είναι

$$v = v_0 - gt.$$

Έχουμε $v(t=0) = v_0 > 0$ και το v μειώνεται με τον χρόνο. Όταν $v = 0$ η μπάλα έχει φθάσει στο μέγιστο ύψος (αφού μετά θα έχουμε $v < 0$). Ο χρόνος $t = t_m$ γιά $v = 0$ είναι

$$0 = v_0 - gt_m \Rightarrow t_m = \frac{v_0}{g} = \frac{12}{9.8}\,\mathrm{m} = 1.2\,\mathrm{sec}.$$

(β) Η θέση της μπάλας είναι

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

όπου θεωρούμε ότι η εκτόξευση γίνεται από την επιφάνεια του εδάφους $y = 0$. Θέτουμε $t = t_m$ και παίρνουμε

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \ldots = 7.3\,\mathrm{m}.$$

(γ) Δίνεται από τη λύση ενός τριωνύμου

$$5 = 12t - 4.9t^2 \Rightarrow t = 0.53\,\mathrm{sec}, \qquad t = 1.9\,\mathrm{sec}.$$

Έχουμε δύο λύσεις. Η μικρότερη τιμή δίνει το χρόνο που κάνει η μπάλα γιά να φθάσει στη θέση $y = 5\,\mathrm{m}$ κατά την άνοδό της και η μεγαλύτερη τιμή δίνει τον χρόνο που η μπάλα περνά από την ίδια θέση κατά την κάθοδό της.

Άσκηση 2.4. ([2], ασκ 3.35) Ένα σώμα ξεκινάει, ενώ ήταν ακίνητο, από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου και κατεβαίνει προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση. Το κεκλιμένο επίπεδο έχει μήκος $d = 2\,\mathrm{m}$ και το σώμα χρειάζεται $t_1 = 3\,\mathrm{sec}$ γιά να φθάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Βρείτε (α) την επιτάχυνση του σώματος, (β) την ταχύτητά του στο χαμηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου, (γ) τον χρόνο που χρειάζεται το σώμα γιά να φθάσει στο μέσο του κεκλιμένου επιπέδου και (δ) την ταχύτητά του στο μέσο.
Λύση. (α) Η επιτάχυνση είναι σταθερή $a = g\sin\theta$, όπου θ η κλίση του επιπέδου.

$$d = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow a = \frac{2d}{t_1^2} = \frac{2\times 2}{3^2}\,\mathrm{m/sec^2} = \frac{4}{9}\,\mathrm{m/sec^2}.$$

(β)

$$v_1 = at_1 = \frac{4}{3}\,\mathrm{m/sec}.$$

(γ)

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}at_{1/2}^2 \Rightarrow t_{1/2} = \sqrt{\frac{d}{a}}.$$

(δ)

$$v_{1/2} = at_{1/2} = \sqrt{ad}.$$

Άσκηση 2.5. ([1] σελ 37, ασκ 2.20) Η θέση σωματίου δίνεται από την

$$x = 12t^2 - 2t^3,$$

όπου η θέση είναι σε m και ο χρόνος σε sec. Βρείτε την (α) θέση, (β) ταχύτητα και (γ) επιτάχυνση του σωματίου την χρονική στιγμή $t = 3\,\mathrm{sec}$. (δ) Ποιά είναι η τιμή της μέγιστης θετικής συντεταγμένης x στην οποία φθάνει το σωματίδιο; (ε) Ποιά είναι η μέγιστη θετική ταχύτητα που επιτυγχάνει το σωματίδιο; (ζ) Πόση είναι η επιβράδυνση του σωματίου τη στιγμή που αυτό βρίσκεται στιγμιαία ακίνητο ($v = 0$); (η) Ποιά η μέση ταχύτητα του σωματίου το χρονικό διάστημα $t = 0$ έως $t = 3\,\mathrm{sec}$;

Άσκηση 2.6. ([1] σελ 37, ασκ 2.18) Η θέση σωματίου δίνεται από την

$$x = 20t - 5t^3,$$

όπου η θέση είναι σε m και ο χρόνος σε sec. (α) Σε ποιό χρόνο μηδενίζεται η ταχύτητα του σωματίου; (β) Πότε μηδενίζεται η επιτάχυνσή του; (γ) Σε ποιό εύρος χρόνων η επιτάχυνση είναι θετική και σε ποιό αρνητική; (δ) Κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των $x(t), v(t), a(t)$.
Λύση. (α)

$$v = \frac{dx}{dt} = 20 - 15t^2$$

Γιά $v = 0$ έχουμε

$$t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(β) Επιτάχυνση

$$a = -30t$$

άρα μηδενίζεται γιά $t = 0$.

(γ) Έχουμε $a > 0$ γιά $t < 0$ και $a < 0$ γιά $t > 0$.

(δ) Γιά να κάνουμε την γραφική παράσταση του $x(t)$ παρατηρούμε ότι έχει ακρότατα εκεί που $v = 0$. Το είδος του ακροτάτου (μέγιστο ή ελάχιστο) καθορίζεται από το πρόσημο της επιτάχυνσης a.

Άσκηση 2.7. ([1] σελ 37, ασκ 23) Ένα ηλεκτρόνιο έχει σταθερή επιτάχυνση $a_0 = 3.2\,\mathrm{m/sec}^2$. Κάποια στιγμή t_0 η ταχύτητά του είναι $v_0 = 9.6\,\mathrm{m/sec}$. Πόση είναι η ταχύτητά του (α) 2.5 sec πριν και πόση (β) 2.5 sec μετά την t_0;
Λύση. Η ταχύτητα, γιά σταθερή επιτάχυνση, είναι

$$v = v_0 + a_0(t - t_0).$$

(α)

$$v = 9.6 - 3.2 \cdot 2.5 = 1.6\,\mathrm{m/sec}.$$

(β)

$$v = 9.6 + 3.2 \cdot 2.5 = 17.6\,\mathrm{m/sec}.$$

Άσκηση 2.8. Η επιτάχυνση υλικού σημείου δίνεται από την

$$\vec{a} = \alpha t^2\,\vec{i} + \beta t\,\vec{j}.$$

Να βρεθούν οι $\vec{v}(t)$ και $\vec{r}(t)$, θεωρώντας αρχικές συνθήκες $\vec{r}(t=0) = 0$ και $\vec{v}(t=0) = 0$.
Λύση. Θέτουμε $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ και $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ με $a_x = \alpha t^2,\ a_y = \beta t$. Έχουμε

$$v_x(t) = \int a_x\,dt = \ldots = \frac{1}{3}\alpha t^3$$
$$v_y(t) = \int a_y\,dt = \ldots = \frac{1}{2}\beta t^2.$$

Επίσης, θέτουμε $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ και έχουμε

$$x(t) = \int v_x\,dt = \ldots = \frac{1}{12}\alpha t^4$$
$$y(t) = \int v_y\,dt = \ldots = \frac{1}{6}\beta t^3.$$

3. Διανύσματα

3.1. **Θέση σημειακού σώματος.** Γιά να περιγράψουμε την θέση ενός σημειακού σώματος το οποίο μπορεί να κινείται επάνω σε ένα επίπεδο (π.χ., ένα μυρμήγκι επάνω σε επίπεδο έδαφος) χρειαζόμαστε ένα κατάλληλο σύστημα αναφοράς. Ορίζουμε ένα τυχόν σημείο O ως αρχή του συστήματος αναφοράς. Θεωρούμε δύο ευθείες που περνούν από το O και είναι κάθετες μεταξύ τους (σχήμα). Τις ονομάζουμε άξονες Ox και Oy. Κάθε σημείο του επιπέδου P μπορεί να ορισθεί μέσω ενός διανύσματος $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

Ας προβάλουμε το διάνυσμα σε κάθε έναν από τους άξονες. Δηλαδή, ας πάρουμε γραμμές παράλληλες προς τους άξονες από το P, και ας σημειώσουμε τα σημεία A και B των τομών με τους Ox, Oy. Μπορούμε να θεωρήσουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, τα οποία λέμε συνιστώσες του διανύσματος $\overrightarrow{OP}$. Βλέπουμε ότι

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \tag{3.1}$$

με την έννοια ότι μπορούμε να μεταφερθούμε από το O στο P με τους εξής δύο τρόπους: (α) είτε απευθείας, είτε (β) αν ξενικήσουμε από το O προς το A και μετά μετακινηθούμε κατά την διεύθυνση του $\vec{OB}$. Με αυτή την έννοια τα διανύσματα που ορίσαμε είναι *διανύσματα μετατόπισης*.

Παρατήρηση 5. *Θα ονομάσουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ συνιστώσες του διανύσματος $\overrightarrow{OP}$.*

3.2. **Πράξεις με διανύσματα.** Η γεωμετρική πρόσθεση διανυσμάτων ορίστηκε παραπάνω. Χρησιμοποιώντας συνοπτικότερα σύμβολα γράφουμε (σχήμα)

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}. \tag{3.2}$$

Μεταθετική ιδιότητα

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \tag{3.3}$$

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \tag{3.4}$$

Αντίθετο διανύσματος

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0. \tag{3.5}$$

Πολλαπλασιαμός $\lambda \in \mathbb{R}$ με διάνυσμα

$$\vec{s} = \lambda \vec{a} \tag{3.6}$$

είναι διάνυσμα με πολλαπλάσιο μήκος αλλά ίδια διεύθυνση με το $\vec{a}$ (σχήμα).

Ορισμός 1. Αν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ με έναν αριθμό λ παίρνουμε ένα νέο διάνυσμα και το συμβολίζουμε $\lambda\vec{a}$. Το μέτρο του είναι ίσο με το μέτρο του $\vec{a}$ επί το λ (την απόλυτη τιμή του) και η κατεύθυνση του είναι αυτή του $\vec{a}$ γιά $\lambda > 0$ ή αντίθετη του $\vec{a}$ γιά $\lambda < 0$.

Θα φανεί χρήσιμο να ορίσουμε στοιχειώδη ευθύγραμμα τμήματα από το O και κατά μήκος των Ox, Oy, τα οποία ονομάζουμε $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα. Φροντίζουμε ώστε το μήκος τους να είναι ίσο με μία μονάδα μήκους (π.χ., m). Τότε κάθε σημείο σε απόσταση x από το O επάνω στον Ox δίνεται από το τέλος το διανύσματος $x\vec{i}$ και κάθε σημείο σε απόσταση y από το O επάνω στον Oy δίνεται από το τέλος του διανύσματος $y\vec{j}$.

Επιστρέφουμε τώρα στην ανάλυση του διανύσματος $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία A και B απέχουν x και y από την αρχή O στους άξονες Ox, Oy αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \qquad \overrightarrow{OB} = y\vec{j}.$$

Αφού συμβαίνει το $\overrightarrow{OA}$ να είναι στην ίδια διεύθυνση με το $\vec{i}$ και το $\overrightarrow{OB}$ με το $\vec{j}$. Έχουμε λοιπόν

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}. \tag{3.7}$$

Παρατήρηση 6. *Ας δούμε το μήκος του διανύσματος $\vec{r}$ το οποίο θα συμβολίσουμε με r. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε*

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.8}$$

Παράδειγμα 3.1. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{i} + \vec{j}$ είναι $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. □

Κάθε διάνυσμα δείχνει προς μία διεύθυνση και αυτή μπορεί να καθορισθεί αν έχουμε έναν δεδομένο (σταθερό) άξονα στον χώρο. Τότε μπορούμε να μετρήσουμε τη γωνία του διανύσματος ως προς τον σταθερό άξονα. (φτιάξτε σχήμα)

Παρατήρηση 7. *Ένα διάνυσμα μπορεί να καθορισθεί αν γνωρίζουμε το μέτρο και την διεύθυνσή του.*

Ας πάρουμε δύο οποιαδήποτε διανύσματα

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Το άθροισμά τους $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των συνιστωσών των $\vec{a}, \vec{b}$ (φτιάξτε σχήμα). Βλέπουμε γεωμετρικά ότι οι συνιστώσες του αθροίσματος έχουμε μήκος $a_x + b_x$ στον άξονα Ox και $a_y + b_y$ στον άξονα Oy. Γράφουμε $\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$ όπου

$$\begin{aligned} r_x &= a_x + b_x \\ r_y &= a_y + b_y. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Παράδειγμα 3.2. Κάνετε ένα παράδειγμα πρόσθεσης τριών διανυσμάτων, γεωμετρικά και αλγεβρικά. □

Παράδειγμα 3.3. Βρείτε γεωμετρικά τη διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{b} - \vec{a}$. Γράψτε το μέτρο της.
Λύση. Η διαφορά δύο διανυσμάτων είναι διάνυσμα που αρχίζει από το τέλος του $\vec{a}$ και τελειώνει στο τέλος του $\vec{b}$ (φτιάξτε σχήμα):

$$\vec{b} - \vec{a} = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j}.$$

Το μέτρο της είναι $\sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$. □

3.3. **Βαθμωτό γινόμενο.** Θα ορίσουμε πολλαπλασιασμό μεταξύ δύο διανυσμάτων.

Ορισμός 2. Το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ορίζεται ως

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi, \tag{3.11}$$

όπου a, b είναι τα μέτρα των $\vec{a}, \vec{b}$ και ϕ είναι η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

Το βαθμωτό γινόμενο λέγεται και *εσωτερικό γινόμενο* διανυσμάτων.

Παρατήρηση 8. *Αν δύο διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$. Αν δύο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*

Ένας αλγεβρικός τρόπος υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) = a_x b_x + a_y b_y. \tag{3.12}$$

Παράδειγμα 3.4. Δύο διανύσματα $\vec{C}$ και $\vec{D}$ έχουν μέτρα 3 και 4 αντίστοιχα. Ποιά είναι η γωνία μεταξύ τους αν (α) $\vec{C} \cdot \vec{D} = 0$, (β) $\vec{C} \cdot \vec{D} = 12$, (γ) $\vec{C} \cdot \vec{D} = -12$;
Λύση. (α) 90^0, (β) 0^o, (γ) 180^o. □

Τα παραπάνω μπορούν να γενικευθούν γιά διανύσματα στον χώρο, δηλαδή στις τρεις διαστάσεις (φτιάξτε σχήμα). Θα θεωρήσουμε τρεις κάθετους άξονες Ox, Oy, Oz και αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος τους. Διανύσματα στον χώρο μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες τους στους τρεις άξονες: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ και $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίνεται από

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{3.13}$$

3.4. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 3.1. Ποιά είναι η γωνία ϕ μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ και $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$.
Λύση.

$$a = 5, \qquad b = 3.61.$$

Βρίσκουμε

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \Rightarrow \cos\phi = ?? \Rightarrow \phi = 109^o.$$

Άσκηση 3.2. (Halliday, σελ 65, ασκ 10.) Ένας άνθρωπος κινείται 3.1 km βόρεια, μετά 2.4 km δυτικά και τέλος 5.4 km νότια. (α) Σχεδιάστε ένα διανυσματικό διάγραμμα της κίνησης. (β) Δώστε το μέτρο και τη διεύθυνση του διανύσματος της τελικής του θέσης.

Άσκηση 3.3. Έστω δύο σωμάτια με διανύσματα θέσης $\vec{a} = (1\,\mathrm{m})\vec{i} + (4\,\mathrm{m})\vec{j}$, $\vec{b} = (5\,\mathrm{m})\vec{i} - (3\,\mathrm{m})\vec{j}$. Πόσο απέχουν τα σωμάτια μεταξύ τους;
Λύση.

$$\vec{a} - \vec{b} = -4\vec{i} + 7\vec{j} \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{65}\,\mathrm{m}.$$

Άσκηση 3.4. Αν προσθέσουμε το $\vec{b}$ στο $\vec{a}$ το αποτέλεσμα είναι $6\vec{i} + \vec{j}$ και αν αφαιρέσουμε το $\vec{b}$ από το $\vec{a}$ το αποτέλεσμα είναι $-4\vec{i} + 7\vec{j}$. Πόσο είναι το μέτρο του $\vec{a}$;
Λύση.

$$\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} & = 6\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{a} - \vec{b} & = -4\vec{i} + 7\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} & = \vec{i} + 4\vec{j} \\ \vec{b} & = 5\vec{i} - 3\vec{j} \end{cases}$$

Και

$$|\vec{a}| = \sqrt{17}.$$

Άσκηση 3.5. ([1] σελ 57, κεφ 3-7) Έστω διάνυσμα $\vec{a}$ το οποίο εκφράζεται με τις συνιστώσες $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή O και άξονες Ox, Oy. Κάνετε μία πρώτη μελέτη γιά τις συνιστώσες του ίδιου διανύσματος $\vec{a}$ σε άλλο σύστημα συντεταγμένων με αρχή O και άξονες Ox', Oy' (το 2ο σύστημα είναι στραμένο σε σχέση με το αρχικό).
Λύση. Μπορούμε να δούμε τις συνιστώσες στα δύο συστήματα (φτιάξτε σχήμα).

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του διανύσματος είναι

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}.$$

4. Κινηση σε δυο και τρεις διαστασεις

4.1. **Θέση και μετατόπιση.** Η θέση σωματίου δίνεται από ένα διάνυσμα

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{4.1}$$

όπου $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ είναι οι συνιστώσες του $\vec{r}$, ενώ οι x, y, z λέγονται συντεταγμένες του. Το $\vec{r}$ λέγεται *διάνυσμα θέσης*. Βλέπουμε ότι οι x, y, z είναι αρκετές γιά να προσδιορίσουμε τη θέση του σωματίου.

Έστω ότι ένα σώμα είναι σε μία χρονική στιγμή t_1 στην θέση $\vec{r}_1$ και σε ακόλουθη στιγμή t_2 στην θέση $\vec{r}_2$ (σχήμα). Παρατηρούμε ότι έχει μετατοπιστεί κατά διάνυσμα

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{4.2}$$

Αυτό γράφεται και ως

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Delta r} &= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \\
&= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \\
&= \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\,\vec{k}. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 9. *Η διαδοχικές θέσεις κινούμενου σωματίου διαγράφουν την τροχιά του, δηλαδή μία καμπύλη στο χώρο. Αυτή ξεκινά από σημείο $\vec{r}_1$ σε χρονική στιγμή t_1 και καταλήγει σε σημείο $\vec{r}_2$ σε χρονική στιγμή t_2. Η τυχούσα θέση στην τροχιά γράφεται $\vec{r}(t)$. (φτιάξτε σχήμα)*

Παράδειγμα 4.1. ([1] σελ 73, πρόβλημα 4-2) Ένα κουνέλι τρέχει μέσα σε ένα πάρκινγκ στο οποίο έχουμε σχεδιάσει ένα σύστημα συντεταγμένων. Οι συντεταγμένες του δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
x &= -0.3t^2 + 7.2t + 28 \\
y &= 0.2t^2 - 9.1t + 30
\end{aligned}$$

όπου t είναι η χρονική στιγμή. (α) Σε ποιά θέση βρίσκεται τη στιγμή $t = 10$, (β) σε ποιά θέση τη στιγμή $t = 20$, (γ) ποιά είναι η μετατόπισή του από τη στιγμή $t = 10$ μέχρι $t = 20$.
Λύση. (α) $\vec{r}_1 = 70\vec{i} - 41\vec{j}$ (β) $\vec{r}_2 = 52\vec{i} - 72\vec{j}$ (γ) $\overrightarrow{\Delta r} = -18\vec{i} - 31\vec{j}$. □

4.2. **Ταχύτητα.** Έχουμε ήδη δει τον ορισμό της μέσης ταχύτητας

$$\text{μέση ταχύτητα} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρονικό διάστημα}}.$$

Αν την εφαρμόσουμε γιά μετατόπιση από $\vec{r}_1$ (σε χρόνο t_1) σε $\vec{r}_2$ (γιά t_2) έχουμε

$$\vec{v}_\mu = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}, \qquad \overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1.$$

Παρατήρηση 10. *Η ταχύτητα είναι διάνυσμα με διεύθυνση ίδια με τη μετατόπιση.*

Συνιστώσες ταχύτητας

$$\vec{v}_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}.$$

Παράδειγμα 4.2. Γιά $\overrightarrow{\Delta r} = (-18\,\mathrm{m})\,\vec{i} + (-31\,\mathrm{m})\,\vec{j}$ και $\Delta t = 10\,\mathrm{sec}$ (όπως στο προηγούμενο παράδειγμα).
Λύση.

$$\vec{v}_\mu = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = (-1.8\,\mathrm{m/sec})\,\vec{i} + (-3.1\,\mathrm{m/sec})\,\vec{j}.$$

□

Ας θεωρήσουμε την τροχιά σωματίου και ας δούμε ένα οποιοδήποτε σημείο της $\vec{r}_1$ γιά μία στιγμή t_1. Μπορούμε να πάρουμε έναν χρόνο t_2 κοντά στο t_1 και άρα το $\Delta t = t_2 - t_1$ μικρό, οσοδήποτε μικρό θέλουμε (dt). Τότε έχουμε σε κάθε σημείο της τροχιάς $\vec{r}_1$ το διάνυσμα της *στιγμιαίας ταχύτητας*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Παρατήρηση 11. *Αυτό το διάνυσμα δείχνει προς την διεύθυνση κίνησης σε κάθε σημείο της τροχιάς. Επίσης, παρατηρούμε ότι εφάπτεται της τροχιάς σε κάθε σημείο της, ώστε λέμε ότι έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στην καμπύλη, δηλαδή στην τροχιά (φτιάξτε σχήμα).*

Το διάνυσμα της ταχύτητας

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{4.4}$$

έχει βαθμωτές συνιστώσες

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{4.5}$$

Παράδειγμα 4.3. Βρείτε την ταχύτητα του παραδείγματος με το κουνέλι. □

Παράδειγμα 4.4. ([1] σελ. 76) Έστω μία κυκλική τροχιά σωματίου. Αν η στιγμιαία ταχύτητα του σωματίου είναι $\vec{v} = (2\,\mathrm{m/s})\vec{i} - (2\,\mathrm{m/s})\vec{j}$, σε ποιό τεταρτημόριο βρίσκεται το σωμάτιο τη δεδομένη χρονική στιγμή; (Θεωρήστε ότι το σωμάτιο κινείται (α) αριστερόστροφα (β) δεξιόστροφα.) □

4.3. **Επιτάχυνση.** Έστω σωματίδιο με ταχύτητα v_1 τη χρονική στιγμή t_1 και v_2 τη χρονική στιγμή t_2. Ορίζουμε

$$\text{μέση επιτάχυνση} = \frac{\text{μεταβολή ταχύτητας}}{\text{χρονικό διάστημα}},$$

συμβολικά

$$\vec{a}_\mu = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{4.6}$$

Η *στιγμιαία επιτάχυνση* είναι

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{4.7}$$

Παρατήρηση 12. *Είτε μεταβάλεται το μέτρο είτε η κατεύθυνση της ταχύτητας, αυτό είναι αποτέλεσμα μίας μη-μηδενικής επιτάχυνσης.*

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{4.8}$$

έχει βαθμωτές συνιστώσες

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{4.9}$$

Παρατήρηση 13. *Αν έχουμε τις συνιστώσες της επιτάχυνσης a_x, a_y, a_z μπορούμε να μελετήσουμε χωριστά τις εξισώσεις γιά τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας v_x, v_y, v_z.*

Παράδειγμα 4.5. Βρείτε την επιτάχυνση του παραδείγματος με το κουνέλι. □

4.4. **Βολές.** Ας περιοριστούμε στις δύο διαστάσεις και ας δούμε την ακόλουθη περίπτωση. Σωμάτιο με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$ έχει επιτάχυνση g προς τα κάτω, δηλαδή $\vec{a} = -g\vec{j}$. Θεωρούμε ότι αυτή προκαλείται από τη Γη. Ξέρουμε ότι μπορούμε να μελετήσουμε χωριστά την οριζόντια και την κατακόρυφη κίνηση. Η οριζόντια θέση δίνεται από

$$x - x_0 = v_{0x}t \tag{4.10}$$

και η κατακόρυφη από

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{4.11}$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση της τροχιάς, δηλαδή τη σχέση μεταξύ x και y. Απαλοίφουμε τον χρόνο μεταξύ των δύο εξισώσεων

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2(v_{0x})^2}x^2. \tag{4.12}$$

Παράδειγμα 4.6. Το βεληνεκές R βλήματος είναι η οριζόντια απόσταση που έχει διανύσει μέχρι να επιστρέψει στο αρχικό του ύψος. Στις εξισώσεις γιά την οριζόντια και κατακόρυφη κίνηση θέτουμε $R = x - x_0,\ y - y_0 = 0$ και παίρνουμε

$$R = v_{0x}t, \qquad 0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Απαλοίφουμε τον χρόνο και έχουμε

$$R = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}.$$

□

4.5. **Κυκλική κίνηση.** Θεωρούμε ότι σωμάτιο κινείται επάνω σε κύκλο ακτίνας r και έχει σταθερή ταχύτητα v (ομαλή κυκλική κίνηση). Ξέρουμε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτόμενο στην τροχιά του σωματίου (φτιάξτε σχήμα). Άρα το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτόμενο στον κύκλο. Αυτό σημαίνει ότι είναι κάθετο σε κάθε ακτίνα $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Γιά τα σημεία του κύκλου έχουμε

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \tag{4.13}$$

όπου θ η γωνία της ακτίνας $\vec{r}$ με τον οριζόντιο άξονα. Ώστε

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j}. \tag{4.14}$$

Η ταχύτητα είναι εφαπτομενική στην τροχιά και άρα κάθετη στην ακτίνα $\vec{r}$. Το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο $\vec{r}$ είναι

$$\hat{e}_\phi := -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}, \tag{4.15}$$

αφού $\hat{e}_\phi \cdot \vec{r} = 0$. Άρα

$$\vec{v} = v\,\hat{e}_\phi = (-v\sin\theta)\vec{i} + (v\cos\theta)\vec{j}. \tag{4.16}$$

Στις παραπάνω εννοείται ότι $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ με

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -v\sin\theta, \qquad \frac{dy}{dt} = v_y = v\cos\theta. \tag{4.17}$$

Η ταχύτητα γράφεται

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy}{r}\right)\vec{i} + \left(\frac{vx}{r}\right)\vec{j} \tag{4.18}$$

και μπορούμε τώρα να βρούμε την επιτάχυνση από την παράγωγο

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \left(-\frac{v}{r}\frac{dy}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx}{dt}\right)\vec{j} \\ &= \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\vec{i} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\vec{j} \\ &= -\frac{v^2}{r^2}\left(r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j}\right) \\ &= -\frac{v^2}{r^2}(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}).\end{aligned}$$

Γράφουμε το τελικό αποτέλεσμα ως

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r^2}\vec{r} = -\frac{v^2}{r}\hat{e}_{\rm r}, \qquad \hat{e}_{\rm r} := \frac{\vec{r}}{r}. \tag{4.19}$$

Άρα η επιτάχυνση έχει τη διεύθυνση της ακτίνας, αλλά αντίθετη φορά. Αυτή η επιτάχυνση υπάρχει βέβαια γιά κάθε ομαλή κυκλική κίνηση και λέγεται *κεντρομόλος επιτάχυνση*.

Μπορούμε να γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα γιά την περίπτωση που η ταχύτητα v δεν είναι σταθερή. Η επιτάχυνση προκύπτει ως

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \left[\left(-\frac{v}{r}\frac{dy}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx}{dt}\right)\vec{j}\right] + \frac{dv}{dt}\,\hat{e}_\phi \\ &= -\frac{v^2}{r}\,\hat{e}_{\rm r} + \frac{dv}{dt}\,\hat{e}_\phi. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ώστε η επιτάχυνση έχει γραφεί ως άθροισμα δύο συνιστωσών: η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι $a_t = dv/dt$ και η ακτινική (κεντρομόλος) είναι $a_r = -v^2/r$.

4.6. **Σχετική κίνηση σε δύο διαστάσεις.** Έστω σύστημα αναφοράς με αρχή A και άλλο σύστημα με αρχή B. Το 2ο σύστημα κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{BA}$ ως προς το 1ο. Γιά τη θέση σώματος P ως προς τα δύο συστήματα ($\vec{r}_{PA}$, $\vec{r}_{PB}$) ισχύει (φτιάξτε σχήμα με διανύσματα)

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}, \tag{4.21}$$

όπου $\vec{r}_{BA}$ η θέση του B ως προς A.

Παραγωγίζοντας έχουμε γιά τις ταχύτητες

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}. \tag{4.22}$$

Υποθέτουμε ότι $\vec{v}_{BA}$ σταθερή και παραγωγίζοντας βρίσκουμε γιά τις επιταχύνσεις

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \tag{4.23}$$

Παράδειγμα 4.7. ([1]) Αεροπλάνο κινείται ανατολικά, ενώ βρίσκεται σε βόρειο-ανατολικό άνεμο. Αυτό επιτυγχάνεται αφού ο πιλότος έχει στρέψει το αεροπλάνο νότιο-ανατολικά. Το αεροπλάνο έχει ταχύτητα $\vec{v}_{PW}$ ως προς τον άνεμο (δηλ. το παρασέρνει ο άνεμος και οι μηχανές προσθέτουν μία ταχύτητα επ΄ αυτού) με μέτρο 215 km/h και κατεύθυνση υπό γωνία θ ως προς την ανατολή. Η $\vec{v}_{WG}$ κατευθύνεται 20^o ανατολικά του βορρά και έχει μέτρο 65 km/h. Πόσο είναι το μέτρο της $\vec{v}_{PG}$ και πόση η θ;

Λύση. Το κινητό P είναι το αεροπλάνο. Το σύστημα A αντιστοιχεί στο έδαφος (ας το πούμε G) και το B κινείται με τον άνεμο (ας το πούμε W). Άρα

$$\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PW} + \vec{v}_{WG}.$$

Γιά τις συνιστώσες στον y έχουμε

$$0 = -(215\,\text{km/h}\,\sin\theta + 65\,\text{km/h})\,\cos(20^o) \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\ldots = 16.5^o.$$

Γιά τις συνιστώσες στον x έχουμε

$$v_{PG} = (215\,\mathrm{km/h})\,\cos(16.5^o) + (65\,\mathrm{km/h})\,\sin(20^o) \Rightarrow v_{PG} = 228\,\mathrm{km/h}.$$

4.7. Ασκήσεις.

Άσκηση 4.1. ([1] σελ 83) Αεροπλάνο πετάει σε σταθερό ύψος $h = 500\,\mathrm{m}$ με ταχύτητα $v_0 = 55\,\mathrm{m/s}$. Εάν ρίψουμε ένα αντικείμενο, πόση απόσταση θα διανύσει στην οριζόντια διεύθυνση μέχρι να προσγειωθεί στο έδαφος; (αγνοούμε την επίδραση του αέρα).
Λύση. Κατακόρυφη κίνηση ($g = 9.8\,\mathrm{m/sec}^2$)

$$\Delta y = -\frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 10.1\,\mathrm{sec}.$$

$$\Delta x = v_0 \Delta t \Rightarrow \Delta x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 555.6\,\mathrm{m}.$$

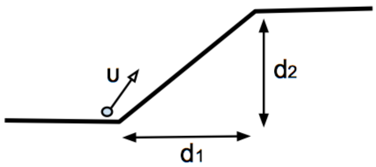
Άσκηση 4.2. ([1] σελ. 84, λυμένο πρόβλημα) Ένα κανόνι σε φρούριο ρίχνει βλήματα με αρχική ταχύτητα $82\,\mathrm{m/sec}$. Το κανόνι πρέπει να πετύχει πλοίο το οποίο πλέει $560\,\mathrm{m}$ από το φρούριο. (α) Με πόση γωνία θ_0 ως προς την οριζόντιο πρέπει να ριχθεί το βλήμα ώστε να χτυπήσει το πλοίο; (β) Πόσο είναι το μέγιστο βεληνεκές των βλημάτων;
Λύση. (α)

$$\theta_0 = 27^o, \qquad \theta_0 = 63^o.$$

(β)

$$R \approx 690\,\mathrm{m}.$$

Άσκηση 4.3. ([1] σελ. 97, πρόβλημα 43) Μία μπάλα εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου $v = 10\,\mathrm{m/sec}$ και γωνία $\theta = 50^o$ ως προς την οριζόντιο. Το σημείο εκτόξευσης βρίσκεται στη βάση ράμπας με οριζόντιο μήκος $d_1 = 6\,\mathrm{m}$ και ύψος $d_2 = 3.6\,\mathrm{m}$. Στην κορυφή της ράμπας υπάρχει οριζόντιο επίπεδο. (α) Η μπάλα προσγειώνεται στη ράμπα ή στο οριζόντιο επίπεδο; (β) πόσο είναι το μέτρο και (γ) πόση η γωνία μετατόπισής της από το σημείο εκτόξευσης;



Λύση. (α)

$$x = v\cos\theta\, t, \qquad y = v\sin\theta\, t - \frac{1}{2} g\, t^2.$$

Γιά $x = d_1$ (μέχρι το τέλος της ράμπας) έχουμε $t = t_m = d_1/(v\cos\theta)$. Σε χρόνο t_m η μπάλα θα είναι σε ύψος

$$y_m = v\sin\theta\, t_m - \frac{1}{2} g\, t_m^2 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d_1 - \frac{g\, d_1^2}{2v^2\cos^2\theta} = 2.88\,\mathrm{m}.$$

Αφού $y < d_2$ η μπάλα προσγειώνεται στη ράμπα.

(β) Όταν προσκρούει η μπάλα στη ράμπα ισχύει

$$\frac{y}{x} = \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow \frac{v\sin\theta\, t_0 - \frac{1}{2} g\, t_0^2}{v\cos\theta\, t_0} = \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{g\, t_0}{2v\cos\theta} = \frac{d_2}{d_1},$$

ώστε

$$t_0 = \frac{2v\cos\theta}{g} \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{d_2}{d_1} \right) = 0.776\,\mathrm{sec}.$$

Συνεπώς

$$x_0 = v\cos\theta\, t_0 = 4.99\,\mathrm{m}, \qquad y_0 = v\sin\theta\, t_0 - \frac{1}{2}g\, t_0^2 = 2.99\,\mathrm{m}.$$

Γιά επαλήθευση βλέπουμε ότι $y_0/x_0 = d_2/d_1 = 0.6$.

Μέτρο μετατόπισης

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 5.82.$$

(γ) Η γωνία μετατόπισης είναι όση και η γωνία κλίσης της ράμπας

$$\tan^{-1}\left(\frac{d_2}{d_1}\right).$$

Άσκηση 4.4. ([2], ασκ. 4.31) Η τροχιά της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι κατά προσέγγιση κυκλική με ακτίνα $R = 3.84 \times 10^8\,\mathrm{m}$. Η Σελήνη χρειάζεται 27.3 ημέρες γιά να συμπληρώσει μία περιφορά γύρω από τη Γη. Βρείτε (α) την τροχιακή ταχύτητά της (β) την κεντρομόλο επιτάχυνσή της.

Άσκηση 4.5. ([5] Κ-10) Δίνεται η παραμετρική εξίσωση κίνησης στο επίπεδο

$$\vec{r}(t) = (1+3t)\vec{i} + (1+4t)\vec{j}.$$

Να μελετηθεί η κίνηση.
Λύση. Ας γράψουμε την θέση ως

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \qquad x(t) = 1+3t, \quad y(t) = 1+4t.$$

Η τροχιά πρέπει να είναι της μορφής $y = f(x)$. Ώστε, έχουμε $x = 1+3t \Rightarrow t = (x-1)/3$. Ώστε

$$y = 1+4t \Rightarrow y = 1 + 4\frac{x-1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x.$$

Η τροχιά είναι μία ευθεία γραμμή.

Ταχύτητα $\vec{v}(t) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

Επιτάχυνση $\vec{a} = 0$.

Άσκηση 4.6. ([5] Κ-16) Δίνεται η παραμετρική εξίσωση κίνησης στο επίπεδο

$$\vec{r}(t) = at\,\vec{i} - bt^2\,\vec{j}, \qquad a, b > 0 \quad \text{σταθ.}$$

(α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (β) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση. (γ) Να βρεθεί η γωνία μεταξύ $\vec{v}$ και $\vec{a}$.
Λύση. (α) Γράφουμε

$$x = at, \qquad y = ibt^2$$

άρα $t = x/a$. Ώστε

$$y = -\frac{b}{a^2}x^2,$$

δηλαδή η τροχιά είναι μία παραβολή.

(β) Ταχύτητα $\vec{v}(t) = a\vec{i} - 2bt\vec{j}$, με $v = |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2}$.

Επιτάχυνση $\vec{a} = -2b\vec{j}$, με $a = 2b$.

(γ) Έστω ϕ η ζητούμενη γωνία, ισχύει

$$\begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{a} &= va\cos\phi \\ \vec{v}\cdot\vec{a} &= v_x a_x + v_y a_y \end{cases} \Rightarrow \cos\phi = \frac{2bt}{\sqrt{a^2+4b^2t^2}}.$$

Άσκηση 4.7. ([1] σελ 99 ασκ 67) Ένα αγόρι περιστρέφει πέτρα σε οριζόντιο κύκλο ακτίνας $R = 1.5\,\mathrm{m}$ και σε ύψος $h = 2\,\mathrm{m}$ πάνω από το έδαφος. Το σχοινί σπάει η πέτρα εκσφενδονίζεται οριζόντια και χτυπά στο έδαφος έχοντας διανύσει $d = 10\,\mathrm{m}$. Πόσο είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης της πέτρας κατά τη διάρκεια της κυκλικής κίνησης;
Λύση. Η ταχύτητα της πέτρας κατά την κυκλική κίνηση είναι σταθερή κατά μέτρο, έστω v_0 και έχει διεύθυνση εφαπτομενική στην κυκλική τροχιά. Η πέτρα απελευθερώνεται και εκτοξεύεται εφαπτομενικά της τροχιάς, δηλαδή κατά την οριζόντιο.

Η πέτρα ξεκινά, μετά την απελευθέρωσή της, με μηδενική ταχύτητα στην κατακόρυφη διεύθυνση και γιά να διανύσει την κατακόρυφη απόσταση h χρειάζεται χρόνος t_1:

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

μετά τον οποίο έχει πέσει στο έδαφος.

Στην οριζόντια διεύθυνση διανύει απόσταση

$$d = v_0 t_1 \Rightarrow v_0 = \frac{d}{t_1}.$$

Ώστε, η κεντρομόλος επιτάχυνση κατά την κυκλική τροχιά υπολογίζεται από την

$$a = \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow a = \frac{d^2}{R t_1^2} = \frac{g d^2}{2hR}.$$

Άσκηση 4.8. Έστω ένα σωμάτιο το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση και η θέση του δίνεται από τις $x(t) = R\cos(t^2/2)$, $y(t) = R\sin(t^2/2)$, όπου R σταθερά. Βρείτε την κεντρομόλο και την επιτρόχιο επιτάχυνση σαν συνάρτηση του χρόνου.
Λύση. Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $a_r = -v^2/r$ και η επιτρόχιος επιτάχυνση $a_t = dv/dt$, όπου r η ακτίνα περιστροφής και v το μέτρο της ταχύτητας του κινητού.

Έχουμε γιά την ταχύτητα $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$, όπου

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -Rt\,\sin(t^2/2), \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = Rt\,\cos(t^2/2).$$

Άρα

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = R^2 t^2, \qquad v = Rt.$$

Αντικαθιστούμε τις τελευταίες σχέσεις στους τύπους γιά την επιτάχυνση, θέτουμε $r = R$ την ακτίνα περιστροφής και έχουμε

$$a_r(t) = -\frac{v^2}{R} = -Rt^2, \qquad a_t(t) = \frac{dv}{dt} = R.$$

Άσκηση 4.9. ([1] σελ 99 ασκ 59) Ένα αστέρι νετρονίων με ακτίνα $R = 20\,\mathrm{km}$ εκτελεί μία περιστροφή ανά δευτερόλεπτο. (α) Πόση είναι η ταχύτητα των σωματίων στον ισημερινό του αστεριού; (β) πόσο το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης αυτών των σωματίων;
Λύση. (α)

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 20\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{sec}} = 125\,\mathrm{km/sec}.$$

$$a = \frac{v^2}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = 789\,\mathrm{km/sec}^2.$$

5. Δύναμη

5.1. 1ος νόμος του Νεύτωνα. *Αν σε ένα σώμα δεν ασκείται καμμία δύναμη τότε η ταχύτητα του σώματος δεν μπορεί να μεταβληθεί, δηλαδή το σώμα δεν επιταχύνεται.*

Ο νόμος αυτός εισάγει

- την έννοια της δύναμης.
- την εικόνα ότι τα απομονωμένα σώματα (τα οποία δεν δέχονται επιδράσεις) μπορούν να κινούνται με σταθερή ταχύτητα.

5.2. Δύναμη. Μέτρηση της επιτάχυνσης ισοδυναμεί με μέτρηση μίας δύναμης.

Η σύνδεση επιτάχυνσης και δύναμης σημαίνει επίσης ότι η δύναμη είναι διάνυσμα (έστω $\vec{F}$). Γιά την περίπτωση που ασκούνται πολλές δυνάμεις $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$ έχουμε τον γενικότερο:

1ος νόμος του Νεύτωνα: *Αν σε ένα σώμα δεν ασκείται συνισταμένη δύναμη τότε η ταχύτητα του σώματος δεν μπορεί να μεταβληθεί, δηλαδή το σώμα δεν επιταχύνεται.*

Ο νόμος του Νεύτωνα ισχύει σε αδρανειακά συστήματα. Εφόσον μάλιστα αυτό συμβαίνει εύκολα καταλαβαίνουμε ότι ο νόμος του Νεύτωνα δεν μπορεί να ισχύει σε ένα μη-αδρανειακό σύστημα.

Παρατήρηση 14. *Αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι αυτό στο οποίο ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα.*

5.3. 2ος νόμος του Νεύτωνα. Θα υποθέσουμε ότι μία δύναμη δρα ώστε να επιταχύνει ένα σώμα (ώστε να έχει νόημα ο 1ος νόμος). Γιά κάποιο πρότυπο σώμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία δεδομένη δύναμη $1\,\mathrm{N}$ προκαλεί επιτάχυνση $1\,\mathrm{m/sec}^2$. Ξέρουμε από πείρα ότι σε ένα βαρύτερο σώμα η ίδια δύναμη θα προκαλούσε μικρότερη επιτάχυνση.

Θα προσδώσουμε σε κάθε σώμα την ιδιότητα ότι έχει μία *μάζα* m. Αυτή θα την ορίσουμε έτσι ώστε, όταν ασκούμε την ίδια δύναμη σε δύο σώματα να βρίσκουμε λόγο επιταχύνσεων

$$\frac{a_0}{a_x} = \frac{m_x}{m_0} \tag{5.1}$$

όπου θεωρούμε μάζες m_0, m_x γιά τα δύο σώματα. Γιά παράδειγμα, αν $a_0 = 1\,\mathrm{m/sec}^2$, $a_x = 0.25\,\mathrm{m/sec}^2$ και η μάζα του πρότυπου σώματος m_0 θεωρηθεί μονάδα $1\,\mathrm{kg}$, τότε η μάζα του δεύτερου σώματος θα πρέπει να καθορισθεί ως

$$m_x = \frac{a_0}{a_x} m_0 = \ldots = 4\,\mathrm{kg}.$$

Ας δούμε αν η έννοια της μάζας που ορίσαμε έχει κάποια γενικότερη αξία. Αν ασκήσουμε μεγαλύτερη δύναμη στην πρότυπη μάζα και αυτή πάρει επιτάχυνση $8\,\mathrm{m/sec}^2$ θα θεωρήσουμε ότι η δύναμη είναι $8\,\mathrm{N}$. Παρατηρούμε πειραματικά ότι η νέα επιτάχυνση a_x στο σώμα m_x είναι μεγαλύτερη και μάλιστα είναι τέτοια ώστε η μάζα m_x προκύπτει και πάλι

$$m_x = \frac{a_0}{a_x} m_0 = \ldots = 4\,\mathrm{kg}.$$

Συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να προσδώσουμε σε κάθε σώμα μία μάζα γιά την οποία ο νόμος του Νεύτωνα ισχύει σε κάθε περίπτωση (κάθε δύναμη). Γιά κάθε δύναμη ο λόγος των μαζών μεταξύ σωμάτων δίνει και τον λόγο των επιταχύνσεων που παράγονται.

2ος νόμος του Νεύτωνα: *Η συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα είναι ίση με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνσή του.* Δηλαδή

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{5.2}$$

Παρατηρήστε ότι πρόκειται γιά διανυσματική εξίσωση. Ισχύει δηλαδή ότι, η επιτάχυνση κατά δεδομένο άξονα προκαλείται μόνο από τις συνιστώσες των δυνάμεων προς αυτόν τον άξονα (οι συνιστώσες προς άλλους άξονες δεν συνεισφέρουν).

Παρατήρηση 15. *Αν οι συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι μηδέν τότε η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν* $\vec{a} = 0$.

Παράδειγμα 5.1. ([1], σελ 115, σχήμα 5-4) Ένα σώμα με μάζα $m = 2\,\mathrm{kg}$ επιταχύνεται με $a = 3\,\mathrm{m/sec}^2$ στην κατεύθυνση η οποία σχηματίζει γωνία $\theta = 50^o$ ως προς τον άξονα x. Αυτό οφείλεται σε τρεις δυνάμεις. Η $\vec{F}_1$ έχει μέτρο $10\,\mathrm{N}$ και σχηματίζει γωνία 30^o με τον άξονα $-x$ και η $\vec{F}_2$ έχει μέτρο $20\,\mathrm{N}$ και είναι προς τον άξονα y. Ποιά είναι η τρίτη δύναμη.
Λύση. Έχουμε

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a},$$

όπου

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= F_1 \cos(-150^o)\,\vec{i} + F_1 \sin(-150^o)\,\vec{j}, \qquad & F_1 = 10\,\mathrm{N} \\ \vec{F}_2 &= F_2 \cos(90^o)\,\vec{i} + F_2 \sin(90^o)\,\vec{j}, \qquad & F_2 = 20\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Γιά τις δύο συνιστώσες της $\vec{F}_3$ έχουμε

$$F_{3,x} = m(a\cos 50^o) - F_1\cos(-150^o) - F_2\cos 90^o = \ldots = 12.5\,\mathrm{N}.$$

$$F_{3,y} = m(a\sin 50^o) - F_1\sin(-150^o) - F_2\sin 90^o = \ldots = -10.4\,\mathrm{N}.$$

Ως διάνυσμα

$$\vec{F}_3 = (12.5\,\mathrm{N})\,\vec{i} + (-10.4\,\mathrm{N})\,\vec{j}.$$

Μέτρο και γωνία κατεύθυνσης

$$F_3 = \ldots = 16\,\mathrm{N}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{3,y}}{F_{3,x}}\right) = -40^o.$$

5.4. **Ειδικές περιπτώσεις δυνάμεων. Βαρυτική δύναμη.** Έχει φορά προς το έδαφος και μέτρο

$$F_g = mg. \tag{5.3}$$

Βάρος. Το βάρος W ενός σώματος είναι ίσο με το μέτρο F_g της βαρυτικής δύναμης στο σώμα.

$$W = mg. \tag{5.4}$$

Τριβή. Σώματα που εφάπτονται παρεμποδίζουν την σχετική τους κίνηση. Η παρατηρούμενη δύναμη τριβής έχει φορά αντίθετη της κίνησης του σώματος (της ταχύτητάς του). Μπορούμε, με κάποια προσέγγιση, να γράψουμε ότι η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας.

Τάση. Ένα σχοινί μπορεί να τραβάει ένα σώμα με κάποια δύναμη $\vec{T}$ (σχήμα: η $\vec{T}$ έχει την κατεύθυνση του σχοινιού και απομακρύνεται από το σώμα).

Η *τάση* στο σχοινί είναι το μέτρο T της δύναμης στο σώμα.

Γενικά, θεωρούμε ότι το σχοινί δεν έχει μάζα και ότι δρα μόνο ως μέσο μεταφοράς δύναμης (δείτε σχήματα: [1] σελ 120).

Παράδειγμα 5.2. ([1] σελ 119) Το σώμα που κρέμεται στο Σχ. 5-9γ ζυγίζει $75\,\mathrm{N}$. Είναι η T ίση, μεγαλύτερη ή μικρότερη από $75\,\mathrm{N}$ όταν το σώμα κινείται προς τα πάνω (α) με σταθερή ταχύτητα, (β) με αυξανόμενη ταχύτητα και (γ) με μειούμενη ταχύτητα;

5.5. **3ος νόμος του Νεύτωνα.** *Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, οι δυνάμεις που ασκούν τα σώματα το ένα στο άλλο είναι πάντα ίσες σε μέτρο και αντίθετες σε κατεύθυνση:*

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}. \tag{5.5}$$

Μπορούμε να φανταστούμε ότι κοιτώντας από μακριά δύο σώματα που αλληλεπιδρούν δεν παρατηρούμε καμμία δύναμη, αφού η συνισταμένη των δύο δυνάμεων μηδενίζεται.

Παράδειγμα 5.3. Ένας επιβάτης με μάζα $m = 72.2\,\mathrm{kg}$ βρίσκεται σε ανελκυστήρα ο οποίος επιταχύνεται προς τα επάνω με $a = 3.2\,\mathrm{m/s^2}$. (α) Αν ο επιβάτης βρίσκεται επάνω σε ζυγαριά, πόση δύναμη μετράει αυτή; (β) Εφασμόστε τον νόμο του Νεύτωνα στο σύστημα αναφορά του θαλάμου του ανελκυστήρα.
Λύση. Αν ο ανελκυστήρας ήταν ακίνητος τότε ο επιβάτης θα ασκούσε δύναμη ίση με το βάρος του $F_g = (72.2\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2}) = 708\,\mathrm{N}$ και ο ανεκλυστήρας επίσης δύνακη F_g στον επιβάτη (3ος νόμος Νεύτωνα), ώστε αυτός να μένει ακίνητος.

Η ζυγαριά μετράει τη δύναμη που ασκείται από τον ανεκλυστήρα στον επιβάτη. Αυτή είναι ίση με το βάρος του $F_g = (72.2\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2}) = 708\,\mathrm{N}$ συν τη δύναμη που χρειάζεται γιά την επιτάχυνση. Αυτή η δύναμη είναι ίση με $ma = (72.2\,\mathrm{kg})(3.2\,\mathrm{m/s^2}) = 231\,\mathrm{N}$. Άρα η ζυγαριά μετράει

$$F_N = m(g + a) = (72.2\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2} + 3.2\,\mathrm{m/s^2}) = 939\,\mathrm{N}.$$

(β) Η συνισταμένη δύναμη στον επιβάτη είναι $F_N - F_g = 231\,\mathrm{N}$ και η επιτάχυνσή του είναι $a_{p,cab} = 0$. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δεν ισχύει, διότι το σύστημα στου θαλάμου δεν είναι αδρανειακό. □

5.6. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 5.1. ([1], σελ 136, ασκ 48)

Άσκηση 5.2. Ένας ριψοκίνδυνος άνθρωπος (π.χ. κοσμοναύτης) βρίσκεται σε ύψος $h = 520\,\mathrm{km}$ από την επιφάνεια της γης όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 8.4\,\mathrm{m/sec^2}$. (α) Τι κίνηση κάνει; (σε ποιά κατεύθυνση κινείται;) (β) Ποιά πρέπει να είναι η ταχύτητά του ώστε να κάνει ομαλή κυκλική κίνηση;
Λύση. (α) Εάν έχει αρχικά μηδενική ταχύτητα, τότε θα κάνει κατακόρυφη πτώση. Αλλιώς εξαρτάται από την αρχική του ταχύτητα (μέτρο και διεύθυνση).

(β) Η βαρύτητα πρέπει να παίζει το ρόλο κεντρομόλου δυνάμεως άρα πρέπει να είναι

$$a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = aR = a(R_E+h) = (8.4\,\mathrm{m/sec^2})(6.37\times10^6\,\mathrm{m}+0.52\times10^6\,\mathrm{m}) = 57.8\times10^6\,(\mathrm{m/sec})^2.$$

Τελικά

$$v = 7.6\,\mathrm{km/sec}.$$

6. Απλες μορφες δυναμεων

6.1. **Σταθερή δύναμη.** Ας θεωρήσουμε μία μάζα m η οποία κινείται σε μία διάσταση (στον άξονα x) υπό την επίδραση σταθερής δύναμης $F = F_0$. Ο νόμος του Νέυτωνα δίνει

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_0. \tag{6.1}$$

Αυτό μπορεί να γραφεί και ως

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m}. \tag{6.2}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με τη μορφή

$$dv = \frac{F_0}{m}dt \Rightarrow \int dv = \int \frac{F_0}{m}dt. \tag{6.3}$$

Από τα ολοκληρώματα παίρνουμε την λύση

$$v(t) = \frac{F_0}{m}t + c_1, \tag{6.4}$$

όπου c_1 είναι μία σταθερά. Αν δίνεται η αρχική ταχύτητα του κινητού ως $v(t=0) = v_0$ τότε πρέπει να θέσουμε $c_1 = v_0$, ώστε έχουμε τη λύση

$$v(t) = \frac{F_0}{m}t + v_0, \tag{6.5}$$

η οποία ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη γιά την ταχύτητα.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε, από την $v = dx/dt$, την εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}t + v_0 \Rightarrow \int dx = \int \frac{F_0}{m}t\,dt + \int v_0\,dt \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 + v_0 t + c_2. \tag{6.6}$$

Αν δίνεται η αρχική θέση του κινητού ως $x(t=0) = x_0$ τότε πρέπει να θέσουμε $c_2 = x_0$, ώστε έχουμε τη λύση

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 + v_0 t + x_0 \tag{6.7}$$

η οποία ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη γιά την θέση (αλλά και γιά την ταχύτητα).

Παράδειγμα 6.1. Έστω μάζα m υπό την επίδραση της βαρύτητας η οποία κινείται κατακόρυφα στον άξονα z. Βρείτε την ταχύτητα και θέση της σαν συνάρτηση του χρόνου. Υποθέστε ότι η ταχύτητα και η θέση γιά χρόνο $t = 0$ είναι v_0 και z_0 αντίστοιχα.
Λύση. Η δύναμη της βαρύτητας είναι σταθερή $F = -mg$. Γιά την ταχύτητα έχουμε τον νόμο του Νεύτωνα

$$m\frac{dv}{dt} = -mg \Rightarrow dv = -g\,dt \Rightarrow v = -gt + v_0.$$

Γιά την θέση έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \Rightarrow dx = (-gt + v_0)\,dt \Rightarrow x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0. \;\square$$

6.2. **Δύναμη που εξαρτάται από τον χρόνο.** Ας θεωρήσουμε μία μάζα m η οποία κινείται σε μία διάσταση (στον άξονα x) υπό την επίδραση δύναμης που εξαρτάται από τον χρόνο $F = F(t)$. Ο νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t). \tag{6.8}$$

Αυτό μπορεί να γραφεί και ως

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F(t)}{m}. \tag{6.9}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με τη μορφή

$$dv = \frac{1}{m}F(t)\,dt \Rightarrow \int dv = \frac{1}{m}\int F(t)\,dt. \tag{6.10}$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα της $F(t)$ είναι μία άλλη συνάρτηση του χρόνου και την συμβολίζουμε $G(t)$. Τότε η ταχύτητα δίνεται από την

$$v(t) = \frac{1}{m}G(t) + c_1, \tag{6.11}$$

όπου c_1 είναι μία σταθερά.

Στη συνέχεια μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση γιά την θέση

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}G(t) + c_1 \Rightarrow \int dx = \int \left(\frac{1}{m}G(t) + c_1\right) dt \Rightarrow \int dx = \frac{1}{m}\int G(t)dt + c_1 \int dt \tag{6.12}$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα της $G(t)$ είναι μία άλλη συνάρτηση του χρόνου και την συμβολίζουμε $H(t)$. Τότε η θέση δίνεται από την

$$x(t) = \frac{1}{m}H(t) + c_1\,t + c_2. \tag{6.13}$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Οι σταθερές αυτές μπορούν να προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες $v(t0) = v_0$, $x(t=0) = x_0$.

Παράδειγμα 6.2. ([6] παράδειγμα 1.2) Μάζα m κινείται ματά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δύναμης

$$F = F_0\frac{t^2}{t_0^2},$$

όπου F_0, t_0 σταθερές. Τη χρονική στιγμή $t=0$ η μάζα βρίσκεται στη θέση $x = x_0$ και έχει ταχύτητα $v = v_0$. Να βρεθεί η ταχύτητα και θέση της σαν συνάρτηση του χρόνου.
Λύση. Γιά την ταχύτητα ισχύει η εξίσωση

$$m\frac{dv}{dt} = F_0\frac{t^2}{t_0^2}.$$

Βρίσκουμε την ταχύτητα ως εξής

$$\int dv = \frac{F_0}{m}\int \frac{t^2}{t_0^2}\,dt \Rightarrow v(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2} + c_1.$$

Γιά να έχουμε $v(t=0) = v_0$ θέτουμε $c_1 = v_0$, ώστε τελικά

$$v(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2} + v_0.$$

Γιά τη θέση έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2} + v_0 \Rightarrow dx = \frac{F_0}{m}\int \frac{t^3}{3t_0^2}\,dt + \int v_0\,dt \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^4}{12t_0^2} + v_0\,t + c_2.$$

Παρατηρούμε ότι $x(t=0) = c_1$, ώστε θέτουμε $c_1 = v_0$ και έχουμε τελικά

$$x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^4}{12t_0^2} + v_0\,t + x_0. \ \Box$$

6.3. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 6.1. ([2] σελ 117 ασκ 5.45) Μία οριζόντια δύναμη $F = A + Bt^3$ δρα σε σώμα μάζας $m = 2\,\mathrm{kg}$, όπου $A = 5.0\,\mathrm{N}$ και $B = 2.0\,\mathrm{N/sec}^3$. Ποιά θα είναι η οριζόντια ταχύτητα του σώματος σε χρόνο $t_1 = 4\,\mathrm{sec}$ αν υποθέσουμε ότι το σώμα έχει ταχύτητα $v = 0$ σε χρόνο $t = 0$;
Λύση.

$$F = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^v dv = \frac{1}{m}\int_0^{t_1}(A + Bt^3)\,dt \Rightarrow v = \frac{A}{m}t_1 + \frac{B}{4m}t_1^4.$$

Άσκηση 6.2. ([5] σελ. N-7) Σωμάτιο μάζας m τίθεται σε κίνηση τη χρονική στιγμή $t = 0$ υπό την επίδραση δυνάμεως

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_0\cos(\omega t),$$

όπου $\vec{F}_0$ και ω είναι σταθερές. (α) Πόση είναι η διάρκεια κινήσεως πριν την πρώτη στάση; (β) Ποιά η μετατόπιση του σωματίου κατά τον χρόνο αυτό; (γ) Ποιά η μέγιστη ταχύτητα του σωματίου, πότε και σε ποιά θέση;
Λύση. (α) Νόμος Νεύτωνα

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}_0}{m}\cos(\omega t) \Rightarrow d\vec{v} = \frac{\vec{F}_0}{m}\cos(\omega t)\,dt \Rightarrow \int_0^{\vec{v}} d\vec{v} = \frac{\vec{F}_0}{m}\int_0^t \cos(\omega t)\,dt.$$

Τα ολοκληρώματα δίνουν

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}_0}{m\omega}\sin(\omega t).$$

Η κίνηση είναι περιοδική και κατά την πρώτη στάση $\vec{v} = 0 \Rightarrow \sin(\omega t_1) = 0 \Rightarrow \omega t_1 = \pi \Rightarrow t_1 = \pi/\omega$.

(β) Γιά τη θέση έχουμε την

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F}_0}{m\omega}\sin(\omega t) \Rightarrow \int_0^{\vec{r}} d\vec{r} = \frac{\vec{F}_0}{m\omega}\int_0^t \sin(\omega t)\,dt \Rightarrow$$

Τα ολοκληρώματα δίνουν

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{F}_0}{m\omega^2}\,(1 - \cos(\omega t)).$$

Άρα

$$\vec{r}(t_1) = \frac{\vec{F}_0}{m\omega^2}\,(1 - \cos(\pi)) = 2\frac{\vec{F}_0}{m\omega^2}.$$

(γ) Γιά $\sin(\omega t_m) = 0 \Rightarrow t_m = \pi/(2\omega)$ έχουμε

$$\vec{v}_{max} = \vec{v}(t_m) = \frac{\vec{F}_0}{m\omega}, \qquad \vec{r}(t_m) = \frac{\vec{F}_0}{m\omega^2}.$$

Άσκηση 6.3. ([6] σελ. 15 παράδειγμα 1.2) Σημειακή μάζα m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δύναμης

$$F = F_0\frac{t^2}{t_0^2},$$

όπου F_0, t_0 σταθερές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα βρίσκεται στη θέση $x = x_0$ και έχει ταχύτητα $v = v_0$. Να βρεθεί η ταχύτητα και θέση της σαν συνάρτηση του χρόνου.
Λύση. Γιά την ταχύτητα ισχύει η εξίσωση

$$m\frac{dv}{dt} = F_0\frac{t^2}{t_0^2}.$$

Βρίσκουμε την ταχύτητα ως εξής

$$\int dv = \frac{F_0}{m}\int \frac{t^2}{t_0^2}\,dt \Rightarrow v(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2} + c_1.$$

Γιά να έχουμε $v(t=0)=v_0$ θέτουμε $c_1=v_0$, ώστε τελικά

$$v(t)=\frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2}+v_0.$$

Γιά τη θέση έχουμε

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2}+v_0 \Rightarrow dx=\frac{F_0}{m}\int\frac{t^3}{3t_0^2}\,dt+\int v_0\,dt \Rightarrow x(t)=\frac{F_0}{m}\,\frac{t^4}{12t_0^2}+v_0\,t+c_2.$$

Παρατηρούμε ότι $x(t=0)=c_1$, ώστε θέτουμε $c_1=v_0$ και έχουμε τελικά

$$x(t)=\frac{F_0}{m}\,\frac{t^4}{12t_0^2}+v_0\,t+x_0.\ \square$$

Άσκηση 6.4. ([6] σελ. 20 ασκ 1.1) Σημειακή μάζα m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δύναμης

$$F=F_0\,e^{-t/t_0},$$

όπου F_0, t_0 θετικές σταθερές. Τη χρονική στιγμή $t=0$ η μάζα βρίσκεται στη θέση x_0 και έχει ταχύτητα v_0. Να βρεθεί η θέση και η ταχύτητά της ως συνάρτηση του χρόνου.
Λύση.

$$v(t)=\frac{F_0t_0}{m}\left(1-e^{-t/t_0}\right).$$

$$x(t)=-\frac{F_0t_0^2}{m}\left(1-e^{-t/t_0}\right)+\left(v_0+\frac{F_0t_0}{m}\right)t+x_0.$$

7. Τριβη

Μεταξύ δύο σωμάτων τα οποία έρχονται σε επαφή ασκούνται δυνάμεις. Η κίνηση του ενός ως προς το άλλο παρεμποδίζεται. Οι δυνάμεις που λαμβάνουν μέρος μπορεί να έχουν διάφορες προελεύσεις και να είναι περίπλοκες σε βαθμό που η μικροσκοπική (λεπτομερής) τους περιγραφή να είναι σχεδόν αδύνατη.

7.1. **Ιδιότητες της τριβής. Τριβή ολίσθησης:** δύναμη σταθερού μέτρου η οποία ασκείται σε σώμα που ολισθαίνει επάνω σε άλλο (συνήθως μεγαλύτερο) σώμα.

Στατική Τριβή: δύναμη μεταβλητού μέτρου η οποία ασκείται σε σώμα που βρίσκεται ακίνητο επάνω σε άλλο (συνήθως μεγαλύτερο) σώμα.

7.2. **Οπισθέλκουσα δύναμη και οριακή ταχύτητα.** Ρευστό είναι οτιδήποτε μπορεί να ρέει, γιά παράδειγμα, ένα υγρό ή αέριο. Όταν σώμα βρίσκεται σε σχετική κίνηση μέσα σε ρευστό, σε αυτό ασκείται μία *οπισθέλκουσα δύναμη* που αντιστέκεται στην κίνηση. Αυτή είναι μία αύξουσα συνάρτηση της σχετικής ταχύτητας του σώματος.

Η κίνηση ρευστού είναι γενικά ένα περίπλοκο πρόβλημα και οι δυνατές καταστάσεις πολλές. Ας δούμε την περίπτωση ενός σώματος που είναι αμβλύ (μία μπάλα) το οποίο κινείται γρήγορα ώστε κάνει το ρευστό (τον αέρα) να κινείται με τυρβώδη ροή. Η οπισθέλκουσα δύναμη έχει τη μορφή

$$D = \frac{1}{2} C\rho A\, v^2$$

όπου

- v: η ταχύτητα του σώματος
- ρ: πυκνότητα του αέρα
- A: η επιφάνεια διατομής του κάθετα στην ταχύτητα (*ενεργός διατομή*)
- C: συντελεστής οπισθέλκουσας δύναμης

Ο νόμος του Νεύτωνα μας δίνει

$$D - F_g = ma.$$

Γιά αρκετά μεγάλη ταχύτητα η επιτάχυνση θα μηδενιστεί. Αυτό θα συμβεί γιά $v = v_l$, που ικανοποιεί την

$$\frac{1}{2} C\rho A\, v_l^2 - F_g = 0 \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}}.$$

Παράδειγμα 7.1. ([1], σελ 152, πρόβλημα 5-2) Αν μία γάτα που πέφτει φτάσει μία πρώτη οριακή ταχύτητα $v = 97\,\mathrm{km/h}$ ενώ ήταν μαζεμένη και στη συνέχεια διπλασιάσει την επιφάνειά της A, πόσο γρήγορα πέφτει στη νέα οριακή ταχύτητα v';
Λύση. Έστω αρχική επιφάνεια A και τελική $A' = 2A$. Έχουμε

$$\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2F_g/(C\rho A')}}{\sqrt{2F_g/(C\rho A)}} = \sqrt{\frac{A}{A'}} = \sqrt{0.5}.$$

Άρα, η δεύτερη οριακή ταχύτητα είναι

$$v' = \sqrt{0.5}\, v \approx 0.7 \times 97\,\mathrm{km/h} \approx 68\,\mathrm{km/h}.$$

□

7.3. **Δύναμη που εξαρτάται από την ταχύτητα.** Ας δούμε την περίπτωση όπου σε σώμα ασκείται μόνο δυνάμη που εξαρτάται από την ταχύτητα $f = f(v)$. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η οπισθέλκουσα δύναμη. Ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$m\frac{dv}{dt} = f(v). \tag{7.1}$$

Μπορούμε να βρούμε τη λύση με την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών

$$m\frac{dv}{f(v)} = dt \Rightarrow m\int \frac{dv}{f(v)} = \int dt. \tag{7.2}$$

Παράδειγμα 7.2. ([5] σελ. Κ-36) Σωμάτιο κινείται κατά άξονα x και επιβραδύνεται από δύναμη τριβής με επιτάχυνση

$$a = -\kappa\, v^2, \qquad \kappa > 0 \text{ σταθ.}$$

Αν η αρχική ταχύτητα είναι $v(t=0) = v_0$ δείξτε ότι η ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου είναι

$$v(t) = \frac{v_0}{\kappa v_0 t + 1}.$$

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι η δεδομένη $v = v(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση του Νεύτωνα και την αρχική συνθήκη.

Η εξίσωση του Νεύτωνα έχει τη μορφή

$$\frac{dv}{dt} = -\kappa\, v^2.$$

Υπολογίζουμε ότι, πραγματικά ισχύει

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_0}{(\kappa v_0 t + 1)^2}\kappa v_0 = -\kappa\left(\frac{v_0}{\kappa v_0 t + 1}\right)^2 = -\kappa v^2.$$

Επίσης βλέπουμε ότι $v(t=0) = v_0$ όπου απαιτεί η αρχική συνθήκη.

7.4. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 7.1. ([1], σελ 166, ασκ 44) Υποθέστε ότι ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στο δρόμο και στα λάστιχα αυτοκινήτου είναι 0.60 και το αυτοκίνητο δεν έχει αρνητική άντωση. Με πόση ταχύτητα το αυτοκίνητο θα έφθανε στο όριο ολίσθησης καθώς εκτελεί καμπυλόγραμμη οριζόντια κίνηση ακτίνας 30.5 m.

Άσκηση 7.2. ([2], σελ 116, ασκ 5.32). Μία γυναίκα στο αεροδρόμιο τραβάει βαλίτσα μάζας $m = 20\,\mathrm{kg}$ με σταθερή ταχύτητα τραβώντας το λουρί που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο, Η γυναίκα τραβάει το λουρί με δύναμη $F = 35\,\mathrm{N}$ και η δύναμη τριβής πάνω στη βαλίτσα είναι $F_T = 20\,\mathrm{N}$. Ποιά γωνία σχηματίζει το λουρί με το οριζόντιο επίπεδο;

Άσκηση 7.3. ([1] σελ 165 ασκ. 36) Η οριακή ταχύτητα ενός αλεξιπτωτιστή ελεύθερης πτώσης είναι $v_1 = 160\,\mathrm{km/h}$ στη στάση " αετός με ανοιγμένα φτερά" και $v_2 = 310\,\mathrm{km/h}$ στη στάση "βουτιά με τη μύτη". Βρείτε τον λόγο ενεργού διατομής A_1 στην πιό αργή στάση ως προς αυτή (A_2) στην πιό γρήγορη.

Λύση. Θεωρούμε οπισθέλκουσα δύναμη $D = (1/2)\rho A v^2$. Η οριακή ταχύτητα $v = v_\ell$ επιτυγχάνεται όταν

$$mg = D \Rightarrow mg = \frac{1}{2}\rho A v_\ell^2 \Rightarrow v_\ell^2 = \frac{2mg}{\rho A}.$$

Ο λόγος των οριακών ταχυτήτων v_1, v_2 γιά διαφορετικές ενεργές διατομές A_1, A_2 (και ίδια τα υπόλοιπα μεγέθη) είναι

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Στην περίπτωσή μας
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{310^2}{160^2} = 3.75.$$
Δηλαδή, η θέση με μεγαλύτερη οριακή ταχύτητα v_1 πετυχαίνεται με ενεργό διατομή A_1 η οποία είναι 3.75 φορές μικρότερη από εκείνη την ενεργό διατομή (A_2) που δίνει οριακή ταχύτητα v_2.

Άσκηση 7.4. ([2] κεφ. 6.4 σελ 132-133) Έστω ένα σώμα μάζας m που κινείται στον αέρα γιά το οποίο έχει παρατηρηθεί ότι η αντίσταση του αέρα είναι $R = -bv$, όπου v η ταχύτητα του σώματος και b σταθερά. (α) Αν το σώμα κινείται κατά την κατακόρυφη μόνο διεύθυνση, γράψτε την εξίσωση του Νεύτωνα που ικανοποιεί. (β) Αν κάνει ελεύθερη πτώση, ποιά η μέγιστη ταχύτητα που θα επιτύχει; (γ) Αν το σώμα είναι αρχικά ακίνητο, εξηγήστε ότι η ταχύτητά του δίνεται από την
$$v(t) = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}).$$
Λύση. (α) Η συνισταμένη δύναμη είναι $F = mg - bv$, όπου θεωρήσαμε θετική την διεύθυνση προς τα κάτω. Εξίσωση Νεύτωνα
$$F = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - bv.$$
(β) Η μέγιστη (οριακή) ταχύτητα επιτυγχάνεται γιά $F = 0$, ώστε
$$mg = bv_\ell \Rightarrow v_\ell = \frac{mg}{b}.$$
(γ) Αν πάρουμε την παράγωγο της ταχύτητας $v(t)$ έχουμε
$$\frac{dv}{dt} = g\,e^{-bt/m}.$$
Αντικαθιστούμε στο νόμο του Νεύτωνα και παίρνουμε
$$m\left(g\,e^{-bt/m}\right) = mg - b\left[\frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m})\right].$$
Αυτή είναι ταυτότητα, ώστε ικανοποιείται η εξ. Νεύτωνα. Τέλος ελέγχουμε ότι, πραγματικά, ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $v(t=0) = 0$.

Ως επιπρόσθετο αποτέλεσμα λαμβάνουμε ότι $\lim_{t\to\infty} v(t) = mg/b = v_\ell$.

Άσκηση 7.5. ([5] σελ. N-2) Βάρκα μάζας m κινείται στην επιφάνεια λίμνης με σταθερή ταχύτητα v_0 με τη βοήθεια του ανέμου. Την χρονική στιγμή $t = 0$ ο άνεμος σταματά. Θεωρούμε ότι η αντίσταση του νερού στην κίνηση της βάρκας είναι ανάλογη της ταχύτητας:
$$F = -\kappa v,$$
όπου $\kappa > 0$ σταθερά. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου. Σε πόσο χρόνο θα σταματήσει η κίνηση της βάρκας; (β) Υπολογίστε τη θέση ως συνάρτηση του χρόνου $x = x(t)$. (γ) Υπολογίστε την ταχύτητα ως συνάρτηση της θέσης $v = v(x)$.
Λύση. (α) Νόμος Νεύτωνα
$$-\kappa v = ma \Rightarrow a = -\frac{\kappa}{m}v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\kappa}{m}v$$
Αυτό γράφεται στην πιό χρήσιμη μορφή
$$\frac{dv}{v} = -\frac{\kappa}{m}dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{\kappa}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \ln v - \ln v_0 = -\frac{\kappa}{m}t \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{\kappa}{m}t \Rightarrow v(t) = v_0\,e^{-\frac{\kappa}{m}t}.$$
Η βάρκα θα σταματήσει όταν $v = 0$ και αυτό θα συμβεί σε χρόνο $t \to \infty$.

(β) Από τον ορισμό της ταχύτητας:
$$\frac{dx}{dt} = v_0\,e^{-\frac{\kappa}{m}t} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_0\,e^{-\frac{\kappa}{m}t}\,dt \Rightarrow x(t) = v_0\frac{m}{\kappa}\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right).$$

(γ) Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα του (α) στο αποτέλεσμα του (β) και έχουμε

$$v(x) = v_0 - \frac{\kappa}{m}x.$$

8. Κινητικη ενεργεια και εργο

8.1. **Ενέργεια.** Τα υλικά αντικείμενα έχουν τη δυνατότητα να κινούνται και θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουν κάποια μικρότερη ή μεγαλύτερη ενέργεια όταν βρίσκονται σε μία αργή είτε ταχύτερη κίνηση. Η ενέργεια αυτή μπορεί να μεταβιβαστεί, π.χ., όταν συγκρουστούν με άλλα σώματα. Αυτή θα την ονομάζαμε *κινητική ενέργεια* αλλά μπορεί να έχει κανείς και άλλα είδη ενέργειας.

8.2. **Έργο.** Μπορούμε να επιταχύνουμε ή να επιβραδύνουμε ένα σώμα.

Παρατήρηση 16. *Έργο W είναι η ενέργεια που μεταφέρεται από ή προς ένα σώμα μέσω της δύναμης που δρα στο σώμα. Έχουμε αρνητικό και θετικό έργο αντίστοιχα.*

Ας θεωρήσουμε μία χάντρα η οποία είναι περιορισμένη να ολισθαίνει κατά μήκος νήματος σε ευθεία γραμμή. Έχουμε γιά τη δύναμη που της ασκείται

$$F_x = ma_x \tag{8.1}$$

όπου m η μάζα της και a_x η επιτάχυνσή της κατά μήκος της ευθείας του νήματος. Αν a_x σταθερά, τότε η χάντρα θα επιταχυνθεί από αρχική ταχύτητα v_0 σε τελική v και θα έχει διανύσει απόσταση d. Ισχύουν οι

$$v = v_0 + a_x t, \quad d = v_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + a_x d$$

ή

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d. \tag{8.2}$$

Ονομάζουμε τους δύο όρους (με θετικό πρόσημο) στο αριστερό μέλος *κινητική ενέργεια* στην τελική και στην αρχική στιγμή αντίστοιχα. Ο όρος στο δεξιό μέλος λέγεται έργο $W = F_x d$ που παρήγαγε η δύναμη F_x.

Παρατήρηση 17. *Παρατηρήστε ότι έργο παραγάγει μόνο η συνιστώσα της δύναμης κατά μήκος της μετατόπισης του σώματος.*

Παρατήρηση 18. *Το έργο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Είναι θετικό αν η δύναμη έχει ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση και αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση.*

8.3. **Θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας.** Τα παραπάνω εκφράζουν το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας:

$$K_f - K_i = W \tag{8.3}$$

όπου K_f, K_i η τελική και η αρχική κινητική ενέργεια αντίστοιχα.

Αν υποθέσουμε ότι η βαρυτική δύναμη κινεί ένα σώμα προς τα κάτω τότε το έγο που παράγει είναι

$$W_g = mgd. \tag{8.4}$$

Αν μία επιπλέον δύναμη ασκείται στο σώμα τότε το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας γίνεται

$$K_f - K_i = W_a + W_g. \tag{8.5}$$

Αν το σώμα ανυψώνεται τότε $W_a > 0$ και $W_g = -mgd < 0$.

8.4. **Δύναμη ελατηρίου.** Αν τεντώσουμε ή συμπιέσουμε ελατήριο τότε υπάρχει *δύναμη επαναφοράς* η οποία το επαναφέρει στο αρχικό του μήκος ισορροπίας. Στην απλή περίπτωση η δύναμη είναι ανάλογη της έκτασης ή συμπίεσης:

$$F_s = -kx \tag{8.6}$$

και έχει φορά αντίθετη της μετατόπισης του άκρου του ελατηρίου.

Το έργο που παράγει αυτή η δύναμη όταν η μετατόπιση είναι από τη θέση x_j στην x_{j+1}, κατά $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, είναι $F_j\,\Delta x_j$, αν η μετατόπιση γίνεται σε διαδοχικά διαστήματα Δx_j, τότε

$$W_s = \sum_j F_j\,\Delta x_j. \tag{8.7}$$

Η F_j μπορεί να εξαρτάται από τη θέση x_j. Αν θεωρήσουμε απειροστά μικρά διαστήματα $\Delta x_j = \Delta x \to dx$ τότε το έργο που παράγεται γιά μετακίνηση από αρχικη θέση x_i σε τελική x_f είναι

$$\begin{aligned} W_s &= \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \\ &= \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx = -\int_{x_i}^{x_f} x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2). \end{aligned}$$

Αν η αρχική θέση είναι η θέση ισορροπίας $x_i = 0$ τότε το έργο του ελατηρίου γιά μετατόπιση μέχρι θέση x είναι

$$W_s = \frac{1}{2}kx^2. \tag{8.8}$$

8.5. **Έργο μεταβλητής δύναμης.** Ας θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε δύναμη $F = F(x)$, συνάρτηση που μπορεί να μεταβάλεται με τη θέση x (γραφική παράσταση). Κοντά σε μία οποιαδήποτε θέση $x = x_j$ όπου το κινητό διανύσει διάστημα Δx η δύναμη είναι περίπου $F_j = F(x_j)$ καθ' όλο το Δx. Άρα το έργο που παράγεται είναι

$$\Delta W_j = F_j \Delta x. \tag{8.9}$$

Στη γραφική παράσταση $F(x)$ το ΔW_j είναι ίσο με το εμβαδό κάτω από τη γραφική παράσταση της $F(x)$ στο διάστημα Δx.

Αν το κινητό κινηθεί από θέση x_i σε θέση x_j τότε αθροίζουμε τα διαδοχικά στοιχειώδη ΔW_j:

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j F_j\,\Delta x. \tag{8.10}$$

Αν θεωρήσουμε τα $\Delta x \to dx$ απειροστά διαστήματα τότε

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_j F_j\,\Delta x \\ \Rightarrow W &= \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Είδαμε ήδη ένα παράδειγμα με τη δύναμη ελατηρίου.

Ξεκινάμε από τον 2ο νόμο Νεύτωνα $F(x) = ma$ και ολοκληρώνουμε σε ένα διάστημα $[x_i, x_j]$:

$$\int_{x_i}^{x_j} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_j} ma\,dx.$$

Βλέπουμε ότι στην αριστερή πλευρά παίρνουμε έργο

$$W = \int_{x_i}^{x_j} F(x)dx.$$

Στην δεξιά πλευρά η ολοκληρωταία γράφεται

$$ma\,dx = m\frac{dv}{dt}\,dx,$$

όπου

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v,$$

οπότε

$$ma\,dx = m\frac{dv}{dx}v dx = mv\,dv.$$

Τελικά

$$W = \int_{v_i}^{v_j} mv\,dv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2. \tag{8.12}$$

Προσέξτε την αλλαγή στα όρια του ολοκληρώματος η οποία συνοδεύει την αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης. Εξαγάγαμε έτσι το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας.

Παρατήρηση 19. *Αν σε ένα κινητό ασκείται δύναμη κάθετη στην ταχύτητά του τότε η ταχύτητα αλλάζει σε φορά αλλά όχι σε μέτρο. Αυτό δείχνει ότι μία τέτοια δύναμη δεν αλλάζει την κινητική ενέργεια και δεν παράγει έργο.*

Ορίζουμε ως έργο δύναμης $\vec{F}$ το εσωτερικό της γινόμενο με την απόσταση στην οποία μετακινείται το σώμα

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}. \tag{8.13}$$

Αυτή η σχέση περιγράφει ότι μόνο η συνιστώσα της δύναμης η παράλληλη στη μετατόπιση παράγει έργο, ενώ η κάθετη συνιστώση παράγει μηδενικό έργο. Η παράλληλη συνιστώσα ξέρουμε ότι δίνει μεταβολή στην ταχύτητα, ενώ η κάθετη δεν δίνει μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητας.

8.6. **Θεώρημα έργου - ενέργειας γιά κίνηση σε τρεις διαστάσεις.** Ας θεωρήσουμε ένα κινητό με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ γιά το οποίο έχουμε

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Θα ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη επάνω στην τροχιά του κινητού:

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int m\frac{d\vec{v}}{dt}\,d\vec{r} \tag{8.14}$$

όπου έχουμε πάρει εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων. Στο αριστερό μέλος εμφανίζεται το έργο $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Στο δεξιό μέλος κάνουμε αλλαγή μεταβλητής και έχουμε

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\frac{d\vec{v}}{dt}\,d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m\frac{d\vec{v}}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_{t_i}^{t_f} m\frac{d\vec{v}}{dt}\,\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}m\int_{t_i}^{t_f}\frac{d\vec{v}^2}{dt}\,dt = \frac{1}{2}m\int_{v_i}^{v_f} d\vec{v}^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2.$$

Τελικά, έχουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας γιά κίνηση σωματίου σε τρεις διαστάσεις:

$$W = K_f - K_i$$

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2. \tag{8.15}$$

8.7. **Ισχύς.** Αν μας ενδιαφέρει ο χρόνος στον οποίο παράγεται το έργο τότε ορίζουμε την ισχύ

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{8.16}$$

η οποία δίνει το ρυθμό παραγωγής έργου. Όταν μία δύναμη F μετατοπίζει σώμα κατά απειροστή απόσταση ds τότε $dW = F\,ds$, ώστε

$$P = F\,\frac{ds}{dt} = F\,v. \tag{8.17}$$

Αν γνωρίζουμε την ισχύ τότε το έργο είναι

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt, \tag{8.18}$$

όπου υποθέσαμε ότι η ισχύς είναι συνάρτηση του χρόνου.

8.8. Ασκήσεις.

Άσκηση 8.1. Σωμάτιο μάζας m εκκινεί από την ηρεμία, κινείται σε ευθεία γραμμή και η ταχύτητά του μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο

$$v = b\sqrt{s},$$

όπου b σταθερά και s η διανυθείσα απόσταση. Να υπολογισθεί το παραγόμενο έργο ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση. Γιά την απόσταση s που διανύεται έχουμε

$$\frac{ds}{dt} = b\sqrt{s} \Rightarrow \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s}} = b\int_0^t dt \Rightarrow 2\sqrt{s} = bt \Rightarrow s = \frac{1}{4}b^2\,t^2.$$

Επίσης, η ασκούμενη δύναμη είναι

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = mb\frac{d(\sqrt{s})}{dt} = mb\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}bt\right) = \frac{1}{2}mb^2.$$

Συνεπώς

$$W = F \cdot s(t) = \frac{1}{8}mb^4t^2.$$

Άσκηση 8.2. ([5] ΕΔ-4) Σωμάτιο μετακινείται στο επίπεδο xy από το σημείο $\vec{r}_1 = (\vec{i} + 2\vec{j})\,\mathrm{m}$ μέχρι το σημείο $\vec{r}_2 = (2\vec{i} - 3\vec{j})\,\mathrm{m}$. Το σωμάτιο κινείται υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης $\vec{F} = (3\vec{i} + 4\vec{j})\,\mathrm{N}$. Υπολογίστε το έργο που εκτελείται από την $\vec{F}$.

Λύση. Επειδή η $\vec{F}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Είναι $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\vec{i} - 5\vec{j})\,\mathrm{m}$, ώστε

$$W = \ldots = -17\,\mathrm{Nm}$$

Άρα, το σωμάτιο, κατά την κίνησή του από $\vec{r}_1$ σε $\vec{r}_2$ απορροφά ενέργεια $17\,\mathrm{Nm} = 17\,\mathrm{J}$.

Άσκηση 8.3. ([5] WK-9) Σε σωμάτιο μάζας m δρα η δύναμη

$$\vec{F} = (2x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j}$$

Το σωμάτιο ξεκινά από το σημείο $(0,0)$ και καταλήγει στο $(1,1)$. Υπολογίστε το έργο της δύναμης στις δύο περιπτώσεις: (α) το σωμάτιο διατρέχει τον οριζόντιο άξονα με το x να μεταβάλεται από 0 σε 1 και ακολούθως κινείται κάθετα μέχρι το τελικό σημείο $(1,1)$, (β) το σωμάτιο διατρέχει τον κάθετο άξονα με το y να μεταβάλεται από 0 σε 1 και ακολούθως κινείται κάθετα μέχρι το τελικό σημείο $(1,1)$. (γ) Είναι η δύναμη συντηρητική;

Λύση. Έστω $\vec{r}_1 = 0$, $\vec{r}_2 = \vec{i} + \vec{j}$.

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (F_x\vec{i} + F_y\vec{j})\cdot(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) = \int F_x dx + F_y dy.$$

(α)

$$W_1 = \int_0^1 F_x(x, y=0)dx + \int_0^1 F_y(x=1, y)dy = \int_0^1 2xdx + \int_0^1 (1+y)dy = \left[x^2\right]_0^1 + \left[y + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{2}.$$

(β)

$$W_2 = \int_0^1 F_y(x=0, y)dy + \int_0^1 F_x(x, y=1)dy = \int_0^1 ydy + \int_0^1 (2x-1)dx = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \left[x^2 - x\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(γ) Παρατηρούμε διαφορετικό παραγόμενο έργο γιά διαφορετικές τροχιές. Άρα η δύναμη δεν είναι συντηρητική.

Άσκηση 8.4. ([5] ΕΔ-7) Σε σωμάτιο μάζας m δρα η δύναμη

$$\vec{F} = \cos\frac{y}{x}\,\vec{i} + \sin y\,\vec{j}$$

η οποία μετατοπίζει το σωμάτιο κατά μήκος της καμπύλης $y = x^2$. Άρα, η θέση του σωματίου δίνεται από την παραμετρική εξίσωση

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}.$$

Να υπολογισθεί το παραγόμενο έργο κατά τη μετατόπιση του σωματίου από το σημείο $A(1,1)$ στο $B(2,4)$.

Λύση.

$$\begin{aligned} x &= t \Rightarrow dx = dt \\ y &= t^2 \Rightarrow dy = d(t^2). \end{aligned}$$

Βρίσκουμε το $A(1,1)$ γιά $t=1$ και το $B(2,4)$ γιά $t=2$. Επίσης,

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int F_x\,dx + F_y\,dy = \int_1^2 \cos t\,dt + \int_{1^2}^{2^2} \sin(t^2)\,d(t^2) \\ &= \sin(2) - \sin(1) - \cos(4) + \cos(1). \end{aligned}$$

Άσκηση 8.5. ([1] σελ. 201 ασκ 39) Σε ένα σωμάτιο μάζας $m = 2\,\mathrm{kg}$, το οποίο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία στη θέση $x = 0$, ασκείται δύναμη F. Η επιτάχυνση του σωματίου σαν συνάρτηση της θέσης του δίνεται από την

$$a(x) = \begin{cases} 6x, & 0 \le x \le 1 \\ 6, & 1 \le x \le 4 \\ 6(5-x), & 4 \le x \le 6 \\ -6, & 6 \le x \le 8 \\ 6(x-9), & 8 \le x \le 9. \end{cases} \tag{8.19}$$

(α) Κάνετε την γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης (υπόδειξη: πρόκειται γιά συνεχή συνάρτηση). (β) Πόσο έργο έχει εκτελέσει η δύναμη στο σωμάτιο όταν αυτό φθάσει στη θέση $x = 9$; (γ) Πόση είναι η ταχύτητα του σωματίου στη θέση $x = 9$;

Λύση. (α) (Halliday, σελ. 201, ασκ 39)

(β)

$$W = \int_0^9 F\,dx = m\int_0^9 a\,dx.$$

Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^9 a\,dx &= \int_0^1 6x\,dx + \int_1^4 6\,dx + \int_4^6 6(5-x)\,dx - \int_6^8 6\,dx + \int_8^9 6(x-9)\,dx \\ &= \int_0^1 6x\,dx + \int_1^4 6\,dx - \int_{-1}^1 6s\,ds - \int_6^8 6\,dx + \int_{-1}^0 6s\,ds \\ &= 3x^2|_0^1 + 6x|_1^4 - 3s^2|_{-1}^1 - 6x|_6^8 + 3s^2|_{-1}^0 \\ &= 3 + 6\cdot 3 - 3\cdot 0 - 6\cdot 2 + 3(-1) = 6. \end{aligned}$$

Τελικά

$$W = m\int_0^9 a\,dx = 12.$$

(γ) Από το Θ. έργου - κινητικής ενέργειας, γιά αρχική $K_i = 0$ και έργο $W = 12$, έχουμε

$$\frac{1}{2}mv^2 = W \Rightarrow v^2 = 12.$$

8.9. **Ερωτήσεις.**

Άσκηση 8.6. ([1], σελ. 179) Σωμάτιο κινείται κατά μήκος άξονα x. Η κινητική του ενέργεια αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει ίδια αν η ταχύτητά του αλλάξει (α) από $-3\,\mathrm{m/s}$ σε $-2\,\mathrm{m/sec}$ (β) από $2\,\mathrm{m/sec}$ σε $2\,\mathrm{m/sec}$; (γ) το έργο που εκτελείται στο σωμάτιο είναι θετικό αρνητικό ή μηδέν;

9. Δυναμική ενεργεια

9.1. **Βαρυτική δύναμη.** Ας δούμε την βαρυτική δύναμη, η οποία ξέρουμε ότι υπάρχει ως ιδιότητα του χώρου (π.χ. του χώρου γύρω από τη Γη), δηλαδή δεν εξαρτάται από την πορεία κίνησης του κινητού σωματίου, την ταχύτητά του ή οτιδήποτε παρόμοιο. Τέτοιες ιδιότητες δεν τις έχουν όλες οι δυνάμεις, π.χ., η οπισθέλκουσα δύναμη εξαρτάται από την ταχύτητα του κινητού.

Κοντά στη Γη η βαρυτική δύναμη είναι

$$\vec{F} = -mg\,\vec{j}. \tag{9.1}$$

Το έργο που παράγει αυτή η δύναμη γιά κίνηση κατά τον άξονα y υπολογίζεται εύκολα:

$$W = \int_{y_i}^{y_f} F(x)\,dy = -mg(y_f - y_i), \tag{9.2}$$

όπου y είναι το ύψος πάνω από τη Γη. Άρα το έργο που παράγει αυτή η δύναμη εξαρτάται από το αρχικό και τελικό ύψος του σωματίου και όχι από την ενδιάμεση κινητική του κατάσταση.

Παράδειγμα 9.1. Έστω σώμα μάζας m το οποίο ωθείται σε κεκλιμένη επιφάνεια (η οποία σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο) προς τα επάνω από σταθερή δύναμη $\vec{F}$ παράλληλη στην κεκλιμένη επιφάνεια. Έστω ότι το σώμα μετατοπίζεται κατά απόσταση d επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Ποιό το έργο που παράγει η βαρυτική δύναμη γιά τη μετατόπιση αυτή;
Λύση. Η δύναμη της βαρύτητας είναι κατακόρυφη και η συνιστώσα της η παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο είναι $-mg\sin\theta$. Το έργο αυτής είναι

$$W_g = -mg\sin\theta\, d = -mgh,$$

όπου $h = -d\sin\theta$ το ύψος στο οποίο ανέβηκε το σώμα. Άρα το έργο της δύναμης βαρύτητας είναι ίσο με την δύναμη βαρύτητας επί την κατακόρυφη μετατόπιση. Αυτό είναι ανεξάρτητο της διαδρομής του σώματος.

Τέλος, η εφαρμοζόμενη δύναμη $\vec{F}$ θα παραγάγει έργο

$$W_F = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = Fd.$$

□

Σε κάθε σημείο y μπορούμε να προσδώσουμε μία ιδιότητα, ότι το σωμάτιο έχει δυναμική ενέργεια

$$U(y) = mgy. \tag{9.3}$$

Τότε το έργο W είναι ίσο με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας από το ένα σημείο στο άλλο:

$$W = -[U(x_f) - U(x_i)] = -\Delta U. \tag{9.4}$$

Παρατήρηση 20. *Παρατηρήστε ότι η δυναμική ενέργεια, όπως ορίστηκε, είναι $U = 0$ επάνω στην επιφάνεια της Γης $y = 0$. Η τιμή όμως της δυναμικής ενέργειας δεν σχετίζεται άμεσα με το έργο. Μόνο διαφορές τιμών αυτής δίνουν το έργο.*

Εάν τροποποιήσουμε τον ορισμό της δυναμική ενέργειας της βαρύτητας και θέσουμε $U(y) = mg(y - h_0)$ όπου h_0 είναι το ύψος του διαμερίσματος στο οποίο μένουμε (π.χ., $h_0 = 10\,\mathrm{m}$ αν μένουμε στον 3ο όροφο), οπότε $U(y = h_0) = 0$ στο ύψος του διαμερίσματός μας. Τότε η σχέση που δίνει το έργο $W = -\Delta U$ ισχύει χωρίς αλλαγή.

9.2. **Δυναμική ενέργεια ελαστικότητας.** Την δύναμη του ελατηρίου $F(x) = -kx$ μπορούμε να την δούμε ως ιδιότητα του χώρου κοντά στο ελατήριο. Το έργο που παράγει είναι

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_i}^{x_f} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2),$$

όπου x είναι η απόσταση από τη θέση ισορροπίας. Ας ορίζουμε δυναμική ενέργεια, γιά κάθε θέση x, την

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \tag{9.5}$$

9.3. **Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.** Έχουμε δει την σχέση που δίνει τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω δύναμης η οποία παράγει έργο W:

$$\Delta K = W.$$

Εάν γιά τη δύναμη μπορεί να ορισθεί δυναμική ενέργεια U με $W = -\Delta U$ τότε

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0.$$

Αυτή γράφεται αναλυτικότερα ως

$$(K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = 0 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2. \tag{9.6}$$

Ορίζουμε τη *μηχανική ενέργεια* ως το άθροισμα

$$E_m = K + U \tag{9.7}$$

της κινητικής και δυναμικής ενέργειας του κινητού σε κάθε χρονική στιγμή. Έχουμε δείξει ότι η μηχανική ενέργεια διατηρείται κατά τη διάρκεια της κίνησης λόγω δύναμης που περιγράφεται από δυναμική ενέργεια.

Τη διατήρηση της ενέργειας είναι χρήσιμο να την καταλάβουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο ένας είναι να δούμε ότι το άθροισμα $K + U$ έχει την ίδια αριθμητική τιμή γιά κάθε χρονική στιγμή:

$$E_0 = K + U. \tag{9.8}$$

Ο δεύτερος είναι να δούμε ότι γιά δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_i και t_f έχουμε

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f. \tag{9.9}$$

Παράδειγμα 9.2. Έστω σωμάτιο σε πεδίο βαρύτητας με $U = mg\,y$, όπου υποθέτουμε $y \geq 0$, γιά μάζα $m = 1$ και έστω $g = 10$. Επιλέγουμε (α) $E_m = 10$ (β) $E_m = 0$. Βρείτε την ταχύτητά του.
Λύση. Καθώς το κινητό βρίσκεται σε κίνηση, ισχύει γιά την ταχύτητα και θέση σε κάθε χρονική στιγμή

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgy.$$

(α) Εφαρμόζοντας τα παραπάνω

$$10 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}v^2 + 10y \Rightarrow v^2 = 20(1-y).$$

Γιά $0 \leq y \leq 1$ μπορούμε να έχουμε τις ταχύτητες

$$v = \pm\sqrt{10(1-y)}.$$

Το πρόσημο καθορίζει αν η ταχύτητα θα είναι προς τα κάτω ή προς τα επάνω.

(β) Έχουμε

$$\frac{1}{2}v^2 + 10y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Το κινητό δεν μπορεί να αποκτήσει κατακόρυφη ταχύτητα. □

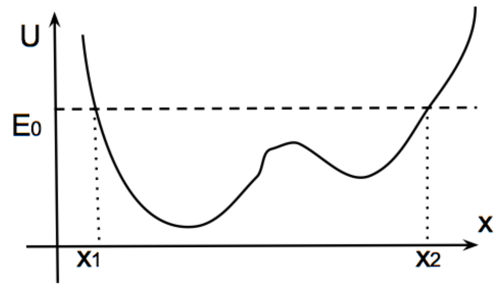
9.4. **Δύναμη από δυναμική ενέργεια.** Αν υποθέσουμε ότι η δύναμη, επάνω σε έναν άξονα, εξαρτάται μόνο από την θέση $F = F(x)$, τότε υπάρχει, στις περισσότερες περιπτώσεις, συνάρτηση $U(x)$ τέτοια ώστε

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}. \tag{9.10}$$

Αυτή είναι η αντιπαράγωγος της $F(x)$ και ονομάζεται συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. Είδαμε ήδη ως παραδείγματα την δυναμική ενέργεια βαρύτητας και ελαστικότητας.

Είναι συχνά δυνατό να γνωρίζουμε την δυναμική ενέργεια, οπότε η παραπάνω σχέση θα μας δώσει την αντίστοιχη δύναμη. Ως παραδείγματα δείτε την βαρυτική δύναμη: $F = -d(mgy)/dy = -mg$ και την δύναμη ελαστικότητας $F = -d(1/2kx^2)/dy = -kx$.

9.5. **Πληροφορίες από την καμπύλη δυναμικής ενέργειας.** Ας δούμε μία γραφική παράσταση γιά δυναμική ενέργεια. Η δύναμη βρίσκεται ως η κλίση αυτής της καμπύλης σε κάθε σημεία της.



Σχημα 4. Γραφική παράσταση δυναμικής ενέργειας $U(x)$ (συνεχής γραμμή). Η τιμή της ολικής μηχανικής ενέργειας θεωρούμε ότι είναι E_0 (διακεκομμένη γραμμή).

Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια K εξαρτάται από το τετράγωνο της ταχύτητας v και είναι πάντα θετική. Η δυναμική ενέργεια εξαρτάται από τη θέση (και όχι από την ταχύτητα). Άρα, γιά κάθε αριθμητική τιμή που θα έχει η μηχανική ενέργεια E_m θα έχουμε μία σχέση μεταξύ θέσης και ταχύτητας. Ας γράψουμε το Θ. διατήρησης μηχανικής ενέργειας ως

$$K(x) = E_0 - U(x). \tag{9.11}$$

Σχεδιάζουμε την ευθεία $E = E_0$ μαζί με την $U = U(x)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε σημεία $x = x_0$ γιά τα οποία $K(x_0) = 0$. Στο σχήμα, τέτοια σημεία είναι τα $x = x_1$ και $x = x_2$. Επίσης έχουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις

- Στα x όπου $E_0 < U(x)$ θα είχαμε $K(x) < 0$ που είναι αδύνατο, άρα το σωμάτιο δεν μπορεί να βρεθεί σε τέτοια σημεία.
- Στα x όπου $E_0 > U(x)$ θα έχουμε $K(x) > 0$ και άρα το σωμάτιο είναι δυνατόν να βρεθεί σε αυτή την περιοχή.
- Στα $x = x_{1,2}$ όπου $E_0 = U(x)$ έχουμε $K(x) = 0 \Rightarrow v^2 = 0$ άρα το σωμάτιο βρίσκεται στιγμιαία με μηδενική ταχύτητα.

Γιά να έχουμε την πλήρη εικόνα μπορούμε να υποθέσουμε, σε κάποια χρονική στιγμή, σωμάτιο με ταχύτητα $v > 0$ (κινείται προς τα δεξιά). Η ταχύτητα παραμένει υποχρεωτικά μη-μηδενική μέχρι το σωμάτιο να φθάσει σε σημείο $x = x_2$. Στο σημείο εκείνο $v = 0$ και η επιτάχυνση είναι ανάλογη της δύναμης $-dU/dx < 0$, άρα το σωμάτιο θα αποκτήσει $v < 0$. Δηλαδή, το σωμάτιο δεν θα παραμείνει σε ακινησία, αλλά θα αρχίσει να κινείται αριστερά. Όταν φθάσει στο $x = x_1$ θα έχουμε και πάλι $v = 0$ και η κίνηση θα αναστραφεί και πάλι. Τα σημεία $x = x_{1,2}$ λέγονται *σημεία αναστροφής της κίνησης*. Αν προς την κατεύθυνση κίνησης δεν υπάρχει σημείο αναστροφής, τότε το σωμάτιο θα συνεχίσει να κινείται επ' άπειρον.

Δείτε τι συμβαίνει όταν αλλάζει η τιμή E_0. Μπορεί να έχουμε, κανένα έως και τέσσερα σημεία αναστροφής της κίνησης στην περίπτωση του σχήματος. Στην περίπτωση που E_0 είναι ίση με την τιμή ενός ελαχίστου της $U(x)$, έστω στη θέση $x = x_m$, τότε το σωμάτιο θα βρίσκεται αναγκαστικά στη θέση αυτού του ελαχίστου. Αν δούμε την εξίσωση διατήρησης ενέργειας τότε αυτή έχει λύση $x = x_m$.

9.6. **Διατηρητικές δυνάμεις.**

Παρατήρηση 21. *Οι δυνάμεις οι οποίες μπορούν να περιγραφούν με την βοήθεια συνάρτησης δυναμικής ενέργειας λέγονται διατηρητικές δυνάμεις. Όταν στο σύστημα δρουν τέτοιες δυνάμεις ισχύει ότι, παρ΄ ότι η κινητική και δυναμική ενέργεια μπορούν να αλλάξουν, το άθροισμά τους παραμένει σταθερό κατά την κίνηση.*

Κατά την κίνηση από μία θέση $\vec{r}_1$ σε θέση $\vec{r}_2$ παράγεται έργο το οποίο είναι ίσο με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας. Αν η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από τη θέση τότε και η μεταβολή $\Delta U = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$ εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση.

Παρατήρηση 22. *Το έργο που εκτελείται από μία συντηρητική δύναμη σε σωμάτιο που κινείται ανάμεσα σε δύο σημεία δεν εξαρτάται από την διαδρομή που ακολουθεί το σωματίδιο.*

Μπορούμε να εκφράσουμε το ίδιο πράγμα ως εξής

Παρατήρηση 23. *Το έργο που εκτελείται από μία συντηρητική δύναμη σε σωμάτιο που κινείται κατά μήκος κάθε κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.*

9.7. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 9.1. Η δυναμική ενέργεια σώματος μάζας m δίνεται από τη συνάρτηση

$$U(x) = ax^3 - bx,$$

όπου $a, b > 0$ σταθερές. (α) Ποιά η δύναμη που δρα στο σωμάτιο; (β) Γιά ποιές τιμές του x η δύναμη μηδενίζεται; (γ) Αν η ολική ενέργεια του σωματίου είναι ίση με μηδέν, γιά ποιές τιμές του x η ταχύτητα μηδενίζεται;
Λύση. (α)

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -(3ax^2 - b).$$

(β)

$$F(x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 - b = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{3a}}.$$

(γ)

$$\frac{1}{2}mv^2 + ax^3 - bx = 0.$$

Αν $v = 0$ τότε

$$ax^3 - bx = 0 \Rightarrow x = 0, \qquad x = \pm\sqrt{b/a}.$$

Είναι πολύ χρήσιμο να δούμε τι σημαίνουν τα παραπάνω στη γραφική παράσταση της $U(x)$.

Άσκηση 9.2. Σώμα μάζας m κινείται κατά τον άξονα x υπό τη δράση δυνάμεως

$$F = -\frac{c}{x^2},$$

όπου $c > 0$ σταθερά. Ποιά η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος x_m κατά την θετική κατεύθυνση x, αν στην αρχική θέση x_0 έχει ταχύτητα v_0;

Λύση. Επειδή η δύναμη είναι συνάρτηση της θέσης, αυτή δίνεται από δυναμική ενέργεια $U(x)$ τέτοια ώστε

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U = \int_{x_0}^{x} \frac{c}{x^2} dx \Rightarrow U(x) = -c \left[\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x} = -c\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right).$$

Με αυτό τον ορισμό $U(x_0) = 0$,

Η δύναμη είναι συντηρητική, άρα η ολική ενέργεια

$$E = K + U(x)$$

είναι σταθερή. Έχουμε

$$K(x_0) + U(x_0) = K(x) + U(x) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - c\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)$$

Στη μέγιστη απομάκρυνση $v = 0$, άρα

$$K(x_0) = U(x_m) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = -c\left(\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_0}\right).$$

Τελικά

$$x_m = \frac{c}{\frac{c}{x_0} - \frac{1}{2}mv_0^2}.$$

Άσκηση 9.3. ([5] WK-17) Σημειακή μάζα εκκινεί από την ηρεμία από την κορυφή ακλόνητης σφαίρας και ολισθαίνει στη λεία επιφάνειά της (χωρίς τριβή). Να βρεθούν: (α) Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας της μάζας ως συνάρτηση της γωνίας θ που δίνει τη θέση της μάζας επάνω στη σφαίρα (θεωρούμε $\theta = 0$ στον βόρειο πόλο της σφαίρας). (β) Η κινητική ενέργεια ως συνάρτηση της γωνίας θ. (γ) Η ακτινική (κεντρομόλος) και η επιτρόχιος (εφαπτομενική) επιτάχυνση ως συνάρτηση της γωνίας θ. (δ) Η γωνία στην οποία η μάζα εγκαταλείπει τη σφαίρα (χάνει την επαφή της).

Λύση. (α)

$$U(\theta) = mgr\cos\theta.$$

(β) Η ενέργεια στη γωνία $\theta = 0$ είναι $K = 0$, $U = mgr$ άρα $E = K + U = mgr$, οπότε σε τυχούσα γωνία:

$$K(\theta) + mgr\cos\theta = mgr \Rightarrow K(\theta) = mgr(1 - \cos\theta).$$

(γ)

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr(1 - \cos\theta) \Rightarrow v^2 = 2gr(1 - \cos\theta).$$

Ακτινική επιτάχυνση

$$a_r = \frac{v^2}{r} = 2g(1 - \cos\theta).$$

Εφαπτομενική δύναμη $F_t = mg\sin\theta$ και επιτάχυνση

$$a_t = \frac{F_t}{m} = g\sin\theta.$$

(δ) Σε τυχόν σημείο έχουμε δυνάμεις

$$\vec{F} = \vec{B} + \vec{N},$$

όπου $\vec{F} = m\vec{a}$, το βάρος $\vec{B} = -mg\vec{k}$ και η αντίσταση από τη σφαίρα $\vec{N} = N\hat{r}$. Η προβολή των δυνάμεων στη διεύθυνση της ακτίνας $\vec{r}$ δίνει

$$-m\frac{v^2}{r} = -mg\cos\theta + N.$$

Κατά τη στιγμή που χάνεται η επαφή του σώματος με τη σφαίρα έχουμε $N = 0$ και συνεπώς

$$\frac{v^2}{r} = g\cos\theta.$$

Από το (γ) έχουμε $v^2/r = 2g(1-\cos\theta)$, άρα

$$\cos\theta = 2(1-\cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta \approx 41.8^o.$$

Άσκηση 9.4. Σώμα κινείται στο επίπεδο όπου του ασκείται συντηρητική δύναμη η οποία προέρχεται από δυναμική ενέργεια

$$U(x,y) = \frac{1}{2}k(x^2+y^2).$$

Ποιά η δύναμη που ασκείται στο σώμα;
Λύση. Σε πολικές συντεταγμένες

$$U = U(r) = \frac{1}{2}kr^2,$$

οπότε η δύναμη είναι

$$F = -\frac{dU}{dr} = -kr.$$

Η δυναμική ενέργεια μεταβάλεται κατά την ακτινική διεύθυνση και άρα αυτή είναι η διεύθυνση της δύναμης:

$$\vec{F} = -kr\hat{r} = -k\vec{r} = -k(x\vec{i} + y\vec{j}).$$

Άσκηση 9.5. ([6] ασκ 3.3) Έστω το πεδίο δυνάμεων

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{Mm}{r^2}\,\hat{r},$$

το οποίο περιγράφει την έλξη μεταξύ δύο μαζών, π.χ., του ήλιου με μάζα M και της Γης με μάζα m. Το G είναι η σταθερά της βαρύτητας και r είναι η απόσταση μεταξύ των μαζών. Η δύναμη έχει τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{r} = \vec{r}/r$ και το μείον πρόσημο σημαίνει ότι η φορά της δύναμης είναι από τη μία μάζα προς την άλλη (δηλαδή η δύναμη είναι ελκτική). Βρείτε τη δυναμική ενέργεια η οποία δίνει αυτή την δύναμη.
Λύση. Σε πολικές συντεταγμένες

$$F = -\frac{dU}{dr} \Rightarrow U(r) = -\int F(r)dr$$

άρα

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}.$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα από τη σχέση

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\,\hat{r}.$$

Άσκηση 9.6. ([2] σελ. 184, παράδειγμα 8.5) Ένας χιονοδρόμος ξεκινά από ακινησία στην κορυφή ενός βουνού και κατεβαίνει μία λεία πλαγιά ύψους $h = 20\,\mathrm{m}$ με γωνία κλίσης $\theta = 20^o$. Στο τέλος της πλαγιάς ο χιονοδρόμος βρίσκει μία τραχιά οριζόντια επιφάνεια, η οποία έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο χιόνι και στα σκι $\mu = 0.21$. Πόσο μακριά πάει ο χιονοδρόμος προτού σταματήσει;
Λύση. Γιά να βρούμε το μέτρο ταχύτητας v του χιονοδρόμου (μάζας m) στο κάτω μέρος της πλαγιάς εφαρμόζουμε το Θ. διατήρησης μηχανικής ενέργειας:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 19.8\,\mathrm{m/sec}.$$

Η δύναμη τριβής f επάνω στην τραχιά επιφάνεια είναι ανάλογη της κάθετης αντίστασης του εδάφους $f = \mu N = \mu mg$. Το έργο που παράγει η δύναμη τριβής ανάλογο της απόστασης s που διανύεται

$$W_{\mathrm{f}} = -fs = -\mu mgs.$$

Αν θεωρήσουμε ότι η τριβή καταναλώνει όλη την κινητική ενέργεια, οπότε ακινητοποιείται ο χιονοδρόμος, έχουμε

$$W_{\mathrm{f}} = K_f - K_i \Rightarrow \mu m g s = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow s = \frac{v^2}{2\mu g} = \ldots = 95.2\,\mathrm{m}.$$

Άσκηση 9.7. (Serway σελ 185 άσκηση 3) Ένας χιονοδρόμος ξεκινά από ακινησία στην κορυφή ενός βουνού και κατεβαίνει μία πλαγιά ύψους $h = 20\,\mathrm{m}$ με γωνία κλίσης $\theta = 30^o$. Στο τέλος της πλαγιάς ο χιονοδρόμος συνεχίζει να κινείται σε οριζόντια επιφάνεια. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης (στην πλαγιά και στην οριζόντια επιφάνεια) ανάμεσα στο χιόνι και στα σκι είναι $\mu = 0.21$. Πόση απόσταση διανύει ο χιονοδρόμος στην οριζόντια επιφάνεια προτού σταματήσει;
Λύση. Το βάρος παράγει έργο

$$W_B = mgh.$$

Ο χιονοδρόμος διανύσει απόσταση $\ell = h/\sin\theta$ κατά μήκος της πλαγιάς και έστω ότι κινείται απόσταση s στην οριζόντια επιφάνεια. Η δύναμη τριβής είναι $f = -\mu N$, όπου N η κάθετη στο έδαφος δύναμη. Είναι $N = mg\cos\theta$ επάνω στην πλαγιά και $N = mg$ στην οριζόντιο. Το έργο που παράγει η τριβή είναι

$$W_f = -[\mu(mg\cos\theta)(h/\sin\theta) + \mu(mg)s] = -\mu m g \left(h\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + s \right).$$

Θα θεωρήσουμε ότι η τριβή καταναλώνει όλο το έργο που παράγει το βάρος οπότε αυτός τελικά ακινητοποιείται στην οριζόντιο. Τότε το Θ. έργου - ενέργειας δίνει

$$W_{\mathrm{f}} + W_B = 0 \Rightarrow \mu m g \left(h\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + s \right) = mgh \Rightarrow s = h\frac{1 - \mu\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\mu}.$$

Βρίσκουμε

$$s = 60.6\,\mathrm{m}.$$

10. Δυναμικη πολλων σωματων

10.1. Κέντρο μάζας. Γιά ένα σύστημα σωματίων η πλήρης περιγραφή της δυναμικής του απαιτεί την περιγραφή της κίνησης κάθε σωματίου, άρα μπορεί να είναι περίπλοκη. Γιά να κάνουμε μία γενική περιγραφή της κίνησης, παραλείποντας τις λεπτομέρειες της κίνησης κάθε ενός σωματίου, χρειαζόμαστε την έννοια του κέντρου μάζας. Αυτή είναι η μέση θέση των μαζών των σωματίων. Γιά δύο μάζες m_1 και m_2 που βρίσκονται στις θέσεις x_1, x_2, η θέση του κέντρου μάζας είναι

$$x_{\rm cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{10.1}$$

Γιά $m_1 = m_2 = m$ παίρνουμε $x_{\rm cm} = (x_1 + x_2)/2$ δηλαδή βρίσκεται στη μέση της μεταξύ τους απόστασης. Αν $m_1 \gg m_2$ τότε $x_{\rm cm} \approx x_1$, δηλαδή το κέντρο μάζας βρίσκεται πλησιέστερα στη μεγαλύτερη μάζα.

Αν ορίζουμε το άθροισμα των μαζών $M = m_1 + m_2$ τότε

$$x_{\rm cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}. \tag{10.2}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε γιά n μάζες, οπότε ορίζουμε $M = \sum_{i=1}^n$ και

$$x_{\rm cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i. \tag{10.3}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι

$$v_{\rm cm} = \frac{dx_{\rm cm}}{dt} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_n v_n}{M} \tag{10.4}$$

και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι

$$a_{\rm cm} = \frac{dv_{\rm cm}}{dt} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n}{M}. \tag{10.5}$$

Γιά σωματίδια σε τρεις διαστάσεις, με θέσεις $\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$ ορίζουμε

$$x_{\rm cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i x_i, \qquad y_{\rm cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i y_i, \qquad z_{\rm cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i z_i. \tag{10.6}$$

Στην περίπτωση στερεών σωμάτων δεν έχουμε διαχωρισμένες μάζες m_i αλλά μπορούμε να υποθέσουμε ότι το στερεό χωρίζεται σε μικρά κομμάτια με μάζες dm, ώστε

$$x_{\rm cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm, \quad y_{\rm cm} = \ldots \tag{10.7}$$

Θα υποθέσουμε σώμα με σταθερή πυκνότητα (ομογενές)

$$\rho \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV, \qquad M = \rho V. \tag{10.8}$$

Έχουμε

$$x_{\rm cm} = \frac{1}{V}\int x dV, \quad y_{\rm cm} = \ldots. \tag{10.9}$$

10.2. Κίνηση κέντρου μάζας. Ο 2ος νόμος Νεύτωνα γιά ένα σωμάτιο μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \vec{p} = m\vec{v}. \tag{10.10}$$

Ονομάζουμε το $\vec{p}$ ορμή του σωματίου, ώστε έχουμε ότι η ορμή σωματίου αλλάζει μόνο υπό την επίδραση δύναμης. Η τελευταία δίνει τον ρυθμό μεταβολής της ορμής.

Έστω δύο σωμάτια με ορμές $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ και $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$. Οι δυνάμεις που ασκούν μεταξύ τους είναι $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ σύμφωνα με τον 3ο νόμο Νεύτωνα. Απουσία άλλης δύναμης

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{v}_1}{dt}, \quad \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{v}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} \Rightarrow \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0.$$

Η ολική ορμή

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{10.11}$$

μένει αμετάβλητη (διατηρείται). Αν όμως υποθέσουμε την ύπαρξη μία εξωτερικής δύναμης $\vec{F}_1$ η οποία επιταχύνει το σωμάτιο 1 και μίας $\vec{F}_2$ η οποία επιταχύνει το 2, τότε έχουμε το αποτέλεσμα

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \tag{10.12}$$

Γιά n σωμάτια ισχύει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ορμής $\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων $\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i\right)}{dt} \qquad \text{ή} \qquad \vec{F}_{\text{tot}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt}. \tag{10.13}$$

Παρατήρηση 24. *(α) Η ολική ορμή συστήματος σωματίων μεταβάλλεται από την συνισταμένη δύναμη σε όλα τα σωμάτια. (β) Αν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν, η ολική ορμή διατηρείται. (γ) Αν μία συνιστώσα της δύναμης είναι μηδέν τότε η αντίστοιχη συνιστώσα της ορμής διατηρείται.*

Βλέπουμε ότι η ποσότητα στο δεξιό μέλος σχετίζεται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας

$$M\vec{v}_{\text{cm}} = m_1\vec{v}_1 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \vec{p}_{\text{tot}}. \tag{10.14}$$

Τελικά

$$M\frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\text{tot}} \Rightarrow M\vec{a}_{\text{cm}} = \vec{F}_{\text{tot}}. \tag{10.15}$$

Παρατήρηση 25. *Το άθροισμα των δυνάμεων που εφαρμόζεται στα μέρη συστήματος σωμάτων δρα όπως μία δύναμη που εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας των σωμάτων.*

10.3. **Ορμή στο σύστημα κέντρου μάζας.** Έστω δύο σώματα με θέσεις $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ και η θέση του κέντρου μάζας $\vec{r}_{\text{cm}}$. Ας περιγράψουμε τη δυναμική στο σύστημα του κέντρου μάζας. Οι θέσεις των σωματίων είναι

$$\vec{r}_1\prime = \vec{r}_1 - \vec{r}_{\text{cm}}, \qquad \vec{r}_2\prime = \vec{r}_2 - \vec{r}_{\text{cm}} \tag{10.16}$$

και οι αντίστοιχες ταχύτητες

$$\vec{v}_1\prime = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\text{cm}}, \qquad \vec{v}_2\prime = \vec{v}_2 - \vec{v}_{\text{cm}}, \tag{10.17}$$

όπου υποθέτουμε ταχύτητα γιά το κέντρο μάζας

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{10.18}$$

Ώστε

$$\vec{v}_1\prime = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1),$$
$$\vec{v}_2\prime = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Οι ορμές των σωματίων στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι

$$\vec{p}_1\prime = -\mu\vec{v}, \qquad \vec{p}_2\prime = \mu\vec{v}, \tag{10.19}$$

όπου έχουμε ορίσει την ανηγμένη μάζα και τη σχετική ταχύτητα του ενός σωματίου ως προς το άλλο:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1. \tag{10.20}$$

Σημειώστε ότι η μ ορίζεται και από την

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \tag{10.21}$$

Η ολική ορμή στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι

$$\vec{p}_1\prime + \vec{p}_2\prime = 0. \tag{10.22}$$

Παράδειγμα 10.1. ([5] ΔΠ-6) Βλήμα μάζας $5a$ εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ και κλίση θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Μετά χρόνο t εκρήγνυται σε τρία κομμάτια με μάζες $m_1 = a$, $m_2 = a$, $m_3 = 3a$. Τα m_1 και m_2 κινούνται κατά τους άξονες Ox και Oy με την ίδια τιμή ταχύτητας v και τα δύο. Να ευρεθούν οι θέσεις των τριών κομματιών σε τυχόντα χρόνο t.
Λύση. Θέση κέντρου μάζας πριν την έκρηξη είναι $\vec{r}_{\rm cm} = x_{\rm cm}\vec{i} + y_{\rm cm}\vec{j}$ με:

$$x_{\rm cm} = v_0 t\,\cos\theta, \qquad y_{\rm cm} = v_0 t\,\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2.$$

Μετά την έκρηξη το κέντρο μάζας πρέπει να συνεχίσει να κινείται όπως και πριν την έκρηξη. Η ορμή πρέπει να παραμείνει ίση με μηδέν ως προς το κέντρο μάζας:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 0 \Rightarrow av\vec{i} + av\vec{j} + 3a\vec{v}_3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_3 = -\frac{v}{3}(\vec{i} + \vec{j}).$$

Οι θέσεις των σωματίων ως προς το κέντρο μάζας, μετά την έκρηξη η οποία υποθέτουμε ότι συμβαίνει την στιγμή $t = 0$, είναι

$$\begin{aligned} \vec{r}_1\prime &= vt\,\vec{i} \\ \vec{r}_2\prime &= vt\,\vec{j} \\ \vec{r}_3\prime &= -\frac{vt}{3}\,\vec{i} - \frac{vt}{3}\,\vec{j}. \end{aligned}$$

Η θέση του κέντρου μάζας είναι όπως και πριν την έκρηξη, ώστε

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{\rm cm} + \vec{r}_1\prime, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_{\rm cm} + \vec{r}_2\prime, \qquad \vec{r}_3 = \vec{r}_{\rm cm} + \vec{r}_3\prime.$$

□

Παράδειγμα 10.2. ([5] ΔΠ-15) Διαστημόπλοιο μάζας M με αρχική ταχύτητα $\vec{V}$ εκρήγνυται σε δύο μέρη ίσης μάζας. Μετά την έκρηξη το ένα κομμάτι κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_1 = (10^3\,\mathrm{m/sec})\,\vec{i}$ και το άλλο με $\vec{v}_2 = (2\times 10^3\,\mathrm{m/sec})\,\vec{j}$. Ποιά η ταχύτητα του κέντρου μάζας πριν και μετά την έκρηξη;
Λύση. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας πριν την έκρηξη ισούται με την ταχύτητα μετά. Αρχή διατήρησης ορμής

$$M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2, \qquad M = m_1 + m_2,\ m_1 = m_2$$

Άρα, η ταχύτητα κ.μ.

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (0.5\times 10^3\ \mathrm{m/sec})\,\vec{i} + (10^3\,\mathrm{m/sec})\,\vec{j}.$$

□

Παράδειγμα 10.3. ([2] σελ 222) (α) Να δειχθεί ότι το κέντρο μάζας ομογενούς ράβρου μάζας M και μήκους L βρίσκεται στο μέσον της.
(β) Να βρεθεί η θέση του κ.μ. αν η γραμμική πυκνότητα μεταβάλλεται γραμμικά με το x, δηλαδή $\lambda = ax$.

Λύση. (α) Γραμμική πυκνότητα μάζας $\lambda = M/L$. Θέση κέντρου μάζας

$$x_{\rm cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x(\lambda dx) = \frac{\lambda}{M}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{L}{2}.$$

(β)

$$x_{\rm cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x(\lambda dx) = \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\,dx = \frac{\alpha L^3}{3M}.$$

Επιπλεόν, το a καθορίζεται από τη συνθήκη

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \lambda\,dx = a\int_0^L x\,dx = \frac{\alpha L^2}{2}.$$

Ώστε

$$x_{\rm cm} = \frac{2}{3}L. \;\square$$

11. Κρουσεισ

11.1. Ώθηση. Ο 2ος νόμος Νεύτωνα λέει ότι η ορμή μεταβάλεται μόνο όταν δρα δύναμη. Η μεταβολή της ορμής είναι

$$d\vec{p} = \vec{F}\, dt$$

όταν η δύναμη δρα γιά χρονικό διάστημα dt. Όταν δρα από χρόνο t_i σε t_f τότε έχουμε μεταβολή ορμής

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt.$$

Την ποσότητα αυτή ονομάζουμε ώθηση

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt. \tag{11.1}$$

11.2. Ελαστικές και ανελαστικές κρούσεις. Θα δούμε την περίπτωση δύο σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 τα οποία κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και αλληλεπιδρούν όταν πλησιάσουν. Λέμε τότε ότι υπάρχει κρούση. Μετά την κρούση οι ταχύτητες έχουν μεταβληθεί σε $\vec{v}_1\prime, \vec{v}_2\prime$ και αυτές παραμένουν σταθερές αφού τα σωμάτια έχουν απομακρυνθεί το ένα από το άλλο.

Κατά τη διάρκεια της κρούσης, σύμφωνα με τον 3ο νόμο Νεύτωνα,

$$\vec{F}_1(t) = -\vec{F}_2(t).$$

Εφόσον δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα, δηλαδή το σύστημα είναι μονωμένο, έχουμε το νόμο διατήρησης της ολικής ορμής. Δηλαδή, γιά την ορμή πριν και μετά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1\prime + \vec{p}_2\prime. \tag{11.2}$$

Εφόσον η κινητική ενέργεια διατηρείται, δηλαδή γιά πριν και μετά την κρούση ισχύει

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2', \tag{11.3}$$

τότε η κρούση λέγεται *ελαστική*. Σε αντίθετη περίπτωση θα έχουμε

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' + W, \tag{11.4}$$

όπου W το έργο μη-διατηρητικών δυνάμεων. Τότε η κρούση λέγεται *ανελαστική* (ή μη-ελαστική).

Παράδειγμα 11.1. ([2] σελ 214) (Κρούση σε μία διάσταση) Έστω δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 και αρχικές ταχύτητες v_{1i}, v_{2i} τα οποία κινούνται επάνω σε έναν άξονα και συγκρούονται ελαστικά. Ποιές οι ταχύτητές τους μετά την κρούση;
Λύση. Αν οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι v_{1f}, v_{2f} η διατήρηση της ορμής και κινητικής ενέργειας γράφεται

$$\begin{aligned} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{aligned}$$

και σε άλλη μορφή

$$\begin{aligned} m_1 (v_{1i} - v_{1f} &= m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \\ m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) &= m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2). \end{aligned}$$

Διαιρούμε τη 2η με την εξίσωση γιά διατήρηση της ορμής και έχουμε

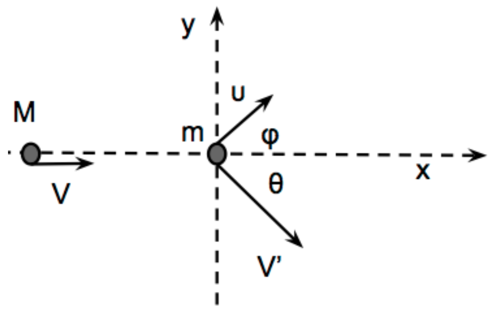
$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}).$$

Από την παραπάνω και τη διατήρηση ορμής βρίσκουμε τις τελικές ταχύτητες

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, v_{2i}$$
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, v_{2i}.$$

□

Παράδειγμα 11.2. ([5] ΔΠ-9) Σωμάτιο μάζας M και ταχύτητας $\vec{V}$ συγκρούεται ελαστικά με ακίνητο σωμάτιο μάζας m επάνω στο επίπεδο. Μετά την κρούση η m κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ υπό γωνία ϕ ως προς $\vec{V}$. (α) Να προσδιορισθεί το μέτρο της $\vec{v}$, εάν οι M, m, V και ϕ είναι γνωστές. (β) Να βρεθεί η $\vec{V}'$.



Λύση. (α) Διατήρηση ορμής (θεωρούμε $\phi, \theta > 0$)

$$M\vec{V} = m\vec{v} + M\vec{V}\prime \Rightarrow \begin{cases} MV & = mv\cos\phi + MV'\cos\theta \\ 0 & = mv\,\sin\phi - MV'\,\sin\theta. \end{cases}$$

Μία απλή σχέση βγαίνει ως εξής

$$\begin{cases} MV'\cos\theta & = MV - mv\cos\phi \\ MV'\,\sin\theta & = mv\,\sin\phi \end{cases} \Rightarrow M^2V'^2 = M^2V^2 + m^2v^2 - 2MmVv\,\cos\phi.$$

Διατήρηση ενέργειας

$$MV^2 = MV'^2 + mv^2 \Rightarrow MV'^2 = MV^2 - mv^2.$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω

$$m^2v^2 - 2MmVv\,\cos\phi = -Mmv^2 \Rightarrow mv - 2MV\,\cos\phi = -Mv$$
$$\Rightarrow v = \frac{2M}{m+M}\, V\,\cos\phi.$$

(β) Γιά να βρούμε την $\vec{V}'$ δουλεύουμε ως εξης. Από την εξίσωση γιά την ενέργεια

$$V'^2 = V^2 - \frac{m}{M}v^2 = \left(1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\cos^2\phi\right)V^2.$$

Από τη διατήρηση ορμής p_y έχουμε

$$\sin\theta = \frac{mv}{MV'}\sin\phi.$$

□

11.3. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 11.1. ([2], σελ 219) Ένα πρωτόνιο κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ και συγκρούεται ελαστικά με ένα άλλο πρωτόνιο που αρχικά ήταν ακίνητο. Μετά την κρούση ένα από τα πρωτόνια κινείται υπό γωνία ϕ (η οποία θεωρείται γνωστή) ως προς την αρχική ταχύτητα $\vec{v}$ ενώ το άλλο υπό γωνία θ. Βρείτε την θ και τα μέτρα των τελικών ταχυτήτων.
Λύση. Τα δύο πρωτόνια έχουν ίσες μάζες. Ας υποθέσουμε $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ οι τελικές ταχύτητες. Έχουμε από διατήρηση ορμής

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}^2 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\phi + \theta).$$

Διατήρηση ενέργειας

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Από τις δύο εξισώσεις έχουμε

$$\cos(\phi + \theta) = 0 \Rightarrow \phi + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{2} - \phi.$$

Τα μέτρα των $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ μπορούν να προσδιορισθούν από την λύση των δύο εξισώσεων γιά την διατήρηση ορμής:

$$v_1 = v\,\cos\phi, \qquad v_2 = v\,\sin\phi,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $\cos\theta = \sin\phi$, $\sin\theta = \cos\phi$.

Άσκηση 11.2. ([5] ΔΠ-11) Ηλεκτρόνιο μάζας m και ταχύτητας $\vec{v}_e$ συγκρούεται με ανελαστική κρούση με άτομο μάζας M που αρχικά ακινητεί. Το άτομο αποκτά, μετά την κρούση, ταχύτητα $\vec{v}'_a$ συγγραμμική με την ταχύτητα του προσπίπτοντος ηλεκτρονίου. Γνωρίζουμε ότι το άτομο χρειάζεται να απορροφήσει ενέργεια W γιά να επιτευχθεί η διέγερσή του. Προσδιορίστε την ελάχιστη αρχική ταχύτητα του ηλεκτρονίου γιά να μπορέσει το άτομο να διεγερθεί.
Λύση. Διατήρηση ορμής

$$mv_e = mv'_e + Mv'_a. \tag{1}$$

Διατήρηση ενέργειας

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}mv_e'^2 + \frac{1}{2}Mv_a'^2 + W. \tag{2}$$

Από (1)

$$v'_a = \frac{m}{M}(v_e - v'_e),$$

οπότε η (2) γράφεται

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}mv_e'^2 + \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}(v_e - v'_e)^2 + W.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $2M/m$:

$$\begin{aligned} Mv_e^2 &= Mv_e'^2 + m(v_e - v'_e)^2 + 2\frac{M}{m}W \\ \Rightarrow &(M+m)v_e'^2 - 2mv_e v'_e + v_e^2(m - M) + 2\frac{M}{m}W. \end{aligned}$$

Είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς v'_e. Γιά να υπάρχει λύση πρέπει η διακρίνουσα να είναι θετική:

$$\begin{aligned} &(2mv_e)^2 - 4(M+m)\left[v_e^2(m-M) + 2\frac{M}{m}W\right] \geq 0 \\ &\Rightarrow 4m^2v_e^2 + 4(M^2 - m^2)v_e^2 - 8(M+m)\frac{M}{m}W \geq 0 \\ &\Rightarrow M^2 v_e^2 \geq 2\frac{M}{m}(M+m)W \\ &\Rightarrow v_e \geq \sqrt{\frac{M+m}{mM}W}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{M+m}{mM} = \frac{1}{\mu},$$

όπου μ είναι η ανηγμένη μάζα των δύο σωμάτων. Οπότε η συνθήκη γιά τη διέγερση γράφεται

$$\frac{1}{2}\mu v_e^2 \geq W.$$

Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος δίνει την ένεργεια της ανηγμένης μάζας του συστήματος, αφού v_e είναι ουσιαστικά η αρχική σχετική ταχύτητα του m ώς προς το M. Άρα, γιά να έχουμε διέγερση, θα πρέπει η ένεργεια της ανηγμένης μάζας του συστήματος να είναι μεγαλύτερη της ενέργειας διεγέρσεως. $\square$

12. Περιστροφη στερεου σωματος

12.1. **Γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση.** Ας θεωρήσουμε στερεό σώμα οποιουδήποτε σχήματος. Ας υποθέσουμε ότι αυτό περιστρέφεται γύρω από καθορίσμένο και έστω ότι αυτός είναι ο Oz. Κάθε σημείο του στερεού διαγράφει κύκλο γύρω από τον άξονα. Γιά απλότητα ας πάρουμε τα σημεία τα οποία βρίσκονται στο επίπεδο xy. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες (r,θ), το διάστημα που διατρέχει ένα σημείο είναι $\Delta s = r\Delta\theta$. Η ταχύτητά του είναι

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \tag{12.1}$$

όπου ονομάζουμε *γωνιακή ταχύτητα* την

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \tag{12.2}$$

Επίσης ονομάζουμε *γωνιακή επιτάχυνση* την

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \tag{12.3}$$

Μπορούμε να αναλύσουμε την επιτάχυνση σε δύο συνιστώσες: παράλληλη και κάθετη στη στιγμιαία ταχύτητα, δηλαδή, εφαπτομενική και ακτινική. Η εφαπτομενική επιτάχυνση σημείου είναι

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \tag{12.4}$$

και η κεντρομόλος (ακτινική) επιτάχυνση, η οποία είναι αναγκαία γιά να έχουμε κυκλική κίνηση, είναι

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2. \tag{12.5}$$

Η ολική επιτάχυνση είναι $\vec{a} = a_r\,\hat{e}_{\mathrm{r}} + a_t\,\hat{e}_{\phi}$.

12.2. **Κινητική ενέργεια περιστροφής.** Ας θεωρήσουμε ένα συσσωμάτωμα n στοιχειωδών σωμάτων με μάζες m_i τα οποία περιστρέφονται ωσάν να ήταν συνδεδεμένα όλα μαζί, με γωνιακή ταχύτητα ω. Αν η απόσταση καθενός από τον άξονα περιστροφής είναι r_i τότε η ταχύτητές τους είναι $v_i = r_i\omega$. Η κινητική τους ενέργεια είναι

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\omega^2. \tag{12.6}$$

Ονομάζουμε *ροπή αδράνειας* το

$$I := \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{12.7}$$

και έχουμε

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{12.8}$$

Τη ροπή αδράνειας στερεού σώματος μπορούμε να υπολογίσουμε θεωρώντας ότι αυτό αποτελείται από στοιχειώδεις μάζες $m_i = \Delta m$:

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m = \int r^2\, dm.$$

Εισάγουμε την πυκνότητα $\rho = dm/dV \Rightarrow dm = \rho\, dV$ και έχουμε

$$I = \int \rho r^2\, dV. \tag{12.9}$$

Παράδειγμα 12.1. ([2], σελ 246) Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας μίας ομογενούς στερεάς ράβδου μήκους L και μάζας M ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας της.
Λύση. Έστω η ράβδος εκτείνεται στον άξονα x και ο κάθετος άξονας είναι ο y. Παίρνουμε στοιχειώδη μάζα $dm = \rho dx$, όπου $\rho = M/L$ η πυκνότητα. Έχουμε

$$I_y = \int r^2\, dm = \rho \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dx = \ldots = \frac{1}{12} ML^2. \ \Box$$

Παράδειγμα 12.2. ([2], σελ 246) Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ενός ομογενούς στερεού κυλίνδρου μάζας M, ύψους L και ακτίνας R ως προς τον άξονα συμμετρίας του.
Λύση. Παίρνουμε κυλινδρικούς φλοιούς όγκου $dV = (2\pi r\, dr)L$ και μάζας $dm = \rho dV$, όπου $\rho = M/(\pi R^2 L)$ η πυκνότητα. Έχουμε

$$I = \int r^2\, dm = 2\pi\rho L \int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi\rho L R^4}{2}.$$

Τελικά

$$I = \frac{1}{2} MR^2. \ \Box$$

12.3. **Γωνιακή επιτάχυνση και ροπή.** Ας θεωρήσουμε σώμα μάζας m το οποίο περιστρέφεται υπό την επίδραση δύναμης F_t εφαπτομενικής στην κυκλική τροχιά του. Ισχύει

$$F_t = ma_t = mr\,\alpha, \tag{12.10}$$

αφού η επιτάχυνση συνδέεται με την γωνιακή επιτάχυνση με την $a_t = r\alpha$, όπου r η ακτίνα της τροχιάς του.

Ορίζουμε την *ροπή* $\tau = F_t\, r$ ως προς το σημείο περιστροφής του σώματος. Ισχύει

$$\tau = F_t\, r = (mr^2)\alpha \Rightarrow \tau = I\alpha. \tag{12.11}$$

Αυτός είναι ο αντίστοιχος του νόμου Νεύτωνα γιά περιστρεφόμενο σώμα.

Γιά την περίπτωση στερεού σώματος, αθροίζοντάς στοιχειώδεις μάζες dm έχουμε

$$\tau = \int (r^2\, dm)\alpha = \alpha \int r^2\, dm \Rightarrow \tau = I\alpha. \tag{12.12}$$

12.4. **Έργο και ενέργεια στην περιστροφική κίνηση.** Το παραγόμενο στοιχειώδες έργο από δύναμη $\vec{F}$ που δρα σε περιστρεφόμενο σώμα είναι

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_t r\, d\theta,$$

όπου F_t είναι η συνιστώσα της $\vec{F}$ στη διεύθυνση της διαδρομής $\vec{s}$ (εφαπτομενική στην κυκλική κίνηση). Μπορούμε να γράψουμε

$$dW = \tau\, d\theta. \tag{12.13}$$

Από τον ορισμό της ροπής

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega,$$

ώστε

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2. \tag{12.14}$$

Αυτό είναι το Θ. έργου-ενέργειας γιά περιστροφική κίνηση.

12.5. **Θεώρημα των παραλλήλων αξόνων.** Ο υπολογισμός ροπών αδράνειας μπορεί να είναι περίπλοκος. Πολλές φορές διευκολύνεται από το *θεώρημα των παραλλήλων αξόνων*: Ας θεωρήσουμε γνωστή τη ροπή αδράνειας $I_{\rm cm}$ σώματος μάζας M ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας. Τότε, η ροπή αδράνειας I ως προς άξονα παράλληλο στον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, σε απόσταση D, είναι

$$I = I_{\rm cm} + MD^2. \tag{12.15}$$

Απόδειξη του θεωρήματος. Υποθέτουμε άξονα περιστροφής παράλληλο στον z, και αντίστοιχη ροπή αδράνειας

$$I = \int r^2\, dm = \int (x^2 + y^2)\, dm.$$

Αν x', y' οι συντεταγμένες τυχόντος σημείου ως προς το κέντρο μάζας τότε $x = x' + x_{\rm cm},\ y = y' + y_{\rm cm}$, ώστε

$$\begin{aligned} I &= \int [(x' + x_{\rm cm})^2 + (y' + y_{\rm cm})^2]\, dm \\ &= \int [(x')^2 + (y')^2] dm + 2x_{\rm cm} \int x'\, dm + 2y_{\rm cm} \int y'\, dm + (x_{\rm cm}^2 + y_{\rm cm}^2) \int dm. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι ο $I_{\rm cm}$. Επίσης, έχουμε $\int x'\, dm = 0 = \int y'\, dm$ και $x_{\rm cm}^2 + y_{\rm cm}^2 = D^2$. Επομένως

$$I = I_{\rm cm} + MD^2.$$

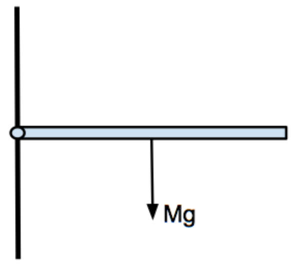
Παράδειγμα 12.3. Ποιά η ροπή αδράνειας I ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους L ως προς άξονα (κάθετο στη ράβδο) που διέρχεται από το άκρο της;

Λύση. Γνωρίζουμε ήδη (από προηγούμενη άσκηση) ότι η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον (κέντρο μάζας) είναι $I_c = (1/12)ML^2$. Το Θ. παραλλήλων αξόνων δίνει τη ζητούμενη ροπή αδράνειας

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2. \square$$

12.6. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 12.1. ([2], σελ 252 και σελ 256) Ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα, χωρίς τριβή, γύρω από άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη, ενώ αρχικά ηρεμούσε σε οριζόντια θέση. (α) Ποιά η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου; (β) Ποιά η αρχική γραμμική επιτάχυνση του δεξιού άκρου της; (γ) Ποιά η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή κατά την οποία η θέση της γίνεται κατακόρυφη;



Λύση. (α) Το βάρος Mg δρα στο κέντρο μάζας που βρίσκεται στο γεωμετρικό κέντρο της ράβδου. Γιά να το δούμε αυτό, θεωρούμε την ράβδο οριζόντια (όπως στο σχήμα) και έχουμε

$$\tau_B = \int x\, dF_t = \int x\, dm\, g = g \int r\, dm = Mgx_{\rm cm}.$$

Άρα, η ροπή του βάρους ως προς το σημείο περιστροφής είναι

$$\tau_B = \frac{MgL}{2}.$$

Σημειώστε ότι η ροπή από τη δύναμη που ασκεί ο άξονας είναι μηδενική διότι δρα στο σημείο περιστροφής. Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής (ο οποίος περνάει από το άκρο) είναι $I = \frac{1}{3}ML^2$ (αφήνεται ως άσκηση). Ώστε

$$\tau_B = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2L}.$$

Βέβαια, όλα τα σημεία έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση.

(β) Γιά τη γραμμική επιτάχυνση του άκρου

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g.$$

Παρατηρούμε ότι $a_t > g$.

(γ) Ας δούμε την ενέργεια του συστήματος. Στην κατακόρυφη θέση το κέντρο βάρους βρίσκεται απόσταση $L/2$ κάτω από το σημείο εξάρτησης. Άρα, η δυναμική ενέργεια είναι $MgL/2$ μικρότερη από ό,τι στην οριζόντια θέση. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι μηδέν και η κινητική ενέργεια γιά γωνιακή ταχύτητα ω είναι $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Η διατήρηση ενέργειας μεταξύ αρχικής (οριζόνιας) και τελικής (κατακόρυφης) θέσης δίνει

$$\frac{1}{2}MgL = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Αντικαθιστούμε $I = (1/3)ML^2$ και βρίσκουμε

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$

Άσκηση 12.2. Ποιά η ροπή αδράνειας I ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους L ως προς άξονα (κάθετο στη ράβδο) που διέρχεται από το άκρο της;

Λύση. Γνωρίζουμε ήδη (από προηγούμενη άσκηση) ότι η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον (κέντρο μάζας) είναι $I_c = (1/12)ML^2$. Ακολουθώντας μία διαδικασία παρόμοια με αυτή στην απόδειξη του Θ. παραλλήλων αξόνων παίρνουμε τη ζητούμενη ροπή αδράνειας

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2.$$

Άσκηση 12.3. ([5] σελ ΣΣ-5) Έστω ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R ο οποίος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που είναι παράλληλος στον άξονα συμμετρίας του και εφάπτεται στην παράπλευρη επιφάνειά του. Ποιά είναι η κινητική ενέργεια περιστροφής.

Λύση. Αν I_z η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής, η κινητική ενέργεια είναι

$$K_z = \frac{1}{2}I_z\omega^2.$$

Αν θεωρήσουμε γνωστή τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα συμμετρίας (ο οποίος περνάει από το κέντρο μάζας) $I_c = \frac{1}{2}MR^2$ τότε το Θ. παραλλήλων αξόνων δίνει

$$I_z = I_c + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

Τελικά, έχουμε

$$K_z = \frac{3}{4}MR^2\omega^2.$$

13. Στροφορμη και ροπη

13.1. Ροπή ως εξωτερικό γινόμενο. Ορίσαμε

$$\tau = F_t\, r$$

όπου F_t η εφαπτομενική συνιστώσα του διανύσματος $\vec{F}$, δηλαδή, η συνιστώσα στην κάθετο στο διάνυσμα $\vec{r}$ (είναι $F_t = F\cos\psi$ όπου ψ η γωνία μεταξύ $\vec{F}$ και εφαπτομένης στην τροχιά). Ορίζουμε το γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{r}\times\vec{F}$ να έχει μέτρο

$$|\vec{r}\times\vec{F}| = rF\,\sin\phi, \tag{13.1}$$

όπου ϕ η γωνία μεταξύ $\vec{F}$ και $\vec{r}$. Έχουμε $\tau = |\vec{r}\times\vec{F}|$. Αφού η ροπή παίζει ρόλο ανάλογο δύναμης θα την ορίσουμε ως διάνυσμα

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} \tag{13.2}$$

(το μέτρο του οποίου ορίστηκε) και επιλέγουμε διεύθυνση (του $\vec{r}\times\vec{F}$) κάθετη και στα δύο διανύσματα $\vec{r}, \vec{F}$.

13.2. Εξωτερικό γινόμενο. Έστω διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$. Ορίζουμε το *εξωτερικό τους γινόμενο* ως διάνυσμα

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} \tag{13.3}$$

με μέτρο

$$|\vec{C}| = |AB\,\sin\theta| \tag{13.4}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των $\vec{A}, \vec{B}$ (και A, B τα μέτρα τους) και διεύθυνση κάθετα στα $\vec{A}, \vec{B}$ που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού (επεξήγηση).

Το εξωτερικό γινόμενο έχει τις ιδιότητες

- Αντιμετάθεση των παραγόντων αλλάζει τη διεύθυνση του αποτελέσματος

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}. \tag{13.5}$$

- Γινόμενο διανύσματος με τον εαυτό του (ή με παράλληλο διάνυσμα) δίνει μηδέν

$$\vec{A}\times\vec{A} = 0, \qquad \vec{A}\times(c\vec{A}) = 0. \tag{13.6}$$

- Επιμεριστική

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}. \tag{13.7}$$

Παράδειγμα 13.1. Αν τα $\vec{A}, \vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους:

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB. \;\square$$

Παράδειγμα 13.2. Γιά τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων ισχύουν

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \qquad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \qquad \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}. \;\square$$

Παράδειγμα 13.3. Έστω $\vec{A}, \vec{B}$ στο επίπεδο xy:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\vec{i} + A_y\vec{j}\\ \vec{B} &= B_x\vec{i} + B_y\vec{j}.\end{aligned}$$

Το εξωτερικό τους γινόμενο είναι

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_x\vec{i} + A_y\vec{j})\times(B_x\vec{i} + B_y\vec{j}) = A_xB_y\,(\vec{i}\times\vec{j}) + A_yB_x\,(\vec{j}\times\vec{i})\\ &= (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}. \;\square\end{aligned}$$

Ισχύει γενικότερα

(13.8) $$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}.$$

13.3. **Στροφορμή.** Έστω σώμα μάζας m που κινείται σε ακτίνα $\vec{r}$ με ταχύτητα $\vec{v}$. Ορίζουμε την *στροφορμή* του

(13.9) $$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p},$$

όπου $\vec{p}$ η ορμή του. Το μέτρο της στροφορμής είναι

(13.10) $$L = mvr\sin\phi$$

όπου ϕ η γωνία μεταξύ $\vec{r}$ και $\vec{p}$. Δείτε ότι αν επιλέξουμε $\vec{r}$ παράλληλο στην $\vec{v}$ τότε $\vec{L} = 0$.

Γιά τη μεταβολή της στροφορμής έχουμε

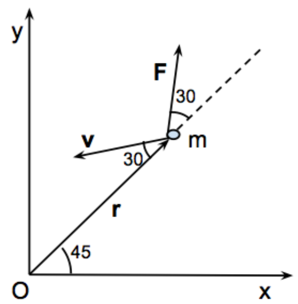
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Αλλά $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ και $\vec{v}\times\vec{p} = \vec{v}\times(m\vec{v}) = 0$. Επίσης, $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Ώστε έχουμε

(13.11) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Αυτός είναι ο αντίστοιχος του νόμου Νεύτωνα γιά περιστροφές.

Παράδειγμα 13.4. ([5], σελ ΠΔ-3) Σωμάτιο μάζας $m = 2\,\mathrm{kg}$ κινείται στο επίπεδο xy. Σε χρονική στιγμή t το διάνυσμα θέσεώς του $\vec{r}$ έχει μέτρο $3\,\mathrm{m}$ και η ταχύτητά του $\vec{v}$ έχει μέτρο $4\,\mathrm{m/sec}$. Την ίδια στιγμή εφαρμόζεται δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο $2\,\mathrm{N}$. Υπολογίστε (α) το μέτρο και την κατεύθυνση της στροφορμής του m ως προς την αρχή O, (β) το μέτρο και την κατεύθυνση της ροπής της δύναμης ως προς την αρχή O.



Λύση. Τα διανύσματα $\vec{r}, \vec{p}$ είναι στο επίπεδο xy άρα το διάνυσμα $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ είναι κάθετο στο xy και άρα παράλληλο στο άξονα z. Ομοίως, η ροπή $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$ είναι παράλληλη στον z.

Η στροφορμή είναι ($\phi = 180^0 - 30^o$)

$$\vec{L} = (rp\sin\phi)\vec{k} = (mvr\sin\phi)\vec{k} = (2\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/sec})(3\,\mathrm{m})\sin(180^o - 30^o)\vec{k} = 12\,(\mathrm{kg\,m^2/sec})\,\vec{k}.$$

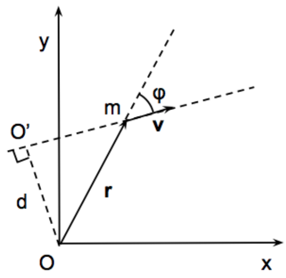
Είναι Joule $= \mathrm{kg\,m^2/sec^2}$, άρα $L = 12\,(\mathrm{J\,sec})$.

Η ροπή είναι

$$\vec{\tau} = (rF\sin(30^o))\vec{k} = (3\,\mathrm{m})(2\,\mathrm{N})\,\sin(30^o)\vec{k} = 3\,(\mathrm{N\,m})\,\vec{k}.$$

□

Παράδειγμα 13.5. ([2], σελ 274) Σώμα μάζας m κινείται ευθύγραμμα στο επίπεδο xy με ταχύτητα $\vec{v}$ όπως στο σχήμα. Ποιά είναι η στροφορμή του σε κάθε θέση;



Λύση. Ας δούμε την στροφορμή ως προς την αρχή O. Η διεύθυνση της $\vec{L}$ είναι κάθετα στο επίπεδο xy, έχει μέτρο

$$L = mvr \sin \phi.$$

Παρατηρούμε ότι $r \sin \phi = d$ που είναι η κάθετη απόσταση της αρχής O από την ευθεία της κίνησης. Άρα

$$L = mvd$$

και γιά τη διεύθυνση: $\vec{L} = -(mvd)\vec{k}$. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο γιά κάθε θέση του m στην ευθεία της κίνησης. □

13.4. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 13.1. ([5], σελ ΠΔ-4) Δύναμη $\vec{F} = (2\vec{i} - 3\vec{k})$N δρα σε σωμάτιο στο σημείο M με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OM} = (0.5\vec{j} - 2\vec{k})$m. Να βρεθεί η ροπή της δύναμης (α) ως προς $O(0,0,0)$, (β) ως προς $O'(2,0,-3)$.
Λύση. (α) Εφαρμόζουμε τον αλγεβρικό τύπο γιά το εξωτερικό γινόμενο:

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F} = -1.5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}.$$

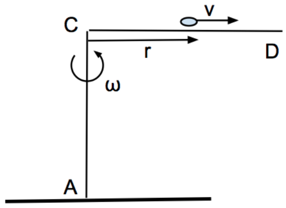
(β) Είναι

$$\vec{\tau\prime} = \overrightarrow{O'M} \times \vec{F} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \times \vec{F} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F} = \vec{\tau} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}.$$

Έχουμε $\overrightarrow{O'O} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$, δηλαδή είναι παράλληλο στο $\vec{F}$. Αυτό σημαίνει ότι $\overrightarrow{O'O} \times \vec{F}$. Τελικά,

$$\vec{\tau\prime} = \vec{\tau}.$$

Άσκηση 13.2. ([5], σελ ΠΔ-8) Στη συσκευή του σχήματος το στέλεχος AC περιστρέφεται (στηριζόμενο στο έδαφος) χωρίς τριβές με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0. Ένα έντομο μάζας m βρίσκεται στο οριζόντιο στέλεχος CD (το οποίο είναι αβαρές) αρχικά σε απόσταση r_0 από το C. Το έντομο αρχίζει να κινείται στην κατεύθυνση CD με σταθερή ταχύτητα v_0. (α) Πώς μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα με τον χρόνο, $\omega = \omega(t)$; (β) Ποιό είναι το παραγόμενο έργο ως συνάρτηση του χρόνου, $W = W(t)$;



Λύση. (α) Δεν έχουμε εξωτερικές ροπές, άρα $d\vec{L}/dt = 0$, δηλαδή η $\vec{L}$ διατηρείται. Γιά κάθε θέση r του εντόμου, η ταχύτητα περιστροφής είναι $r\omega$, άρα η στροφορμή

$$L = m|\vec{r} \times \vec{v}| = mr(r\omega) = mr^2\omega.$$

Σε κάθε στιγμή η τιμή της L είναι η αρχική, δηλαδή, $L = L_0 = mr_0^2\omega_0$, άρα ισχύει

$$mr^2\omega = mr_0^2\omega_0 \Rightarrow \omega = \frac{r_0^2}{r^2}\,\omega_0.$$

Η θέση του εντόμου είναι $r = r_0 + vt$, ώστε έχουμε

$$\omega(t) = \frac{r_0^2}{(r_0 + v_0 t)^2}\,\omega_0.$$

(β) Το παραγόμενο έργο ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας $W = \Delta E$. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι λόγω περιστροφής του εντόμου

$$E_i = \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2.$$

Η κινητική ενέργεια σε χρόνο t είναι λόγω περιστροφής και ακτινικής κίνησης. Οι δύο διευθύνσεις κίνησης είναι κάθετες μεταξύ τους, άρα $\vec{v}^2 = r^2\omega^2 + v_0^2$. Ώστε έχουμε

$$E(t) = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{r_0^4}{r^2}\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Το έργο σε χρόνο t είναι

$$W(t) = E(t) - E_i = \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2\left[\frac{r_0^2}{(r_0 + v_0 t)^2} - 1\right] + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Άσκηση 13.3. ([5], σελ ΠΔ-6) Σωμάτιο μάζας m κινείται, υπό την επίδραση δύναμης, στο επίπεδο xy και η τροχιά του δίνεται από

$$x = \lambda t, \qquad y = \mu t^2, \qquad \lambda, \mu : \text{σταθερές},$$

και t είναι ο χρόνος. Βρείτε (α) τη στροφορμή του σωματίου και (β) τη ροπή δυνάμεως που του ασκείται.

Λύση. (α) Ταχύτητα

$$\vec{v} = \lambda\vec{i} + 2\mu\vec{j}.$$

Στροφορμή

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = m(xv_y - yv_x)\vec{k} = m\lambda\mu t^2\,\vec{k}.$$

(β) Είναι

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 2m\lambda\mu t\,\vec{k}.$$

14. Στροφορμη και ενεργεια συστηματος σωματων

14.1. Στροφορμή συστήματος δύο σωμάτων. Έστω σώματα m_1, m_2 με θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ και ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ως προς την αρχή O. Η στροφορμή του συστήματος είναι

$$\vec{L} = m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2. \tag{14.1}$$

Ας γράψουμε τις θέσεις και ταχύτητες ως προς το κέντρο μάζας:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{\rm cm} + \vec{r}_1\prime, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_{\rm cm} + \vec{r}_2\prime,$$
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\rm cm} + \vec{v}_1\prime, \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_{\rm cm} + \vec{v}_2\prime.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ισχύουν

$$m_1\vec{r}_1\prime + m_2\vec{r}_2\prime = 0$$
$$m_1\vec{v}_1\prime + m_2\vec{v}_2\prime = 0.$$

Μπορούμε να γράψουμε την στροφορμή ως

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m_1(\vec{r}_{\rm cm} + \vec{r}_1\prime) \times (\vec{v}_{\rm cm} + \vec{v}_1\prime) + m_2(\vec{r}_{\rm cm} + \vec{r}_2\prime) \times (\vec{v}_{\rm cm} + \vec{v}_2\prime)\\ &= (m_1+m_2)\vec{r}_{\rm cm} \times \vec{v}_{\rm cm} + \vec{r}_{\rm cm} \times (m_1\vec{v}_1\prime + m_2\vec{v}_2\prime) + (m_1\vec{r}_1\prime + m_2\vec{r}_2\prime) \times \vec{v}_{\rm cm} + m_1\vec{r}_1\prime \times \vec{v}_1\prime + m_2\vec{r}_2\prime \times \vec{v}_2\prime\\ &= [(m_1+m_2)\vec{r}_{\rm cm} \times \vec{v}_{\rm cm}] + [m_1\vec{r}_1\prime \times \vec{v}_1\prime + m_2\vec{r}_2\prime \times \vec{v}_2\prime]\end{aligned}$$

Ονομάζουμε *τροχιακή στροφορμή* την

$$\vec{L}_{\rm cm} = M\,\vec{r}_{\rm cm} \times \vec{v}_{\rm cm}, \qquad M = m_1 + m_2 \tag{14.2}$$

και *ιδιοστροφορμή* την

$$\vec{L}_e = m_1\vec{r}_1\prime \times \vec{v}_1\prime + m_2\vec{r}_2\prime \times \vec{v}_2\prime. \tag{14.3}$$

Ώστε

$$\vec{L} = \vec{L}_{\rm cm} + \vec{L}_e. \tag{14.4}$$

14.2. Στροφορμή και κινητική ενέργεια συστήματος πολλών σωμάτων. Γιά ένα σύστημα n σωμάτων m_i, η στροφορμή γράφεται (μετά από υπολογισμό ανάλογο με την περίπτωση των δύο σωμάτων)

$$\vec{L} = M\vec{r}_{\rm cm} \times \vec{v}_{\rm cm} + \vec{L}_e, \tag{14.5}$$

όπου η ίδιοστροφορμή είναι

$$\vec{L}_e = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\prime \times \vec{v}_i\prime. \tag{14.6}$$

Γιά την κινητική ενέργεια έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i\prime)^2 &= \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_{\rm cm})^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^2 - \vec{v}_{\rm cm}\sum m_i\vec{v}_i\\ &= \frac{1}{2}M\vec{v}_{\rm cm}^2 + K - M\vec{v}_{\rm cm}^2 = K - \frac{1}{2}M\vec{v}_{\rm cm}^2,\end{aligned}$$

όπου K είναι η κινητική ενέργεια. Άρα

$$K = \frac{1}{2}M\vec{v}_{\rm cm}^2 + K_e, \tag{14.7}$$

όπου ορίσαμε την κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας

$$K_e = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i\prime)^2. \tag{14.8}$$

Παρατήρηση 26. *Η στροφορμή και η κινητική ενέργεια συστήματος σωμάτων είναι άθροισμα δύο όρων: (α) της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας και (β) της κίνησης των σωμάτων ως προς το κέντρο μάζας.*

Παράδειγμα 14.1. ([5] σελ 2Σ-8) Δύο σωμάτια μαζών $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$ και $m_2 = 6\,\mathrm{kg}$ βρίσκονται σε επίπεδο στις θέσεις $\vec{r}_1 = (0,3)\,\mathrm{m}$ και $\vec{r}_2 = (4,0)\,\mathrm{m}$ με ταχύτητες $\vec{v}_1 = 2\vec{i}\,(\mathrm{m/sec})$ και $\vec{v}_2 = 3\vec{j}\,(\mathrm{m/sec})$. (α) Βρείτε την στροφορμή του συστήματος των δύο σωματίων ως προς την αρχή O και ως προς το κέντρο μάζας τους C. (β) Βρείτε την κινητική ενέργεια του συστήματος και την κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας τους.
Λύση. (α)

$$\vec{L} = m_1\,\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\,\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = [4\cdot(-6) + 6\cdot 12]\,\vec{k}\,(\mathrm{kg\,m^2/sec}) = 48\,\vec{k}\,(\mathrm{J\,sec}).$$

Το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = (2.4\,\vec{i} + 1.2\,\vec{j})\,\mathrm{m}$$

και η ταχύτητά του είναι

$$\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = (0.8\,\vec{i} + 1.8\,\vec{j})\,\mathrm{m/sec}.$$

Έχουμε την στροφορμή του κ.μ.:

$$M\vec{r}_{\mathrm{cm}} \times \vec{v}_{\mathrm{cm}} = 10(2.4\cdot 1.8 - 1.2\cdot 0.8)\,\vec{k}\,(\mathrm{kg\,m^2/sec}) = 33.6\,\vec{k}\,(\mathrm{J\,sec}),$$

ώστε η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας είναι

$$\vec{L}_e = \vec{L} - M\vec{r}_{\mathrm{cm}} \times \vec{v}_{\mathrm{cm}} = 14.4\,\vec{k}\,(\mathrm{J\cdot sec}).$$

(β)

$$K = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = 35\,\mathrm{J}.$$

Η κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας

$$\frac{1}{2}M\vec{v}_{\mathrm{cm}}^2 = 19.4\,\mathrm{J}.$$

Άρα, η κινητική ενέργεια ως προς το κ.μ.

$$K_e = K - \frac{1}{2}M\vec{v}_{\mathrm{cm}}^2 = 15.6\,\mathrm{J}.$$

□

Παράδειγμα 14.2. Η ολική ορμή συστήματος σωμάτων ως προς σταθερό σημείο O είναι $\vec{P}$ και η ολική στροφορμή του $\vec{L}$. Δείξτε ότι, ως προς σημείο O', τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OO'} = \vec{r}_0$: σταθερό, η στροφορμή $\vec{L}'$ του συστήματος σωματίων είναι

$$\vec{L}' = \vec{L} - \vec{r}_0 \times \vec{P}.$$

Λύση. Θέτουμε $\vec{r}_i, \vec{r}_{i'}$ τις θέσεις ως προς O, O' αντίστοιχα. Ξεκινάμε από τον ορισμό της στροφορμής

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_{i'}) \times \vec{p}_i = \vec{r}_0 \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_{i'} \times \vec{p}_i.$$

Γιά την ορμή κάθε σωματίου ισχύει $\vec{p}_i = \vec{p}_{i'}$, άρα

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_0 \times \vec{P}.$$

Δείτε ότι στην περίπτωση ολικής ορμής $\vec{P} = 0$ έχουμε $\vec{L} = \vec{L}'$. □

14.3. **Στροφορμή στερεού.** Ας θεωρήσουμε το στερεό ως ένα σύστημα πολλών σωμάτων m_i τα οποία απέχουν r_i από άξονα περιστροφής και έχουν όλα την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω. Η στροφορμή καθενός είναι

$$L_i = m_i r_i^2 \omega.$$

Αν ο άξονας περιστροφής είναι ο z, τότε η κατεύθυνσή των $\vec{L}_i$ είναι προς τον άξονα z. Η ολική στροφορμή είναι

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \, \omega = I\omega, \tag{14.9}$$

όπου I η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής. Παραγωγίζοντας

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha. \tag{14.10}$$

Έχουμε δει ότι, γιά ένα σώμα, $\tau = I\alpha$ (όπου I ελιναι εδώ η στροφορμή του σώματος). Αν έχουμε δυνάμεις σε κάθε m_i τότε $\sum \tau_i = I\alpha$, άρα

$$\sum \tau_i = \sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha. \tag{14.11}$$

Οι ροπές μπορεί να προέρχονται από εξωτερικές και από εσωτερικές δυνάμεις. Γιά παράδειγμα, αν δύο από τα σώματα του συστήματος ασκούν το ένα στο άλλο δυνάμεις, τότε $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Η ροπή από τις δύο αυτές δυνάμεις

$$\vec{\tau}_{in} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{12} = 0. \tag{14.12}$$

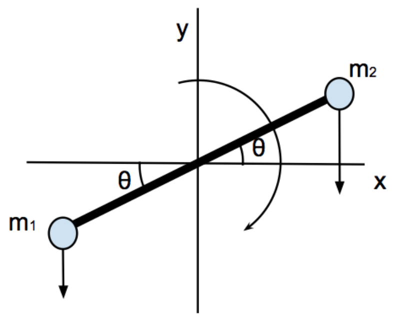
Η τελευταία ισότητα προκύπτει διότι ο 3ος νόμος λέει ότι οι $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ κείνται επάνω στη γραμμή που ενώνει τα σώματα: $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.

Τελικά, έχουμε $\sum \tau_i = \sum \tau_{\text{in}} + \sum \tau_{\text{ext}} = \sum \tau_{\text{ext}}$, ώστε

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha. \tag{14.13}$$

Παρατήρηση 27. *Η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων σε στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας, ως προς τον άξονα περιστροφής, επί την γωνιακή επιτάχυνση.*

Παράδειγμα 14.3. ([2], σελ 276) Ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους d περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Στα δύο άκρα της ράβδου έχουν στερεωθεί σώματα μάζας m_1, m_2 αντίστοιχα. (α) Υπολογίστε την στροφορμή της όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι ω. (β) Υπολογίστε την γωνιακή επιτάχυνση όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο.



Λύση. (α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ισούται με το άθροισμα

$$I = \frac{1}{12}Md^2 + m_1\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right).$$

Γιά γωνιακή ταχύτητα ω η στροφορμή είναι

$$L = I\omega = \frac{d^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\omega.$$

(β) Οι ροπές από το βάρος των δύο μαζών είναι

$$\vec{\tau}_1 = m_1 g \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{k} = m_1 g \frac{d}{2} \cos\theta \, \vec{k}$$
$$\vec{\tau}_2 = -m_2 g \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \vec{k} = -m_2 g \frac{d}{2} \cos\theta \, \vec{k}.$$

Άρα

$$\tau_{\text{ext}} = \frac{1}{2}(m_1 - m_2) g d \, \cos\theta.$$

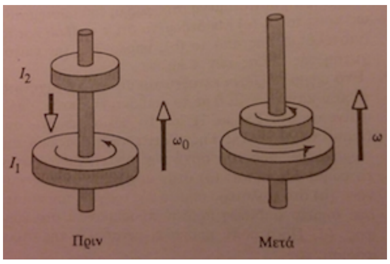
Γιά την γωνιακή επιτάχυνση

$$\tau_{\text{ext}} = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2(m_1 - m_2) g \, \cos\theta}{d\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)}.$$

□

14.4. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 14.1. ([2] σελ 288, κεφ 11 ασκ 27). Ένας κύλινδρος με ροπή αδράνειας I_1 περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβή, Ένας δεύτερος κύλινδρος με ροπή αδράνειας I_2 ο οποίος αρχικά δεν περιστρέφεται πέφτει πάνω στον πρώτο κύλινδρο (βλ. σχήμα). Επειδή οι επιφάνειες είναι τραχιές, οι δύο κύλινδροι αποκτούν τελικά την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω. (α) Υπολογίστε την ω. (β) Υπολογίστε το λόγο της τελικής προς την αρχική κινητική ενέργεια.



Σχημα 5. Πηγή: Serway I κεφ 11 ασκ 27.

Λύση. (α) Επειδή στο σύστημα δρουν μόνο εσωτερικές δυνάμεις, η στροφορμή πρέπει να διατηρείται. Οι τελική ροπή αδράνειας του συστήματος είναι $I_1 + I_2$, οπότε έχουμε

$$I_1\omega_0 = (I_1 + I_2)\omega \Rightarrow \omega = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_0.$$

(β) Η αρχική και τελική κινητική ενέργεια είναι

$$E_i = \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2, \qquad E_f = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{I_1^2}{I_1 + I_2}\,\omega_0^2,$$

άρα

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{I_1}{I_1 + I_2},$$

δηλαδή υπάρχει απώλεια ενέργειας ($E_f < E_i$).

Άσκηση 14.2. ([5], σελ 2Σ-11) Δύο σωμάτια με μάζες m_1, m_2 κινούνται στον άξονα x με ταχύτητες v_1, v_2 ως προς κάποιο (αδρανειακό) σύστημα αναφοράς. Να βρεθεί αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ελάχιστη.
Λύση. Το νέο αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα κινείται με κάποια ταχύτητα V ως προς το αρχικό. Η ταχύτητες σε νέο σύστημα αναφοράς είναι

$$v_1\prime = v_1 - V, \qquad v_2\prime = v_2 - V.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος στο νέο σύστημα

$$\begin{aligned} K' &= \frac{1}{2}(m_1 v_1\prime^2 + m_2 v_2\prime^2) = \frac{1}{2}\left[m_1(v_1 - V)^2 + m_2(v_2 - V)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 - (m_1 v_1 + m_2 v_2)V. \end{aligned}$$

Γιά να βρούμε το έλάχιστο της K' ως προς V, την παραγωγίζουμε θεωρώντας σταθερές τις v_1, v_2:

$$\frac{dK'}{dV} = (m_1 + m_2)V - (m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0 \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Πρόκειται γιά την ταχύτητα του κέντρου μάζας. Άρα, η κινητική ενέργεια K είναι ελάχιστη στο σύστημα του κέντρου μάζας.

15. Κυλιση

15.1. Συνδυασμός μεταφοράς και περιστροφής. Θεωρούμε έναν τροχό ακτίνας R ο οποίος μετακινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{\rm cm}$ σε οριζόντια διεύθυνση. Τότε κάθε σημείο του τροχού έχει την ίδια ταχύτητα.

Μπορούμε επίσης να έχουμε περιστροφή του τροχού (χωρίς αυτός να μετακινείται) με γωνιακή ταχύτητα ω. Η απόσταση που διανύει κάθε σημείο (της περιφέρειας) είναι

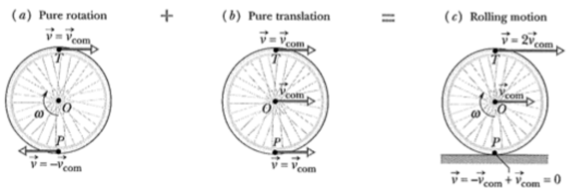
$$s = R\theta, \tag{15.1}$$

όπου θ η γωνία περιστροφής. Κάθε σημείο του τροχού (στην περιφέρεια) έχει ταχύτητα $\vec{v} = R\,d\theta/dt = R\omega$.

Ας θεωρήσουμε τώρα κίνηση στην οποία ο τροχός περιστρέφεται με ω, όπου $\vec{v}_{\rm cm} = R\omega$ και ταυτοχρόνως μετακινείται με $\vec{v}_{\rm cm}$. Τότε, το κέντρο μάζας μετακινείται με $\vec{v}_{\rm cm}$, αλλά το κάθε σημείο του τροχού έχει διαφορετική ταχύτητα. Προσθέτοντας διανυσματικά τις ταχύτητες βλέπουμε ότι το κορυφαίο σημείο έχει ταχύτητα $2\vec{v}_{\rm cm}$ και το κάτω σημείο $\vec{v} = 0$.

Εάν ο τροχός εφάπτεται στο έδαφος, τότε θα έπρεπε να ολισθαίνει στο έδαφος στις δύο πρώτες περιπτώσεις, ενώ στην τρίτη περίπτωση θα είχαμε κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Η τροχιά κάθε σημείου του τροχού (στην 3η περίπτωση) δίνει *κυκλοειδή κίνηση* (σχήμα και περιγραφή).

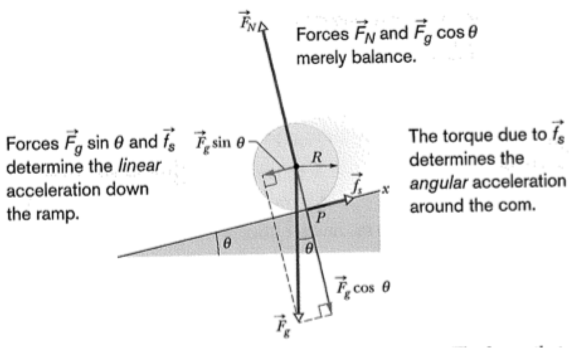


Σχημα 6. Πηγή: Halliday, Resnick, Walker, page 276.

15.2. Οι δυνάμεις της κύλισης. Αν ο τροχός ολισθαίνει θα έχουμε τριβές ολίσθησης (κινητική τριβή) με το έδαφος.

Αν ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση τότε μπορούμε να έχουμε μόνο στατική τριβή, αφού το σημείο επαφής με το έδαφος έχει $\vec{v} = 0$.

Ας δούμε την κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο, όπου ένας τροχός μάζας M και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Ασκείται η δύναμη του βάρους στο κέντρο μάζας και η στατική τριβή στο σημείο επαφής με το έδαφος (δείτε σχήμα).



Σχημα 7. Πηγή: Halliday, Resnick, Walker, page 279.

Ο νόμος Νεύτωνα γιά κίνηση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου

$$f_s - Mg\sin\theta = Ma_{\rm cm}. \tag{15.2}$$

Ροπή ασκεί μόνο η f_s, αφού το βάρος ασκείται στο κέντρο μάζας. Ἑχουμε από τον νόμο γιά την ροπή

$$Rf_s = I\alpha. \tag{15.3}$$

Η γραμμική και γωνιακή επιτάχυσμη συνδέονται (προσέξτε το μείον, λόγω των συμβάσεων)

$$a_{\rm cm} = -R\alpha. \tag{15.4}$$

Η δύναμη τριβής είναι

$$f_s = -I\frac{a_{\rm cm}}{R^2} \tag{15.5}$$

και τελικά βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$a_{\rm cm} = -\frac{g\sin\theta}{1+I/(MR^2)}. \tag{15.6}$$

15.3. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 15.1. ([2], σελ 267) Θεωρήστε κύλινδρο ακτίνας R, με ροπή αδράνειας I, ο οποίος κυλίεται με γωνιακή ταχύτητα ω και μετακινείται χωρίς να ολισθαίνει. Βρείτε την ταχύτητά του και την κινητική του ενέργεια.
Λύση. Καθώς ο κύλινδρος περιστρέφεται κατά γωνία θ μετατοπίζεται κατά απόσταση $s = R\theta$, άρα έχουμε ταχύτητα του κέντρου του (το οποίο είναι και το κέντρο μάζας)

$$\vec{v}_{\rm cm} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega.$$

Κάθε σημείο του κυλίνδρου κινείται με διαφορετική ταχύτητα. Παρατηρήστε ότι το σημείο που εφάπτεται του εδάφους έχει ταχύτητα μηδέν, ενώ το κορυφαίο σημείο έχει ταχύτητα $\vec{v} = 2\vec{v}_{\rm cm}$. Ας θέσουμε $\vec{v}_i = \vec{v}_{\rm cm} + \vec{v}_i\prime$ την ταχύτητα κάθε σημείου m_i, όπου $\vec{v}_i\prime$ είναι η ταχύτητα του σημείου ως προς το κέντρο μάζας. Γιά την κινητική ενέργεια K έχουμε

$$K = \frac{1}{2}M\vec{v}_{\rm cm}^2 + K_e.$$

Η κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας είναι

$$K_e = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i\prime)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2\,\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

όπου I η ροπή αδράνειας ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας. Η κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας

$$\frac{1}{2}M\vec{v}_{\rm cm}^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2.$$

Έχουμε τελικά

$$K = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Άσκηση 15.2. ([5] σελ ΣΣ-11) Στερεός ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R είναι αρχικά ακίνητος και βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ. Στη συνέχεια κατέρχεται κυλιόμενος, χωρίς τριβές, το κεκλιμένο επίπεδο. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα του κυλίνδρου στη βάση του επιπέδου. (β) Συγκρίνεται την ταχύτητα με την περίπτωση που ο κύλινδρος κατέρχεται χωρίς περιστροφή.

Λύση. (α) Διατήρηση ενέργειας

(*) $$Mgh = \frac{1}{2}Mv_r^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Έχουμε $I = \frac{1}{2}MR^2$ και επίσης ισχύει $v_r = R\omega$. Ώστε

$$\frac{1}{2}Mv_r^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_r^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{3}{4}Mv^2.$$

Αντικαθιστούμε στην (*) και έχουμε

$$Mgh = \frac{3}{4}Mv_r^2 \Rightarrow v_r = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

(β) Από διατήρηση ενέργειας

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_t^2 \Rightarrow v_t = \sqrt{2gh}.$$

Παρατηρούμε ότι $v_t > v_r$.

16. Στατικη

16.1. **Ισορροπία.** Ένας ουράνιο σώμα το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα έχει μία συγκεκριμένη σταθερή ορμή. Ένας τροχός που κινείται σε ευθύγραμμη διαδρομή έχει μία σταθερή ορμή αλλά και μία σταθερή στροφορμή. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι τα σώματα βρίσκονται σε μία *στάσιμη* κατάσταση.

Στην ειδικότερη περίπτωση που και η ορμή και η στροφρομή ενός σώματος δεν είναι απλώς σταθερές αλλά είναι ίσες με μηδέν λέμε ότι το σώμα βρίσκεται σε *στατική ισορροπία*.

Μία μπάλλα στον πάτο ενός πηγαδιού βρίσκεται σε ισορροπία αλλά επίσης μία μπάλλα ακριβώς στην κορυφή ενός λόφου μπορεί να βρίσκεται σε ισορροπία. Στη δεύτερη περίπτωση αρκεί μία μικρή διαταραχή της θέσης της μπάλλας γιά να μετακινηθεί πολύ μακριά από την κορυφή του λόφου. Στην πρώτη περίπτωση όμως, ακόμα και αν η αρχική θέση αλλάξει, σε λίγο η μπάλλα θα επιστρέψει στον πάτο του πηγαδιού. Λέμε την πρώτη θέση, θέση *ευσταθούς* ισορροπίας και τη δεύτερη θέση *ασταθούς* ισορροπίας.

16.2. **Συνθήκες ισορροπίας.** Αν ένα σώμα βρίσκεται σε μεταφορική ισορροπία τότε πρέπει η ορμή του να είναι σταθερή $\vec{P}=0$, δηλαδή, να μην ασκούνται επάνω του δυνάμεις

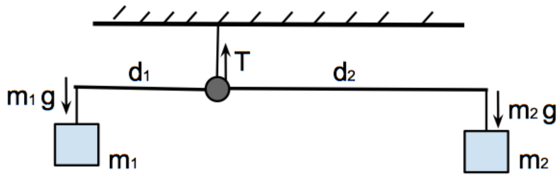
$$\vec{F}_{\text{net}} = 0. \tag{16.1}$$

Αν ένα σώμα βρίσκεται σε περιστροφική ισορροπία τότε πρέπει η στροφορμή του να είναι σταθερή $\vec{L}=0$, δηλαδή, να μην ασκούνται επάνω του ροπές

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = 0. \tag{16.2}$$

Οι παραπάνω δύο συνθήκες ισχύουν και όταν τα $\vec{P}, \vec{L}$ είναι σταθερά, αλλά όχι μηδέν.

Παράδειγμα 16.1. ([5] Στ-2) Έστω ζυγός μαζών με στελέχη διαφορετικού μήκους d_1, d_2. Στα άκρα του εξαρτώνται μάζες m_1, m_2. Βρείτε τις συνθήκες γιά ισορροπία του συστήματος.



Λύση. Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι τα βάρη και η τάση T του νήματος, όπως στο σχήμα. Γιά μα παραμείνει σταθερό το κέντρο μάζας έχουμε τη 1η συνθήκη ισορροπίας

$$T - m_1 g - m_2 g = 0 \Rightarrow T = (m_1 + m_2) g.$$

Αυτή είναι μία συνθήκη γιά το μηδενισμό της y-συνιστώσας της δύναμης. Παρατηρήστε ότι οι δυνάμεις δεν έχουν x-συνιστώσες, οπότε η αντίστοιχη συνθήκη δεν θα μας έδινε κάποια πληροφορία.

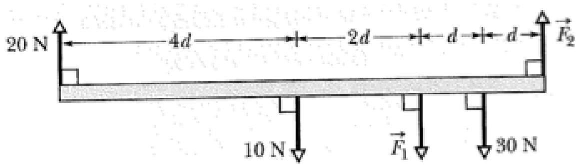
Η ροπή στο σύστημα ως προς το σημείο περιστροφής του σχήματος είναι

$$\tau = m_1 g d_1 - m_2 g d_2.$$

Έχουμε τη 2η συνθήκη ισορροπίας

$$\tau = 0 \Rightarrow m_1 d_1 = m_2 d_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2}{d_1}. \square$$

Παράδειγμα 16.2. ([1] σελ 391) Στο σχήμα φαίνεται ομογενής ράβδος σε στατική ισορροπία. (α) Βρείτε τη σχέση μεταξύ των δυνάμεων F_1, F_2 ώστε να μην κινείται το κέντρο μάζας. (β) Βρείτε το μέτρο της F_2 από τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών (συνθήκη ισορροπίας). (γ) Πόσο είναι το μέτρο της F_1;



Σχημα 8. Πηγή: Halliday, Resnick, Walker, page 309.

Λύση. (α) Χρειαζόμαστε τη συνθήκη μηδενισμού της ολικής δύναμης

$$F_2 + 20\,\mathrm{N} = F_1 + 10\,\mathrm{N} + 30\,\mathrm{N} \Rightarrow F_2 = F_1 + 20\,\mathrm{N}.$$

(β) Γιά τη συνθήκη μηδενισμού των ροπών, επιλάγουμε ως σημείο εφαρμογής τη θέση στην οποία εφαρμόζεται η $\vec{F}_1$ (ώστε η ροπή αυτής είναι μηδέν). Έχουμε γιά το μέτρο της ολικής ροπής

$$\tau = -(20\,\mathrm{N})\cdot 6d + (10\,\mathrm{N})\cdot 2d - (30\,\mathrm{N})\cdot d + F_2 \cdot 2d = 0 \Rightarrow F_2 = 65\,\mathrm{N}.$$

(γ) Μπορούμε τώρα να βρούμε την F_1 συνδυάζοντας τις συνθήκες ισορροπίας

$$F_1 = F_2 - 20\,\mathrm{N} \Rightarrow F_1 = 45\,\mathrm{N}. \ \square$$

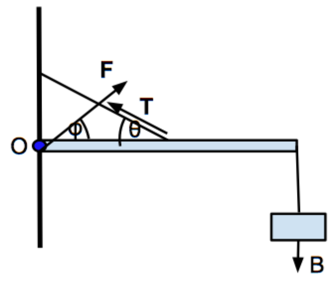
Ας υποθέσουμε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίζαμε τη ροπή ως προς διαφορετικό σημείο και ότι το σημείο εφαρμογής της F_1. Έστω $\vec{r}_i$ οι θέσεις εφαρμογής των δυνάμεων ως προς το αρχικό σημείο υπολογισμού των ροπών και $\vec{r}_i'$ οι θέσεις ως προς το νέο σημείο και ισχύει $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{r}_0$. Ο νέος υπολογισμός της ροπής δίνει

$$\vec{\tau}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i + \vec{r}_0) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_0 \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{\tau}. \tag{16.3}$$

Η τελευταία προκύπτει δεδομένου ότι στην ισορροπία η συνισταμένη δύναμη είναι $\sum \vec{F}_i = 0$.

Αυτό δικαιολογεί γιατί επιλέγουμε το σημείο υπολογισμού της ροπής γιά να απλοποιήσουμε κάθε φορά τον υπολογισμό.

Παράδειγμα 16.3. ([5] σελ Στ-5) Ένα αντικείμενο εξαρτάται από τη μία άκρη αβαρούς ράβδου μήκους L η οποία είναι στερεωμένη από το άλλο άκρο σε τοίχο με καρφί και από ένα καλώδιο το οποίο είναι δεμένο στη μέση της ράβδου υπό γωνία $\theta = 30^o$. Αν το βάρος του σώματος είναι $B = 1\,\mathrm{N}$ και αυτό βρίσκεται σε ισορροπία, βρείτε (α) την τάση στο καλώδιο και (β) τη δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το καρφί.



Λύση. Η συνθήκη μηδενισμού των ροπών ως προς το άκρο O είναι

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow \frac{L}{2} T \sin\theta - LB = 0 \Rightarrow B = \frac{T}{2}\sin\theta \Rightarrow T = \frac{2B}{\sin\theta} = 4\,\mathrm{N}. \tag{1}$$

ΟΙ συνθήκες μηδενισμού των δυνάμεων στους άξονες x και y αντίστοιχα είναι

$$\begin{aligned} &F\cos\phi - T\cos\theta = 0 \Rightarrow F\cos\phi = T\cos\theta \\ &F\sin\phi + T\sin\theta - B = 0 \Rightarrow F\sin\phi = B - T\sin\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Διαιρώντας τες κατά μέλη παίρνουμε γιά την κατεύθυνση ϕ της δύναμης $\vec{F}$

$$\tan\phi = \frac{B}{T\cos\theta} - \tan\theta.$$

Αντικαθιστούμε το B από την (1) βρίσκουμε

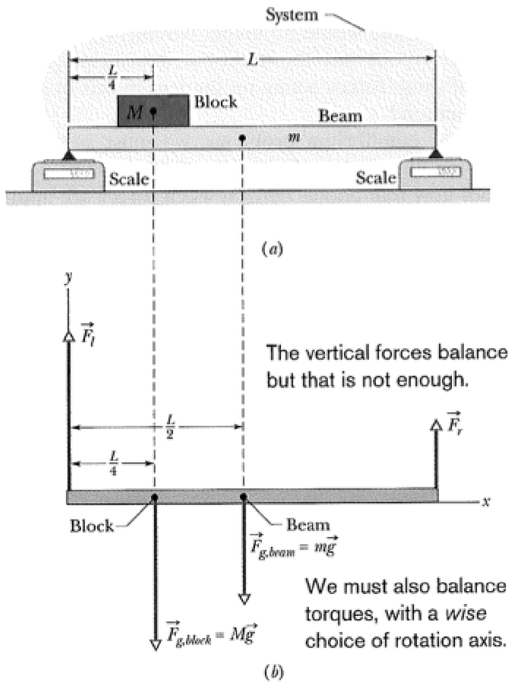
$$\tan\phi = \frac{1}{2}\tan\theta - \tan\theta = -\frac{1}{2}\tan\theta \Rightarrow \tan\phi = -0.2887 \Rightarrow \phi = -16.1^o$$

Τέλος, από την (1) αντικαθιστώντας την (2) έχουμε

$$F\sin\phi = -B \Rightarrow F = -\frac{B}{\sin\phi} = 3.6\,\mathrm{N}.\ \square$$

16.3. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 16.1. ([1] σελ 391) Μία ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας $m = 1.8\,\mathrm{kg}$ είναι ακίνητη πάνω σε δύο ζυγούς (όπως στο σχήμα). Ένα ομογενές συμπαγές σώμα με μάζα $M = 2.7\,\mathrm{kg}$ είναι ακίνητο πάνω στη δοκό, με το κέντρο μάζας του σε απόσταση $L/4$ από το αριστερό της άκρο. Ποιές οι ενδείξεις των ζυγών;



Σχημα 9. Πηγή: Halliday, Resnick, Walker, page 313.

Λύση. Οι ενδείξεις των ζυγών είναι ίσες με τις δυνάμεις τις οποίες δέχονται (και στις οποίες ασκούν ίσες και αντίθετες αντιστάσεις).

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι: το βάρος της δοκού mg στο κέντρο μάζας της (στο κέντρο της), το βάρος του σώματος Mg στο κέντρο μάζας του και οι αντιστάσεις F_l, F_r από τους ζυγούς. Γιά τις συνιστώσες y των δυνάμεων έχουμε τη συνθήκη ισορροπίας

$$F_l + F_r = Mg + mg. \tag{1}$$

Γιά να δούμε τη συνθήκη ισορροπίας γιά τις ροπές θα πρέπει να επιλέξουμε σημείο εφαρμογής. Επιλέγουμε το αριστερό άκρο της ράβδου:

$$-\frac{L}{4}Mg - \frac{L}{2}mg + LF_r = 0 \Rightarrow F_r = \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{2}mg = \ldots = 15.44\,\mathrm{N}.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην (1) και έχουμε

$$F_l = (M + m)g - F_r = \ldots = 28.66\,\mathrm{N}.$$

17. Ταλαντώσεις

17.1. **Απλή αρμονική κίνηση.** Κίνηση που επαναλαμβάνεται ονομάζεται *περιοδική κίνηση* ή *αρμονική κίνηση* (επίσης *ταλάντωση*). Αυτή χαρακτηρίζεται από την *περίοδό* της, δηλαδή, το χρόνο που παίρνει γιά να επαναληφθεί η κίνηση. Η *συχνότητα* είναι ο αριθμός των πλήρων περιόδων στη μονάδα του χρόνου

$$f = \frac{1}{T}. \tag{17.1}$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που η μετατόπιση ενός σωματίου από μία κεντρική θέση (π.χ., τη θέση ισορροπίας ελατηρίου) δίνεται από την

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi). \tag{17.2}$$

Αυτή ονομάζεται *απλή αρμονική κίνηση*. Αν T η περίοδος τότε πρέπει $x(t) = x(t+T) \Rightarrow \omega(t+T) = \omega t + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi$. Άρα η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \tag{17.3}$$

Επιλέγουμε $x_m > 0$ και παρατηρούμε ότι $|x(t)| \le x_m$ γιά κέθε t. Λέμε το x_m πλάτος της ταλάντωσης. Τέλος, η ϕ είναι μία σταθερά μέσω της οποίας δίνεται η αρχική θέση $x(0) = x_m \cos\phi$.

Παρατήρηση 28. *Μεταβολή του ϕ μετατοπίζει την συνημιτονοειδή καμπύλη γιά τη θέση $x(t)$. Αν πάρουμε $\phi = -\pi/2$ τότε $x(t) = x_m \cos(\omega t - \pi/2) = x_m \sin(\omega t)$.*

Η ταχύτητα, γιά απλή αρμονική κίνηση, είναι

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi). \tag{17.4}$$

Παρατηρούμε $|v(t)| \le v_m := |\omega x_m|$.

Η επιτάχυνση, γιά απλή αρμονική κίνηση, είναι

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi). \tag{17.5}$$

Παρατηρούμε $|a(t)| \le a_m := |\omega^2 x_m|$.

Είναι σημαντικό ότι

$$a(t) = -\omega^2 x(t). \tag{17.6}$$

Ο νόμος Νεύτωνα που θα έδινε αυτή την επιτάχυνση είναι

$$F = ma \Rightarrow F = -(m\omega^2)x. \tag{17.7}$$

Αυτός είναι ακριβώς ο νόμος Hooke (του ελατηρίου) $F = -kx$, αν πάρουμε $k = m\omega^2$. Το ελατήριο θα έδινε απλή αρμονική κίνηση με

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{17.8}$$

Παράδειγμα 17.1. ([1] σελ 491) Σώμα μάζας $m = 680\,\mathrm{g}$ είναι δεμένος σε ελατήριο σταθεράς $k = 65\,\mathrm{N/m}$. Το σώμα σύρεται σε απόσταση $\ell = 11\,\mathrm{cm}$ και απελευθερώνεται από την ηρεμία. Περιγράψτε την κίνηση.

Λύση. Το σύστημα ικανοποιεί τον νόμο Νεύτωνα $ma = -kx$, άρα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Αν πάρουμε

$$x(t) = \ell \cos(\omega t), \tag{17.9}$$

τότε έχουμε $v = -\omega\ell \sin(\omega t)$. Γιά $t = 0$ παίρνουμε $x(t = 0) = \ell$, $v(t = 0) = 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι δεδομένες αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Γιά $t > 0$ την κίνηση θα δώσει ο νόμος Νεύτωνα (ήδη ξέρουμε ότι πρόκειται γιά απλή αρμονική ταλάντωση).

Συμπεραίνουμε ότι το πλάτος ταλάντωσης είναι $\ell = 11\,\mathrm{cm}$.

Η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65\,\mathrm{N/m}}{0.68\,\mathrm{kg}}} = 9.78\,\mathrm{rad/sec}. \tag{17.10}$$

Η συχνότητα είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9.78\,\mathrm{rad/sec}}{2\pi\,\mathrm{rad}} = 1.56\,\mathrm{sec}^{-1} = 1.56\,\mathrm{Hz}. \ \square \tag{17.11}$$

Παρατήρηση 29. *Ο νόμος του Νεύτωνα στη μορφή*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{17.12}$$

δίνει απλή αρμονική ταλάντωση γιά τη μετατόπιση $x(t)$.

Παράδειγμα 17.2. (**Γωνιακός απλός αρμονικός ταλαντωτής**, [1] παρ. 15-5) Θεωρούμε έναν δίσκο ο οποίος συνδέεται στο κέντρο του με μία ευλύγιστη ράβδο και μπορεί έτσι να στρέφεται (αποκλίνοντας κατά μικρές γωνίες θ) γύρω από τον άξονά του. Ας υποθέσουμε ότι η ροπή που ασκείται από τη ράβδο στον δίσκο είναι

$$\tau = -\kappa\theta, \tag{17.13}$$

όπου θ είναι η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου από τη θέση ισορροπίας. Το κ είναι μία σταθερά που λέγεται *σταθερά στρέψης*. Ας δούμε την κίνηση που θα κάνει ο δίσκος.
Λύση. Ο νόμος γιά τη μεταβολή της στροφορμής του δίσκου (στερεό σώμα) είναι

$$\tau = I\alpha, \tag{17.14}$$

όπου I η ροπή αδράνειας και α η γωνιακή επιτάχυνσή του:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{17.15}$$

Παρατηρήστε ότι αυτή είναι απολύτως ανάλογη με τη σχέση $a = d^2x/dt^2$. Ώστε έχουμε

$$I\alpha = -\kappa\theta \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa\theta = 0, \tag{17.16}$$

από όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η θ θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \phi). \tag{17.17}$$

17.2. **Ενέργεια στην απλή αρμονική κίνηση.** Αφού η δύναμη στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι $F = -kx$, η δυναμική ενέργεια είναι

$$\begin{aligned} U(t) = \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}kx_m^2\,\cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\,x_m^2\,\cos^2(\omega t + \phi), \end{aligned}$$

όπου θεωρήσαμε γνωστό ότι $m\omega^2 = k$. Η κινητική ενέργεια είναι

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\,x_m^2\,\sin^2(\omega t + \phi) \tag{17.18}$$

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2\,x_m^2[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2}m\omega^2\,x_m^2. \tag{17.19}$$

Έστω ότι η ενέργεια έχει μία συγκεκριμένη τιμή (πρέπει $E_0 \geq 0$):

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{17.20}$$

Μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα v γιά κάθε θέση x του σωματίου

$$v^2 = \frac{2E_0}{m} - \omega^2 x^2 \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{2E_0}{m} - \omega^2 x^2}. \tag{17.21}$$

Γιά να ισχύει $v^2 \geq 0$, ή ισοδύναμα, γιά να είναι $K \geq 0$, έχουμε τη συνθήκη

$$E_0 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{2E_0}{m\omega^2}. \tag{17.22}$$

Μπορούμε να μελετήσουμε και γραφικά την παραπάνω ανισότητα. Αν κάνουμε τη γραφική παράσταση της $U(x)$ και θέσουμε στο ίδιο γράφημα την ευθεία $E = E_0 > 0$, μπορούμε να δούμε τα όρια της κίνησης, δηλαδή, το διάστημα στο οποίο ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη. Αυτό είναι $-x_0 \leq x \leq x_0$, με

$$x_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}}. \tag{17.23}$$

Η ταχύτητα v μηδενίζεται στα όρια της ταλαντωτικής κίνησης $x = \pm x_0$. Στα σημεία αυτά μάλιστα αλλάζει φορά η ταχύτητα.

17.3. **Εξαναγκασμένη ταλάντωση.** Ας θεωρήσουμε ένα ελατήριο, σε οριζόντια θέση, του οποίου το ένα άκρο είναι σταθερά συνδεδεμένο σε ένα έμβολο. Αυτό μπορεί να κινείται και να εκτελεί ταλάντωση με μία συχνότητα έστω ω_F, οπότε η θέση του πακτωμένου άκρου δίνεται από

$$d = d_0 \cos(\omega_F t). \tag{17.24}$$

Θα λέμε την ω_F *εξαναγκάζουσα συχνότητα* και αυτή δεν είναι γενικά ίση με τη φυσική συχνότητα ταλαντώσεων μάζας m στην άκρη του ελατηρίου $\omega = \sqrt{k/m}$.

Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο επί της μάζας είναι

$$F = -k(x-d) = -k\left[x - d_0 \cos(\omega_F t)\right] = -kx + kd_0 \cos(\omega_F t), \tag{17.25}$$

οπότε ο νόμος Νεύτωνα δίνει

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}d_0 \cos(\omega_F t) \\ \Rightarrow &\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \omega^2 d_0 \cos(\omega_F t). \end{aligned}$$

Γιά να βρούμε λύση αυτής της εξίσωσης θα δοκιμάσουμε τη μορφή

$$x(t) = x_m \cos(\omega_F t). \tag{17.26}$$

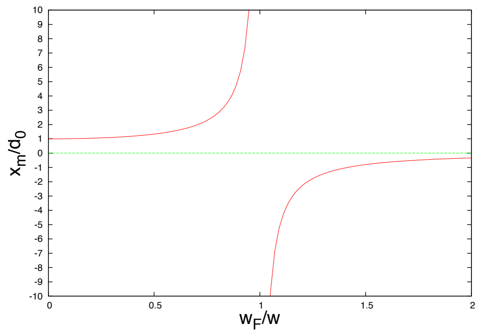
Η 2η παράγωγος είναι $d^2x/dt^2 = -\omega_F^2 x_m \cos(\omega_F t)$ και αντικατάσταση στην εξίσωση δίνει

$$\begin{aligned} &-\omega_F^2 x_m \cos(\omega_F t) + \omega^2 x_m \cos(\omega_F t) = \omega^2 d_0 \cos(\omega_F t) \\ \Rightarrow &x_m = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_F^2}\, d_0 = \frac{1}{1 - \frac{\omega_F^2}{\omega^2}}\, d_0. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ω_F και πλάτος ταλάντωσης καθορισμένο και ίσο με το x_m το οποίο βρήκαμε.

Παρατήρηση 30. *Η συχνότητα ταλάντωσης είναι ίση με την εξαναγκάζουσα συχνότητα ω_F.*

Παρατήρηση 31. *Το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από το λόγο της εξαναγκάζουσας προς την φυσική συχνότητα του ελατηρίου. Αν η ω_F γίνει περίπου ίση με την ω τότε το πλάτος της ταλάντωσης μεγαλώνει και γίνεται άπειρο αν $\omega_F = \omega$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε συντονισμό.*



Σχημα 10. Πλάτος εξαναγκασμένης ταλάντωσης x_m/d_0 ως συνάρτηση της εξαναγκάζουσας συχνότητας ω_F/ω. Γιά $\omega_F/\omega = 1$ έχουμε απειρισμό του x_m.

17.4. Ασκήσεις.

Άσκηση 17.1. Δείξτε ότι στην απλή αρμονική ταλάντωση, η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας σε μία περίοδο είναι ίσες μεταξύ τους. [Δίνεται ότι $\int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi = \pi$.]

Λύση. Έστω $x(t) = x_m \cos(\omega t)$.

Η μέση κινητική ενέργεια σε μία περίοδο T είναι

$$\bar{K} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} m v^2\, dt = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \,\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\, dt.$$

Αλλά

$$\int_0^T \sin^2(\omega t)\, dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega t)\, d(\omega t) = \frac{\pi}{\omega}.$$

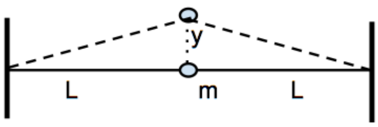
Οπότε

$$\bar{K} = \frac{1}{4} m\omega^2 x_m^2.$$

Μέση δυναμική ενέργεια

$$\bar{U} = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \,\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\, dt$$
$$\Rightarrow \bar{U} = \frac{1}{4} m\omega^2 x_m^2.$$

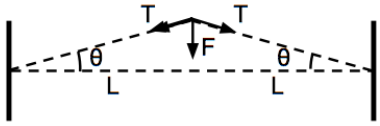
Άσκηση 17.2. Μία μικρή μάζα m είναι προσδεμένη στο κέντρο χορδής τα άκρα της οποίας είναι σταθερά προσαρμοσμένα. Μελετήστε την κίνηση της μάζας m σε οριζόντιο επίπεδο γιά μικρές αποκλίσεις από τη θέση ισορροπίας.



Λύση. Όταν η μάζα βρίσκεται στην οριζόνιο στο μέσο της χορδής, βρίσκεται σε ισορροπία. Όταν η θέση της μάζας αποκλίνει από τη θέση ισορροπίας κατά y, σε κατεύθυνση κάθετη στη χορδή, από την κάθε πλευρά της χορδής ασκείται δύναμη T κατά μήκος της χορδής. Η συνισταμένη δύναμη επαναφοράς προς τη θέση ισορροπίας είναι

$$F = -2T\sin\theta. \tag{17.27}$$

Είναι $\sin\theta = y/L$. Ο νόμος Νεύτωνα δίνει

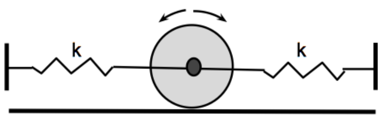


$$(1) \qquad ma = -2\frac{T}{L}y \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\frac{T}{L}y \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2T}{mL}y.$$

Θα υποθέσουμε ότι γιά $y \ll L$ το μέτρο της T είναι σταθερό (ανεξάρτητο του y). Τότε, η εξ. (1) δίνει απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{2T}{mL}}.$$

Άσκηση 17.3. ([5] T-15) Πλήρης ομογενής κύλινδρος ακτίνας R και μάζας M εκτελεί μικρές ταλαντώσεις υπό την επίδραση δύο ελατηρίων με σταθερές k, όπως στο σχήμα. Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να δειχθεί ότι η κίνηση του κυλίνδρου είναι απλή αρμονική ταλάντωση, όταν δεν υπάρχουν τριβές και να βρεθεί η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης.



Λύση. Ας θεωρήσουμε ως $x = 0$ τη θέση ισορροπίας του κυλίνδρου, όπου μηδενίζεται η συνισταμένη δυνάμη από τα δύο ελατήρια. Η δυναμική ενέργεια είναι

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = kx^2,$$

όπου x η απόκλιση από τη θέση ισορροπίας. Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

όπου $I = \frac{1}{2}MR^2$ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου. Η τάχύτητα του κυλίνδρου είναι v και $v = R\omega$. Ώστε

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4}Mv^2.$$

Η ενέργεια είναι

$$E = K + U = \frac{3}{4}Mv^2 + kx^2$$

και πρέπει να διατηρείται, δηλαδή $dE/dt = 0$. Έχουμε,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{3}{2}Mv\frac{dv}{dt} + 2kx\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}Mv\frac{dv}{dt} + 2kxv.$$

Ισχύει

$$\frac{3}{2}M\frac{dv}{dt} + 2kx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{4k}{3M}x = 0.$$

Αφού, $dv/dt = d^2x/dt^2$, έχουμε τελικά

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4k}{3M}x = 0.$$

Άρα ο κύλινδρος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{3M}}.$$

Άσκηση 17.4. ([5] T-18) Έστω αβαρές ελατήριο σταθεράς k το οποίο εξαρτάται από το ένα άκρο του από σταθερό σημείο κατά την κατακόρυφο. Ένα σώμα μάζας m αναρτάται από το ελεύθερο άκρο και το ελατήριο επιμηκύνεται κατά $\Delta\ell$. Δείξτε ότι το σύστημα όταν διαταραχθεί από τη νέα θέση ισορροπίας εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Άσκηση 17.5. ([5] T-22) Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους ℓ μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από άξονα O στο ένα άκρο της. Το άλλο άκρο της συνδέεται με ελατήριο. Το σύστημα είναι σε θέση ισορροπίας όταν η ράβδος είναι οριζόντια. Να ευρεθεί η περίοδος μικρών ταλαντώσεων που εκτελεί η ράβδος όταν απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας κατά μικρή γωνία θ.

18. Κύματα

18.1. **Εγκάρσια και διαμήκη κύματα.**

Η πληροφορία μεταδίδεται μέσω κυμάτων. Πληροφορία μπορεί να αποτελέσει μία διαταραχή που προκαλούμε σε μία αρχικά ακίνητη χορδή. Αυτή μπορεί να μετακινηθεί ως ένας παλμός. Μία συνεχής δημιουργία διαταραχών μπορεί να δημιουργήσει ένα ημιτονοειδές κύμα όταν αυτές διαδίδονται.

Στην περίπτωση χορδής η οποία διαταράσσεται σε διεύθυνση κάθετη στη χορδή, το κύμα λέγεται *εγκάρσιο*, αφού η κίνηση της χορδής γίνεται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Σε ένα δεύτερο πείραμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι πιέζουμε περιοδικά τον αέρα μέσα σε έναν σωλήνα. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει κύμα στο οποίο η μετατόπιση του αέρα είναι στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος (κατά μήκος του σωλήνα). Τέτοια κύματα λέγονται *διαμήκη*.

18.2. **Μήκος κύματος και συχνότητα.**

Ας θεωρήσουμε μία χορδή που εκτείνεται στη διεύθυνση x και ότι κάθε σημείο της χορδής μπορεί να αποκλίνει (μετατοπίζεται από τη θέση ισορροπίας) προς την y διεύθυνση. Γιά την περιγραφή ενός κύματος χρειαζόμαστε τη μετατόπιση y κάθε σημείου της χορδής σε κάθε στιγμή στο χρόνο. Δηλαδή κοιτάζουμε την εξάρτηση της θέσης y στο x και t, ώστε $y = h(x,t)$. Αν κάθε σημείο κάνει μία αρμονική ταλάντωση τότε έχουμε

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t), \qquad y_m, k, \omega : \text{σταθερές}. \tag{18.1}$$

Παρατηρούμε ότι γιά κάθε σημείο της χορδής $x = x_0$ το kx_0 μπορεί να θεωρηθεί ως μία απλή φάση και έχουμε αρμονική ταλάντωση στο χρόνο με γωνιακή συχνότητα ω. Ξέρουμε ότι αν T είναι η περίοδος ταλάντωσης τότε

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{18.2}$$

Το y_m δίνει το πλάτος της ταλάντωσης.

Θα ανομάσουμε την ποσότητα $kx - \omega t$ *φάση* του κύματος. Η φάση αλλάζει γραμμικά με το χρόνο, όπως και στις ταλαντώσεις.

Η φάση εξαρτάται γραμμικά και από τη χωρική μεταβλητή x. Γιά δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_0$ η y η κυματική μορφή επαναλαμβάνεται στο x ανά απόσταση λ, η οποία ονομάζεται *μήκος κύματος*. Ισχύει

$$\sin(kx - \omega t_0) = \sin[k(x+\lambda) - \omega t_0] \Rightarrow k\lambda = 2\pi,$$

άρα

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{18.3}$$

Ονομάζουμε το k *κυματάριθμο*, δίνει τον αριθμό ακτινίων (rad) που περιέχονται στη μονάδα μήκους της χορδής (του κύματος).

Τέλος σημειώστε ότι, όπως και στις απλές ταλαντώσεις, μπορούμε να προσθέσουμε μία σταθερή φάση ϕ στη μορφή του κύματος οπότε παίρνουμε τη γενικότερη έκφραση:

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi). \tag{18.4}$$

18.3. **Ταχύτητα οδεύοντος κύματος.**

Ξέρουμε από εμπειρία ότι τα κύματα φαίνεται να μετατοπίζονται με κάποια συνήθως σταθερή ταχύτητα. Αυτή η μετατόπιση φαίνεται στην κυματική μορφή από την κίνηση της φάσης της. Αν υποθέσουμε ότι η φάση είναι ϕ_0 γιά κάποιο δεδομένο σημείο σε δεδομένο χρόνο, τότε

$$kx - \omega t = \phi_0.$$

Με την πάροδο του χρόνου t η ίδια φάση ϕ_0 πετυχαίνεται σε μετατοπισμένη θέση x. Άρα η μορφή του κύματος φαίνεται να κινείται προς τα θετικά x.

Γιά την ταχύτητα, αρκεί να παραγωγίσουμε τη φάση ως προς χρόνο:

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}. \tag{18.5}$$

Επίσης

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \tag{18.6}$$

Η $v = \lambda/T$ λέει ότι η ταχύτητα είναι ένα μήκος κύματος ανά περίοδο.

Ένα κύμα με αρνητική ταχύτητα θα ήταν το

$$y(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t). \tag{18.7}$$

Παράδειγμα 18.1. Κύμα έχει τη μορφή

$$y(x,t) = (2.1\text{m}) \sin[(7\,\text{rad/m})\,x - (3\,\text{rad/sec})\,t].$$

Η ταχύτητά του είναι

$$v = \frac{3\,\text{rad/sec}}{7\,\text{rad/m}} = \frac{3}{7}\,\text{m/sec}. \;\square$$

Παρατήρηση 32. *Σε ένα μέσο (π.χ. χορδή) με καθορισμένη ταχύτητα οδεύοντος κύματος v, εάν σε ένα κύμα καθορίσουμε τον κυματαριθμό k τότε καθορίζεται μονοσήμαντα η γωνιακή συχνότητα $\omega = vk$.*

Παράδειγμα 18.2. Πόση είναι η εγκάρσια ταχύτητα u του κύματος $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$;
Λύση. Η εγκάρσια ταχύτητα είναι ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει η μετατόπιση y κάθε στοιχείου. Είναι (γιά κάθε σταθερό και δεδομένο σημείο $x = x_0$)

$$u = \frac{dy}{dt} = -\omega y_m \cos(kx_0 - \omega t). \;\square$$

18.4. **Ταχύτητα κύματος σε χορδή.** Γιά να πετύχουμε διάδοση κύματος σε χορδή είναι λογικό να σκεφτούμε ότι θα πρέπει να ασκούνται δυνάμεις στη στοιχεία της χορδής (αλλιώς δεν θα ήταν δυνατόν να ταλαντώνονται, όπως συμβαίνει στο κύμα). Άρα, στη μάζα κάθε στοιχείου της χορδής ασκείται κάποια τάση τ η οποία προκαλεί τον κυματισμό. Αν θεωρούμε τη χορδή ως πολύ λεπτή η ποσότητα που μετράει τη μάζα της είναι η γραμμική πυκνότητα $\mu = m/L$ όπου m η συνολική της μάζα και L το μήκος της.

Παρατηρήστε ότι οι φυσικές διαστάσεις της γραμμικής πυκνότητας είναι kg/m και οι διαστάσεις της τάσης είναι $\text{Kg} \cdot \text{m/sec}^2$. Ο συνδυασμός τους ο οποίος δίνει μονάδες ταχύτητας είναι $\sqrt{\tau/\mu}$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του κύματος θα δίνεται από

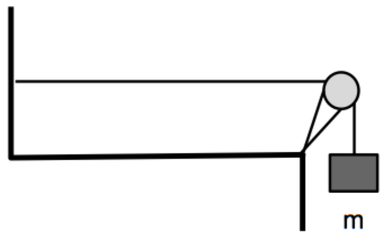
$$v = C\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \tag{18.8}$$

όπου C είναι μία σταθερά η οποία δεν μπορεί να βρεθεί από τη διαστατική ανάλυση.

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να βρεθεί και αν εφαρμόσουμε αναλυτικά το νόμο Νεύτωνα στη χορδή, οπότε βρίσκουμε ακριβώς

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \tag{18.9}$$

Παράδειγμα 18.3. ([3] σελ. 11 παράδειγμα 16.2) Ομογενές νήμα έχει μάζα $m_L = 0.3\,\text{kg}$ και μήκος $L = 6\,\text{m}$. Το ένα άκρο του νήματος είναι στερεωμένο σε τοίχο, ενώ στο άλλο είναι αναρτημένο σώμα μάζας $m = 2\,\text{kg}$ έτσι ώστε διατηρείται σταθερή τάση στο νήμα. Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία θα διαδοθεί ένας παλμός στο νήμα.



Λύση. Η τάση του νήματος είναι ίση με το βάρος της μάζας m

$$\tau = mg = (2\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{msec}^2) = 19.6\,\mathrm{N}.$$

Η γραμμική πυκνότητα του νήματος είναι

$$\mu = \frac{m_L}{L} = \frac{0.3\,\mathrm{kg}}{6\,\mathrm{m}} = 0.05\,\mathrm{kg/m}.$$

Απομένως το μέτρο ταχύτητας του παλμού είναι

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = 19.8\,\mathrm{m/sec}. \square$$

18.5. **Ανάκλαση κυμάτων.** (Δείτε αναλυτικότερα στο Serway III κεφ 16.6)

Ας θεωρήσουμε παλμό κύματος (δηλαδή ένα τμήμα κύματος) το οποίο ταξιδεύει σε νήμα το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε τοίχο. Όταν ο παλμός φθάσει στον τοίχο θα ανακλαστεί. Αυτό που θα συμβεί είναι ότι κατά την πρόσκρουση το νήμα θα ασκήσει δύναμη στον τοίχο, π.χ., προς τα επάνω εάν ο παλμός κύματος συνίσταται σε ένα τμήμα της χορδής το οποίο έχει απόκλιση προς τα επάνω. Ο τοίχος θα ασκήσει μία αντίδραση στο νήμα προς τα κάτω. Αυτό θα αντιστρέψει τον παλμό ο οποίος θα ταξιδεύει πλέον αντεστραμένος προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αυτό ονομάζουμε ανάκλαση του κύματος.

Θα μπορούσαμε να καταστευάσουμε χορδή η οποία εξαρτάται στη μία άκρη της από έναν στήλο μέσω ενός δακτυλίου, έτσι ώστε το άκρο αυτό είναι ελεύθερο να κινείται στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Αν παλμός κύματος φθάσει στον στύλο θα ανακλαστεί, δηλαδή θα αναστραφεί η ταχύτητά του, αλλά θα ταξιδεύει στην αντίθετη κατεύθυνση χωρίς να αναστραφεί.

Σε μία περίπτωση που η άκρη του νήματος δεν είναι συνδεδεμένη σε κάποιο σταθερό μέσο, αλλά σε κάποιο μαλακότερο μέσο (π.χ., σε μία δεύτερη χορδή η οποία είναι πιό χοντρή ή πιό βαριά, κλπ, από την πρώτη) τότε περιμένουμε ότι ένα μέρος του παλμού θα ανακλαστεί και ένα άλλο μέρος θα συνεχίσει να ταξιδεύει στο δεύτερο μέσο. Έχουμε δηλαδή μερική ανάκλαση και μερική διάδοση του κύματος.

18.6. **Διάδοση ενέργειας κύματος.** Η εγκάρσια κίνηση της χορδής σημαίνει ότι τα στοιχεία της χορδής έχουν κινητική ενέργεια. Όταν το στοιχείο είναι στην ακρότατη θέση (θέση a στο σχήμα) η εγκάρσια ταχύτητά του και κατά συνέπεια η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν. Όταν είναι στη θέση b τότε είναι μέγιστη.

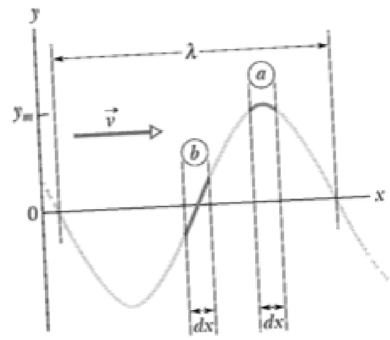
Επίσης, τα στοιχεία της χορδής έχουν δυναμική ενέργεια αφού απομακρύνονται από τη θέση ισορροπίας τους και αφού υποτίθεται ότι δρα επάνω του μία δύναμη επαναφοράς. Στη θέση a (στο σχήμα) το στοιχείο είναι στη φυσική του κατάσταση, άρα η δυναμική ενέργεια ελαστικότητας είναι μηδές, ενώ στο σημείο b έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια αφού έχει υποστεί μέγιστη παραμόρφωση.

Ένα στοιχείο dm έχει κινητική ενέργεια

$$dK = \frac{1}{2}(dm)\,u^2.$$

Είναι

$$u = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$



ΣΧΗΜΑ 11. Πηγή: Halliday, Resnick. Walker, p. 421.

και, χρησιμοποιώντας τη γραμμική πυκνότητα: $dm = \mu\, dx$. Ώστε

$$dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)\, dx.$$

Βλέπουμε ότι η κινητική ενέργεια στοιχείου dx μεταβάλλεται με το χρόνο. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ενέργεια που χάνεται από το ένα στοιχείο μεταφέρεται στο διπλανό του (ενώ άυξηση της ενέργειας στο dx σημαίνει ότι αυτή μεταφέρθηκε από το διπλανό στοιχείο). Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)\, \frac{dx}{dt}$$

δίνει την το ρυθμό με τον οποίο η κινητική ενέργεια μεταφέρεται με το κύμα. Αφού $dx/dt = v$, έχουμε

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t). \tag{18.10}$$

Πιό χρήσιμη ποσότητα είναι ο *μέσος ρυθμός* μεταφοράς ενέργειας σε ακέραιο μήκος κύματος λ:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dK}{dt}\right)_\mu &= \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2\, \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t)\, dx \\ &= \frac{1}{4}\mu v\omega^2 y_m^2. \end{aligned} \tag{18.11}$$

Προκύπτει με έναν ανάλογο υπολογισμό ότι και η μέση δυναμική ενέργεια ελαστικότητας έχει την ίδια τιμή. Δηλαδή οι μέσες κινητική και δυναμική ενέργεια είναι ίσες.

Καταλήγουμε ότι η *μέση ισχύς* είναι

$$P_\mu = 2\left(\frac{dK}{dt}\right)_\mu = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2. \tag{18.12}$$

Η εξάρτηση της ισχύος από το τετράγωνο του πλάτους και από το τετράγωνο της συχνότητας είναι ένα αποτέλεσμα που ισχύει γιά κύματα οποιουδήποτε τύπου.

18.7. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 18.1. ([3] ασκ 16.44) Ένα οδεύον κύμα έχει την έκφραση

$$y(x,t) = (4\,\mathrm{m})\, \sin(2x - 3t),$$

όπου τα x, y είναι σε cm και το t σε sec. Βρείτε (α) το πλάτος, (β) το μήκος κύματος, (γ) τη συχνότητα, (δ) την περίοδο και (ε) την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Λύση. (α) $y_m = 4\,\mathrm{m}$.

(β) Βλέπουμε ότι $k = 2\,\mathrm{m}^{-1}$, άρα

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \pi\,\mathrm{m} = 3.14\,\mathrm{m}.$$

(γ) Βλέπουμε ότι $\omega = 3\,\mathrm{rad/sec}$, άρα

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{2\pi}\,\mathrm{Hz}.$$

(δ)

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{sec}.$$

(ε) Η φάση $kx - \omega t$ παραμένει σταθερή αν κινηθούμε στο χώρο δεξιά και ταυτοχρόνως μεγαλώνει ο χρόνος t, άρα το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά.

Άσκηση 18.2. ([3] Ασκ 16.31) Δίνεται το κύμα με εξίσωση

$$y(x,t) = (0.08\,\mathrm{m})\,\sin(0.24x - 30t),$$

όπου τα x, y είναι σε m και το t σε sec. Βρείτε (α) την ταχύτητα φάσης του κύματος και (β) τη μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα.

Λύση. (α) Έχουμε $k = 0.24\,\mathrm{m}^{-1}$ και $\omega = 30\,\mathrm{rad/sec}$, ώστε

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{30\,\mathrm{rad/sec}}{0.24\,\mathrm{m}^{-1}} = \frac{1000}{8}\,\mathrm{m/sec}.$$

(β)

$$u = \frac{dy}{dt} = (-30 \times 0.08)\,(\mathrm{m/sec})\,\cos(0.24x - 30t) = (-2.4\,\mathrm{m/sec})\,\cos(0.24x - 30t),$$

άραη μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα είναι $u_m = 2.4\,\mathrm{m/sec}$.

Άσκηση 18.3. ([3] Ασκ 16.47) Έστω χορδή μήκους $L = 2\,\mathrm{m}$ και μάζας $m = 5\,\mathrm{g}$. Η χορδή είναι τεντωμένη υπό τάση $\tau = 80\,\mathrm{N}$. (α) Ποιά είναι η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων που μπορούν να δημιουργηθούν, (β) Ποιά είναι η απαιτούμενη ισχύς γιά τη δημιουργία των κυμάτων με μήκος κύματος $\lambda = 16\,\mathrm{cm}$ και πλάτους $A = 4\,\mathrm{cm}$.

Λύση. (α) Χρειαζόμαστε τη γραμμική πυκνότητα μάζας $\mu = m/L = 2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}$. Η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων είναι

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{80}{2.5 \times 10^{-3}}}\,(\mathrm{m/sec}) = 178.8\,(\mathrm{m/sec}).$$

(β) Χρειαζόμαστε τη γωνιακή συχνότητα ω του κύματος

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = vk \Rightarrow \omega = v\frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \omega = 178.8\,\frac{2\pi}{0.16}\,\mathrm{rad/sec} = 7.021 \times 10^3\,\mathrm{rad/sec}.$$

Η ζητούμενη ισχύς είναι

$$P = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\,(2.5\times10^{-3})\times(178.8)\times(7.021\times10^3)^2\times(4\times10^{-2})^2\,(\mathrm{kg\,m^2/sec^3}) = 1.763\times10^4\,(\mathrm{m/sec}).$$

Άσκηση 18.4. ([3], Ασκ 16.47) Έστω χορδή μήκους $L = 2\,\mathrm{m}$ και μάζας $m = 5\,\mathrm{g}$. Η χορδή είναι τεντωμένη υπό τάση $\tau = 80\,\mathrm{N}$. (α) Ποιά είναι η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων που μπορούν να δημιουργηθούν; (β) Ποιά είναι η απαιτούμενη ισχύς γιά τη δημιουργία των κυμάτων με μήκος κύματος $\lambda = 16\,\mathrm{cm}$ και πλάτους $A = 4\,\mathrm{cm}$;

Λύση. (α) Χρειαζόμαστε τη γραμμική πυκνότητα μάζας $\mu = m/L = 2.5\times10^{-3}\,\mathrm{kg/m}$. Η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων είναι

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{80}{2.5\times10^{-3}}}\,(\mathrm{m/sec}) = 178.8\,(\mathrm{m/sec}).$$

(β) Χρειαζόμαστε τη γωνιακή συχνότητα ω του κύματος

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = vk \Rightarrow \omega = v\frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \omega = 178.8\,\frac{2\pi}{0.16}\,\mathrm{rad/sec} = 7.021\times10^{3}\,\mathrm{rad/sec}.$$

Η ζητούμενη ισχύς είναι

$$P = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\,(2.5\times10^{-3})\times(178.8)\times(7.021\times10^{3})^2\times(4\times10^{-2})^2\,(\mathrm{kg\,m^2/sec^3}) = 1.763\times10^{4}\,(\mathrm{W/sec}).$$

19. Υπερθεση κυματων και στασιμα κυματα

19.1. **Αρχή της υπέρθεσης.** Αν δύο κύμετα περάσουν ταυτόχρονα από μία περιοχή τότε το ένα θα προστεθεί, κατά κάποιο τρόπο, στο άλλο. Αυτό θα συμβεί με την έννοια του αλγεβρικού αθροίσματος των μετατοπίσεων $y_1(x,t), y_2(x,t)$ των δύο κυμάτων:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t). \tag{19.1}$$

Αυτή η έκφραση αποτελεί την *αρχή της υπέρθεσης*.

Παρατήρηση 33. *Αλληλοεπικαλυπτόμενα κύματα δεν επηρεάζουν το ένα τη διάδοση του άλλου.*

Η αρχή της υπέρθεσης σχετίζεται με την ιδιότητα των δυνάμεων, οι οποίες ευθύνονται γιά τη δημιουργία των κυμάτων, να αθροίζονται αλγεβρικά όταν τα κύματα επικαλύπτονται. Αυτό το θέμα μπορεί να γίνει πιό σαφές με τη χρήση διαφορικών εξισώσεων.

19.2. **Συμβολή κυμάτων.** Ας υποθέσουμε ότι στέλνουμε δύο κύματα $y_1 = y_{1,m}\sin(kx-\omega t)$ και $y_2 = y_{2.m}\sin(kx-\omega t)$ (του ίδιου μήκους κύματος) σε μία χορδή. Από την αρχή της υπέρθεσης έχουμε το συνολικό κύμα

$$y(x,t) = y_{1,m}\sin(kx-\omega t) + y_{2,m}\sin(kx-\omega t) = (y_{1,m}+y_{2,m})\sin(kx-\omega t).$$

Πιό γενικά, θα μπορούσαμε να έχουμε ένα κύμα

$$y_1(x,t) = y_m\sin(kx-\omega t) \tag{19.2}$$

και ένα άλλο μετατοπισμένο ως προς το πρώτο

$$y_2(x,t) = y_m\sin(kx-\omega t+\phi). \tag{19.3}$$

Λέμε ότι τα δύο κύματα είναι *εκτός φάσης* ή ότι έχουν *διαφορά φάσης* ϕ.

Γιά να εφαρόσουμε την αρχή της υπέρθεσης

$$y(x,t) = y_m\sin(kx-\omega t) + y_m\sin(kx-\omega t+\phi),$$

θα χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right].$$

Βρίσκουμε

$$y(x,t) = \left[2y_m\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\sin\left(kx-\omega t+\frac{\phi}{2}\right). \tag{19.4}$$

Το συνιστάμενο κύμα διαδίδεται στην ίδια διεύθυνση με τα αρχικά κύματα και το πλάτος του είναι $2y_m\cos(\phi/2)$. Το πλάτος μικραίνει όσο αυξάνεται το ϕ, ώστε τα κύματα φαίνεται να καταστρέφουν το ένα το άλλο.

Στην ειδική περίπτωση που $\phi = \pi$ έχουμε

$$y(x,t) = y_m\sin(kx-\omega t) + y_m\sin(kx-\omega t+\pi) = y_m\sin(kx-\omega t) - y_m\sin(kx-\omega t) = 0,$$

δηλαδή παίρνουμε πλήρως καταστρεπτική συμβολή των κυμάτων.

Παράδειγμα 19.1. ([3] κεφ. 18.1) Ας θεωρήσουμε ένα κύμα $y = y_0\sin(kx-\omega t)$ το οποίο σε κάποιο σημείο διακλαδίζεται σε δύο ίδια κύματα $y_{1,2} = (y_0/2)\sin(kx-\omega t)$. Το κάθε νέο κύμα ακολουθεί διαφορετικές διαδρομές με μήκη r_1 και r_2 αντίστοιχα και ακολούθως τα δύο κύματα συμβάλουν (δηλαδή ξαναενώνονται). Ας δούμε τι προκύπτει στη θέση που συμβάλλουν τα κύματα.

Λύση. Ας υποθέσουμε, γιά απλότητα, ότι η φάση $kx - \omega t$ του αρχικού κύματος ήταν μηδέν στη θέση της διακλάδωσης. Τότε, σε κάθε χρονική στιγμή t, στη θέση της συμβολής, η φάση του ενός κύματος θα είναι $\phi_1 = kr_1 - \omega t$ και του δευτέρου $\phi_2 = kr_2 - \omega t$.

Άν $\phi_2 - \phi_1 = 0$ το κύμα που προκύπτει από τη συμβολή $y_1 + y_2$ δεν θα έχει διαφορά από το αρχικό κύμα y. Το ίδιο ισχύει αν $\phi_2 - \phi_1 = 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Αν $\phi_2 - \phi_1 = \pi$, τότε έχουμε πλήρως καταστρεπτική συμβολή, δηλαδή $y_1 + y_2 = 0$ στο σημείο που συμβάλουν. Παρατηρήστε ότι αυτή είναι η περίπτωση που η διαφορά $r_2 - r_1$ είναι ίση με μισό μήκος κύματος. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο όταν $\phi_2 - \phi_1 = 2n\pi + \pi$. □

19.3. **Στάσιμα κύματα.** Ας δούμε τη συμβολή δύο κυμάτων

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= y_m \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) &= y_m \sin(kx + \omega t) \end{aligned} \tag{19.5}$$

τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις Από την αρχή της υπέρθεσης

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) = [2y_m \sin(kx)] \cos(\omega t). \tag{19.6}$$

Το αποτέλεσμα δεν περιγράφει οδεύον κύμα. Έχουμε ταλαντώσεις κάθε σημείου της χορδής με γωνιακή συχνότητα ω, ενώ το πλάτος ταλάντωσης είναι $2y_m \sin(kx)$ και είναι διαφορετικό σε κάθε θέση. Ειδικότερα, το πλάτος μηδενίζεται σε θέσεις

$$kx = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\lambda}{2}. \tag{19.7}$$

Ας θεωρήσουμε ότι στο άκρο μίας χορδής παράγεται κύμα το οποίο ταξιδεύει προς τα δεξιά. Όταν αυτό ανακλαστεί στο άλλο άκρο της χορδής (ας το θεωρήσουμε σταθερό) θα έχουμε συμβολή δύο κυμάτων στη χορδή: του αρχικού και του ανακλωμένου. Οι ανακλάσεις κυμάτων μπορεί να συνεχιστούν και στα δύο άκρα της χορδής, οπότε θα έχουμε συμβολή πολλών κυμάτων με συνολικό αποτέλεσμα μικρές ταλαντώσεις της χορδής.

Υπάρχουν περιπτώσεις που τα ανακλώμενα κύματα συμβάλουν θετικά και δημιουργούν μεγάλες ταλαντώσεις της χορδής. Ας υποθέσουμε ότι η χορδή είναι τεντωμένη μεταξύ δύο σταθερών σημείων. Μπορούμε να επιλέξουμε μήκος κύματος τέτοιο ώστε το δεξιά και το αριστερά οδεύον κύμα να σχηματίζουν στάσιμο κύμα με δεσμούς στα άκρα της χορδής. Αν L το μήκος της χορδής, επιλέγουμε μήκος κύματος

$$\lambda = 2L, \qquad k = \frac{\pi}{L}, \tag{19.8}$$

οπότε

$$y(x,t) = 2y_m \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t). \tag{19.9}$$

Παρατηρήστε ότι $y(0,t) = 0 = y(L,t)$. Άρα, η συμβολή γίνεται έτσι ώστε τα άκρα της χορδής να παραμένουν σταθερά (όπως επιβάλλεται από τις συνθήκες του προβλήματος) και επίσης προκύπτει ότι έχουμε μέγιστο πλάτος στο μέσο της χορδής $x = L/2$. Γενικεύουμε την παραπάνω συνθήκη μπορούμε να πάρουμε

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{19.10}$$

γιά τα οποία ισχύει ότι το δημιουργούμενο στάσιμο κύμα έχει μηδενικό πλάτος στα άκρα της χορδής. Η παραπάνω λέγεται *συνθήκη συντονισμού.*

Οι συχνότητες συντονισμού είναι

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{19.11}$$

Άρα γιά κάθε χορδή έχουμε συχνότητες συντονισμού οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια μίας βασικής συχνότητας. Αυτές αναφέρονται ώς 1η, 2η, 3η, κλπ αρμονική. Η 1η αρμονική αναφέρεται και ως *θεμελιώδης*.

Παράδειγμα 19.2. Οι χορδές κιθάρας παράγουν η κάθε μία την θεμελιώδη και όλες τις ανώτερες αρμονικές της. □

19.4. **Διακροτήματα.** ([3] κεφ. 18.7)

Θεωρούμε δύο κύματα ίδιου πλάτους με λίγο διαφορετικές συχνότητες. Η μετατόπιση που παράγουν σε κάποιο σημείο είναι

$$y_1 = y_m \cos(\omega_1 t), \qquad y_2 = y_m \cos(\omega_2 t). \tag{19.12}$$

Αν αυτά συμβάλουν, η αρχή της επαλληλίας δίνει

$$y = y_1 + y_2 = y_m \left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] = 2y_m \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]. \tag{19.13}$$

Ας γράψουμε τις νέες συχνότητες

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \qquad \omega' = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2), \tag{19.14}$$

ώστε έχουμε

$$y = \left[2y_m \cos(\omega' t)\right] \cos(\omega t). \tag{19.15}$$

Είναι ενδιαφέρουσα η περίπτωση που οι δύο αρχικές συχνότητες διαφέρουν λίγο: $\omega_1 \approx \omega_2$. Τότε $\omega' \ll \omega$ και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το y έχει συχνότητα ω και το πλάτος του είναι $A = 2y_m \cos(\omega' t)$, δηλαδή παρουσιάζει μία αργή διαμόρφωση στο χρόνο. (Δώστε ένα σχήμα διά διακρότημα αυτής της μορφής.)

19.5. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 19.1. ([3] ασκ 18.1) Δύο αρμονικά κύματα περιγράφονται ως

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= (5\,\mathrm{m})\, \sin[\pi(4x - 1200t)] \\ y_2(x,t) &= (5\,\mathrm{m})\, \sin\left[\pi\left(4x - 1200t - \frac{1}{4}\right)\right], \end{aligned}$$

όπου τα x, y_1, y_2 είναι σε m και το t σε sec. (α) Ποιό είναι το πλάτος του συνισταμένου κύματος; (β) Ποιά είναι η συχνότητά του;

Λύση. Το συνιστάμενο κύμα είναι (από την αρχή της υπέρθεσης)

$$y = y_1 + y_2 = 2 \times (5\,\mathrm{m})\, \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \sin\left[\pi\left(4x - 1200t + \frac{1}{8}\right)\right].$$

(α) Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι

$$A = 10 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\,\mathrm{m}.$$

(β) Η συχνότητα του συνισταμένου κύματος είναι (ίδια με των αρχικών κυμάτων)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1200\pi}{2\pi} = 600\,\mathrm{Hz}.$$

Άσκηση 19.2. ([3] ασκ 18.3) Αρμονικό κύμα έχει τη μορφή

$$y_1(x,t) = (8\,\mathrm{m})\, \sin[2\pi(0.1x - 80t)],$$

όπου τα x, y_1 είναι σε m και το t σε sec. Γράψτε την έκφραση γιά το κύμα $y_2(x,t)$ που έχει την ίδια συχνότητα, πλάτος και μήκος κύματος, και όταν προστεθεί στο y_1 προκύπτει συνιστάμενο κύμα με πλάτος $y_m = 8\sqrt{3}\,\mathrm{m}$.

Λύση. Έστω

$$y_2(x,t) = (8\,\mathrm{m})\,\sin[2\pi(0.1x - 80t) + \phi]$$

το οποίο έχει μία διαφορά φάσης ϕ από το y_1 αλλά έχει την ίδια συχνότητα, πλάτος και μήκος κύματος. Το συνιστάμενο κύμα θα είναι

$$y = y_1 + y_2 = 2 \times (8\,\mathrm{m})\,\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\,\sin\left[2\pi(0.1x - 80t) + \frac{\phi}{2}\right].$$

Άρα το πλάτος του συνισταμένου κύματος θα είναι

$$y_m = 2 \times (8\,\mathrm{m})\,\cos\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Έχουμε

$$8\sqrt{3} = 2 \times 8\,\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}.$$

Άσκηση 19.3. ([3] ασκ 18.27) Μία χορδή κιθάρας έχει μήκος $L = 60\,\mathrm{cm}$, γραμμική πυκνότητα μάζας $\mu = 0.1\,\mathrm{g/cm}$ και βρίσκεται υπό τάση $\tau = 50\,\mathrm{N}$. Ποιά είναι η υψηλότερη αρμονική που μπορεί να ακούσει ένας ακροατής ικανός να ακούει ήχους συχνοτήτων έως $f_{\max} = 20000\,\mathrm{Hz}$;

Λύση. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα οδευόντων κυμάτων στη χορδή:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{50\,\mathrm{N}}{0.01\,\mathrm{kg/m}}} = \sqrt{5000}\,\mathrm{m/sec} = 70.71, \mathrm{m/sec}.$$

Στη χορδή μπορούν να δημιουργηθούν στάσιμα κύματα τέτοια ώστε η εγκάρσια απομάκρυνσή τους να είναι μηδέν στα άκρα της χορδής. Η συνθήκη αυτή δίνει συχνότητες

$$f = nf_0, \qquad f_0 = \frac{2v}{L} = \frac{2 \times 70.71}{0.6}\,\mathrm{Hz} = 235.7\,\mathrm{Hz}.$$

Κάνωντας τη διαίρεση $20000/235.7 = 84.85$ βλέπουμε ότι η υψηλότερη αρμονική που μπορεί να ακούσει ο ακροατής έχει $n = 84$ και έχει συχνότητα

$$f = 84f_0 = 19799\,\mathrm{Hz}.$$

20. Ηχητικα κυματα

20.1. Ταχύτητα ηχητικών κυμάτων. Ένας όγκος αέρα ο οποίος έχει συμπιεστεί έχει μεγαλύτερη πυκνότητα και ακολούθως θα αποσυμπιεστεί μεταφέροντας την αυξημένη πυκνότητα και πίεση στους διπλανούς όγκους αέρα. Έτσι δημιουργείται ένα ηχητικό κύμα. Αυτό τελικά συνίσταται σε πυκνόματα και αραιώματα του αέρα.

Αν έχουμε μία μεταβολή της πίεσης ΔP αναμένουμε σχετική μεταβολή του όγκου V κατά $\Delta V/V$. Η δυνατότητα συμπίεσης ενός μέσου, όπως ο αέρας, δίνεται από το *μέτρο ελαστικότητας όγκου*, το οποίο είναι το πηλίκο

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}. \tag{20.1}$$

Περιμένουμε ότι γιά $\Delta P > 0$ θα είναι $\Delta V > 0$, οπότε ορίσαμε το B έτσι ώστε να είναι θετικό. Το B έχει μονάδες $\mathrm{N/m^2}$, όπως και η πίεση.

Η ταχύτητα διάδοσης κύματος εξαρτάται από την πυκνότητα μάζας του και από τις ελαστικές του ιδιότητες. Με διαστατική ανάλυση μπορούμε να βγάλουμε έναν τύπο γιά την ταχύτητα ηχητικού κύματος

$$v = \frac{\text{ελαστικές ιδιότητες}}{\text{πυκνότητα μάζας}}, \tag{20.2}$$

η οποία γιά τον αέρα γράφεται

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \tag{20.3}$$

Παράδειγμα 20.1. Υπολογίστε την ταχύτητα του ήχου στο νερό, το οποίο έχει μέτρο ελαστικότητας όγκου $B = 2.1 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}$ και πυκνότητα $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.
Λύση.

$$v_{\text{νερού}} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.1 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}}{10^3\,\mathrm{kg/m^3}}} = 1500\,\mathrm{m/sec}. \ \square$$

20.2. Ηχητικό κύμα και πίεση. Περιγράφουμε το κύμα με τη μετατόπιση κάθε στοιχείου όγκου από τη θέση ισορροπίας του

$$s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t). \tag{20.4}$$

Η μετατόπιση γίνεται κατά μήκος του άξονα x, δηλαδή στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Από τη μετατόπιση προκύπτει και μεταβολή της πίεσης στον αέρα. Η μεταβολή της πίεσης (από την τιμή της στο αδιατάρακτο σύστημα) είναι

$$\Delta P = \Delta P_m \sin(kx - \omega t). \tag{20.5}$$

Ας εξαγάγουμε αυτή τη σχέση. Γνωρίζουμε ότι

$$\Delta P = -B(\Delta V)/V.$$

Ας θεωρήσουμε στρώμα αέρα πάχους Δx και επιφάνειας διατομής A, άρα όγκου $V = A\Delta x$. Στο κύμα, τα σωμάτια του αέρα κινούνται και άρα η μεταβολή του πάχους του στρώματος είναι $\Delta s = s(x+\Delta x) - s(x)$, ώστε η μεταβολή του όγκου είναι $\Delta V = A\Delta s$. Οπότε είναι

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{A\Delta s}{A\Delta x} - B\frac{\Delta s}{\Delta x} \Rightarrow \Delta P = -B\frac{ds}{dx}. \tag{20.6}$$

Έχουμε

$$\Delta P = -B\,\frac{d}{dx}[s_m \cos(kx - \omega t)] = B s_m k \sin(kx - \omega t). \tag{20.7}$$

Χρησιμοποιώντας την $B = \rho v^2$ και τη σχέση $\omega = vk$, έχουμε

$$\Delta P = \rho v \omega s_m \sin(kx - \omega t) = \Delta P_m \sin(kx - \omega t) \tag{20.8}$$

όπου το πλάτος της πίεσης είναι

$$\Delta P_m = \rho v \omega s_m. \tag{20.9}$$

20.3. **Εύρεση της ταχύτητας ηχητικού κύματος.** (Halliday [1] σελ 562)

Έστω σωλήνας διατομής A γεμάτος με αέρα, ονομάζουμε x τη θέση και P την πυκνότητα του αέρα σε κάθε θέση. Ένα στοιχείο αέρα όγκου $\Delta V = A\Delta x$ κινείται με ταχύτητα v και ας υποθέσουμε ότι συναντά πριοχή μεγαλύτερης πίεσης $P + \Delta P$. Η δύναμη στην πίσω επιφάνεια είναι PA και στη μπροστά είναι αντίθετη και ίση με $(P + \Delta P)A$. Η συνολική δύναμη στο στοιχείο είναι

$$F = PA - (P + \Delta P)A = -\Delta P\, A.$$

Η μάζα του στοιχείου είναι

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x = \rho A v \Delta t.$$

Από νόμο Νεύτωνα

$$-\Delta P\, A = (\rho A v\, \Delta t)\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \rho v^2 = -\frac{\Delta P}{\Delta v / v}.$$

Παρατηρούμε ότι ο όγκος του αέρα είναι αρχικά $V = Av\Delta t$ και αυτός συμπιέζεται κατά $\Delta V = A\Delta v\, \Delta t$. Συνεπώς

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\Delta v\, \Delta t}{Av\, \Delta t} = \frac{\Delta v}{v}.$$

Παίρνουμε τελικά

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta P}{\Delta v / v} = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V} = B. \tag{20.10}$$

20.4. **Ενέργεια και ένταση ηχητικών κυμάτων.** Έχουμε δει (γιά τα εγκάρσια κύματα) ότι η μέση ολική ενέργεια του κύματος ισούται με τη μέγιστη κινητική ενέργεια. Γιά ένα στρώμα πάχους Δx, αυτή είναι

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m\, (\omega s_m)^2 = \frac{1}{2}(\rho A \Delta x)(\omega s_m)^2. \tag{20.11}$$

Ο ρυθμός διάδοσης της ενέργειας (η ισχύς) είναι

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho A \frac{\Delta x}{\Delta t}(\omega s_m)^2 = \frac{1}{2}\rho A v (\omega s_m)^2, \tag{20.12}$$

όπου v η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής.

Ορίζουμε ώς **ένταση** I του κύματος την ισχύ που μεταφέρεται ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Επομένως

$$I = \frac{\Delta E / \Delta t}{A} = \frac{1}{2}\rho v\, (\omega s_m)^2. \tag{20.13}$$

Μπορούμε να δούμε ότι

$$I = \frac{(\Delta P_m)^2}{2\rho v}. \tag{20.14}$$

Παράδειγμα 20.2. ([3] σελ. 32) Οι πιό ασθενείς ήχοι που μπορεί να ακούσει το ανθρώπινο αυτί στη συχνότητα $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ έχουν ένταση $I_{\min} = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ και οι πιό δυνατοί που ανέχεται είναι $I_{\max} = 1\,\mathrm{W/m^2}$. Υπολογίστε τα πλάτη πίεσης και μετατόπισης που αντιστοιχούν στα δύο αυτά όρια.

Λύση. Γνωρίζουμε γιά τον αέρα ότι $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$ και $v = 343\,\mathrm{m/sec}$. Έτσι βρίσκουμε γιά $I = I_{\min}$:

$$\Delta P_m = (2\rho v I_{\min})^{1/2} = \ldots = 2.87 \times 10^{-5}\,\mathrm{N/m^2}.$$

Αυτό είναι ένα εξαιρετικά μικρό κλάσμα της ατμοσφαιρικής πίεσης $P_{\mathrm{atm}} = 10^5\,\mathrm{N/m^2}$. Γιά την αντίστοιχη μετατόπιση έχουμε

$$s_m = \frac{\Delta P_m}{\rho\omega v} = \ldots = 1.11 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}, \tag{20.15}$$

ένα νούμερο μικρότερο από τη διάμετρο ενός μορίου.

Γιά $I = I_{\max}$ βρίσκουμε αντιστοίχως $\Delta P_m = 30\,\mathrm{N/m^2}$ και $s_m = 1.1 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}$. □

Ορίζουμε το *επίπεδο έντασης ήχου* με την κλίμακα

$$\beta \equiv 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right), \tag{20.16}$$

όπου I είναι η ένταση του ήχου και $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ έχει εκλεγεί ως μία βασική ένταση. Στο αποτέλεσμα δίνουμε το όνομα decibel: dB. Γιά παράδειγμα, αν $I = I_{\min} = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε επίπεδο ένταση ήχου $\beta = 0\,\mathrm{dB}$ και γιά $I = I_{\max} = 1\,\mathrm{W/m^2}$ έχουμε επίπεδο ένταση ήχου $\beta = 120\,\mathrm{dB}$. Η κλίμακα decibel, η οποία είναι λογαριθμική, αποδίδει καλύτερα το αίσθημα που προκαλεί ένας ήχος στο αυτί.

Παράδειγμα 20.3. Εάν μία ωτοασπίδα μειώνει το επίπεδο ήχου κατά 20 dB ποιός είναι ο λόγος της τελικής έντασης των κυμάτων I_f προς την αρχική τους ένταση I_i;
Λύση. Γιά τα αρχικά και τα τελικά κύματα έχουμε αντίστοιχα

$$\beta_i = (10\,\mathrm{dB}) \log \frac{I_i}{I_0}, \qquad \beta_f = (10\,\mathrm{dB}) \log \frac{I_f}{I_0}.$$

Η διαφορά στα επίπεδα ήχου είναι

$$\beta_f - \beta_i = (10\,\mathrm{dB}) \left(\log \frac{I_f}{I_0} - \log \frac{I_i}{I_0}\right) = (10\,\mathrm{dB})\, \log \left(\frac{I_f}{I_0}\frac{I_0}{I_i}\right) = (10\,\mathrm{dB})\, \log \frac{I_f}{I_i}.$$

Ώστε

$$\log \frac{I_f}{I_i} = \frac{\beta_f - \beta_i}{10\,\mathrm{dB}} = \frac{-20\,\mathrm{dB}}{10\,\mathrm{dB}} = -2.$$

Τελικά

$$\frac{I_f}{I_i} = 10^{-2} = 0.01. \ \square$$

20.5. **Στάσιμα κύματα σε αέριες στήλες.** ([1] κεφ. 17.7, [3] κεφ. 18.5)

Αν έχουμε μία στήλη (σωλήνα) αέρα μήκους L με κλειστά άκρα, τότε τα στάσιμα κύματα που μπορούν να δημιουργηθούν εντός του πρέπει να έχουν δεσμό μετατόπισης στα κλειστά άκρα, όπως ακριβώς είδαμε και στην περίπτωση στάσιμων κυμάτων σε χορδή με σταθερά άκρα.

Αν όμως τα άκρα της στήλης είναι ανοιχτά τότε αναμένουμε ότι το κύμα πίεσης θα έχει δεσμούς στα ανοικτά άκρα. Αυτό, διότι στην επαφή με την ατμόσφαιρα στα άκρα της στήλης το αέριο εκτονώνεται ώστε η πίεση εξοκοιώνεται με της ατμόσφαιρας, δηλαδή η μεταβολή της πίεσης $\Delta P_m = 0$. Γνωρίζουμε ότι το κύμα πίεσης έχει διαφορά φάσης 90^o με το κύμα μετατόπισης. Άρα, το κύμα μετατόπισης έχει αντιδεσμούς (δηλαδή, μέγιστη τιμή) στα ανοικτά άκρα της στήλης. Το μήκος κύματος ενός τέτοιου κύματος βρίσκεται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που είδαμε γιά την περίπτωση στάσιμων κυμάτων σε χορδή με σταθερά άκρα. Τα επιτρεπτά μήκη κύματος είναι

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{20.17}$$

και οι αντίστοιχες συχνότητες είναι

$$f = \frac{v}{2L}\, n, \tag{20.18}$$

όπου v η ταχύτητα του ήχου στον αέρα.

Οι παραπάνω λέγονται και *ιδιοσυχνότητες* της στήλης και αποτελούν αρμονική σειρά, δηλαδή είναι πολλαπλάσια μίας θεμελιώδους συχνότητας. Όταν προκαλείται κύμα στην στήλη μπορούν να διεγερθούν όλες οι ιδιοσυχνότητες ταυτόχρονα, γενικά όμως όχι με το ίδιο πλάτος.

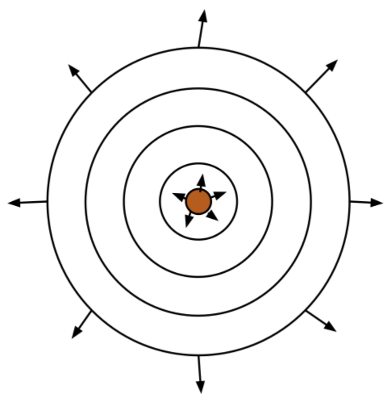
Παράδειγμα 20.4. ([3] σελ 62 παράδειγμα 18.4) Έχουμε σωλήνα μήκους $L = 1.23\,\mathrm{m}$. Υπολογίστε τις συχνότητες των τριών πρώτων αρμονικών, εάν τα δύο άκρα του σωλήνα είναι ανοικτά.
Λύση. Η πρώτη αρμονική συχνότητα (η θεμελιώδης) είναι

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{344\,\mathrm{m/sec}}{2 \times 1.23\,\mathrm{m}} = 140\,\mathrm{Hz}.$$

Οι δύο επόμενες αρμονικές είναι

$$f_2 = 2f_1 = 280\,\mathrm{Hz}, \qquad f_3 = 420\,\mathrm{Hz}.$$

20.6. **Σφαιρικά κύματα.** Ας υποθέσουμε ένα μικρό σφαιρικό σώμα το οποίο δρα ως πηγή ηχητικών κυμάτων. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί αν η επιφάνειά του παλλόταν περιοδικά.



Σχημα 12. Παλλόμενο μικρό σώμα δημιουργεί σφαιρικό κύμα. Τα μέτωπα του κύματος παριστάνονται με κύκλος (σφαίρες στον χώρο). Αυτά αντιστοιχούν στις επιφάνειες που έχουν την ίδια φάση.

Η ισχύς P που παράγει το παλλόμενο σώμα μεταφέρεται μέσω του κύματος. Τα σφαιρικά μέτωπα του κύματος έχουν επιφάνεια $A = 4\pi r^2$ η οποία μεγαλώνει όσο το μέτωπο απομακρύνεται από την πηγή σε απόσταση r. Η ένταση του κύματος είναι (ισχύς ανά επιφάνεια)

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}, \tag{20.19}$$

δηλαδή ελλατώνεται αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή. Θα θεωρήσουμε δεδομένη τη συνθήκης ότι η ενέργεια διατηρείται, δηλαδή η P είναι ίδια σε κάθε απόσταση από την πηγή. Γιά αποστάσεις r_1 και r_2 έχουμε $I_1 = P/(4\pi r_1^2)$, $I_2 = P/(4\pi r_2^2)$, οπότε

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους ταλάντωσης $I \sim s_m^2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, με την απομάκρυνση από την πηγή, το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται και μάλιστα πρέπει να είναι $s_m = s_0/r$, όπου s_0 κάποιο αρχικό πλάτος αναφοράς. Ώστε το σφαιρικό κύμα περιγράφεται από σχέση

$$s(r,t) = \frac{s_0}{r}\sin(kr - \omega t). \tag{20.20}$$

Παράδειγμα 20.5. ([3] σελ 35) Μία σημειακή πηγή με ισχύ εξόδου $P = 80\,\mathrm{W}$ εκπέμπει ηχητικά κύματα. (α) Υπολογίστε την ένταση σε απόσταση $d = 3\,\mathrm{m}$ από την πηγή. (β) Υπολογίστε την απόσταση όταν το επίπεδο έντασης ήχου έχει μειωθεί στα $\beta = 40\,\mathrm{dB}$.
Λύση. (α) Υποθέτουμε ότι η πηγή εκπέμπει σφαιρικά κύματα. Έχουμε ένταση ήχου

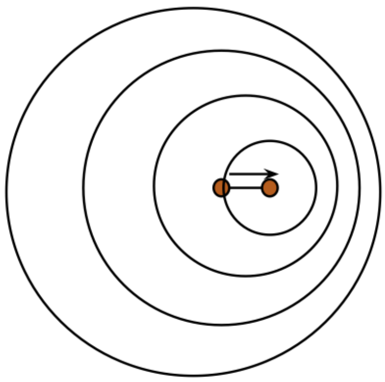
$$I = \frac{P}{4\pi d^2} = \frac{80\,\mathrm{W}}{4\pi(3\,\mathrm{m})^2} = 0.707\,\mathrm{W/m^2}.$$

(β) Από τη σχέση ορισμού της κλίμακας decibel βρίσκουμε την ένταση I που αντιστοιχεί σε $40\,\mathrm{dB}$ ($I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$):

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow 40 = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow I = 10^4\,I_0 = 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Η ένταση I επιτυγχάνεται σε απόσταση

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{80\,\mathrm{W}}{4\pi\times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2}}} = 2.52\times 10^4\,\mathrm{m}. \square$$



Σχημα 13. Το παλλόμενο μικρό σώμα κινείται με ταχύτητα v_s προς τα δεξιά και δημιουργεί διαδοχικά σφαιρικά κύματα τα κέντρα των οποίων μετατοπίζονται διαδοχικά προς τα δεξιά.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η σφαιρική πηγή κινείται με κάποια ταχύτητα v_s. Τότε τα μέτωπα που εκπέμπονται σε διαδοχικούς χρόνους έχουν τα κέντρα τους σε διαδοχικά σημεία τα οποία μετακινούνται προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι ο παρατηρητής που βρίσκεται δεξιά της πηγής παρατηρεί κύμα με μήκος κύματος μικρότερο αυτού του εκπεμπομένου κύματος. Αντίθετα, παρατηρητής που βρίσκεται αριστερά της πηγής παρατηρεί κύμα με μήκος κύματος μεγαλύτερο αυτού του εκπεμπομένου κύματος. Αυτό ονομάζεται *φαινόμενο Doppler*.

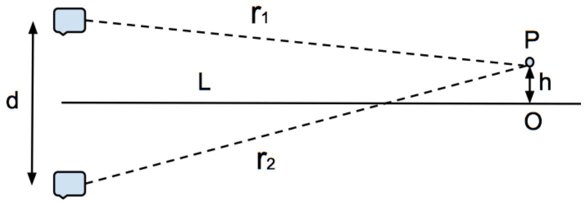
20.7. **Ασκήσεις.**

Άσκηση 20.1. ([3] ασκ 17.11) Ένα ηχητικό κύμα στον αέρα έχει πλάτος πίεσης ίσο με $\Delta P_m = 4\times 10^{-3}\,\mathrm{N/m^2}$. Υπολογίστε το πλάτος απομάκρυνσης του κύματος αν η συχνότητα είναι $f = 10\,\mathrm{kHz}$.
Λύση. Χρησιμοποιούμε την

$$\Delta P_m = \rho v\omega s_m \Rightarrow s_m = \frac{\Delta P_m}{\rho v\omega},$$

όπου $\omega = 2\pi f = 2\pi\times 10^4\,\mathrm{sec^{-1}}$.

Άσκηση 20.2. ([3] παράδειγμα 18.1, σελ. 53) Δύο μεγάφωνα σε απόσταση $d = 3\,\mathrm{m}$ μεταξύ τους είναι συνδεδεμένα με την ίδια πηγή ήχου. Ένας ακροατής βρίσκεται αρχικά σε σημείο O σε απόσταση $L = 8\,\mathrm{m}$ πάνω στη μεσοκάθετο του διαστήματος που ενώνει τα δύο μεγάφωνα. Μετά ο ακροατής μετακινείται παράλληλα προς την ευθεία που ενώνει τα δύο μεγάφωνα. Όταν μετακινηθεί κατά $h = 0.35\,\mathrm{m}$ ακούει το πρώτο ελάχιστο της έντασης του ήχου. Υπολογίστε τη συχνότητα f του παραγόμενου ήχου.



Λύση. Τα κύματα συμβάλουν με βάση την αρχή της επαλληλίας σε κάθε σημείο του χώρου. Τα δύο συμβάλοντα κύματα έχουν την ίδια συχνότητα και κυματάνυσμα αφού εκπέμπουν τον ίδιο ήχο. Η διαδρομές που ακολουθούν μέχρι να φθάσουν στο τελικό σημείο P είναι διαφορετικές, ειδικότερα, διανύουν διαφορετικές αποστάσεις r_1, r_2. Έχουμε

$$r_1 = \sqrt{L^2 + (d/2 - h)^2} = \sqrt{8^2 + 1.15^2}\,\mathrm{m} = 8.082\,\mathrm{m}$$
$$r_2 = \sqrt{L^2 + (d/2 + h)^2} = \sqrt{8^2 + 1.85^2}\,\mathrm{m} = 8.211\,\mathrm{m}.$$

Άρα $r_2 - r_1 = 0.129\,\mathrm{m}$. Αφού αυτή αντιστοιχεί στο πρώτο ελάχιστο έντασης ήχου θα πρέπει

$$r_2 - r_1 = \lambda/2 \Rightarrow \lambda = 0.258\,\mathrm{m}.$$

Βρίσκουμε τη συχνότητα, αν ξέρουμε την ταχύτητα του ήχου στον αέρα $v = 344\,\mathrm{m/sec}$, από την

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{344\,\mathrm{m/sec}}{0.258\,\mathrm{m}} = 1330\,\mathrm{Hz}.$$

Άσκηση 20.3. ([1] σελ 572 Πρόβλημα 17-4) Ένας ηλεκτρικός σπινθήρας περνά κατά μήκος μίας ευθείας γραμμής μήκους $L = 10\,\mathrm{m}$ και εκπέμπει ηχητικό παλμό. Θα θεωρήσουμε ότι αυτός διαδίδεται ακτινικά από τον σπινθήρα προς τα έξω. Η ισχύς της εκπομπής είναι $P_s = 1.6\times 10^4\,\mathrm{W}$. (α) Πόση είναι η ένταση ήχου σε μία απόσταση $r = 12\,\mathrm{m}$ από τον σπινθήρα; (β) Εάν έχουμε έναν ηχητικό ανιχνευτή σε απόσταση $r = 12\,\mathrm{m}$ από τον σπινθήρα και έχει επιφάνεια $A_d = 2\,\mathrm{cm}^2$ (προσανατολισμένη προς τον σπινθήρα), πόση ισχύ P_d θα δεχθεί αυτός;
Λύση. (α) Τα ηχητικά μέτωπα είναι κυλινδρικά και η επιφάνειά τους είναι $A = 2\pi r L$ σε απόσταση r από τον σπινθήρα. Η ένταση στην κυλινδρική επιφάνεια είναι

$$I = \frac{P_s}{A} = \frac{P_s}{2\pi r L} = \frac{1.6\times 10^4\,\mathrm{W}}{2\pi(12\,\mathrm{m})(10\,\mathrm{m})} = 21.2\,\mathrm{W/m}^2.$$

(β)

$$I = \frac{P_d}{A_d} \Rightarrow P_d = I A_d = (21.2\,\mathrm{W/m}^2)(2\times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2) = 4.2\,\mathrm{mW}.$$

Άσκηση 20.4. ([3] σελ. 32) Οι πιό ασθενείς ήχοι που μπορεί να ακούσει το ανθρώπινο αυτί στη συχνότητα $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ έχουν ένταση $I_{\min} = 10^{-12}\,\mathrm{W/m}^2$ και οι πιό δυνατοί που ανέχεται είναι $I_{\max} = 1\,\mathrm{W/m}^2$. Υπολογίστε τα πλάτη πίεσης και μετατόπισης που αντιστοιχούν στα δύο αυτά όρια. [Γνωρίζουμε την ταχύτητα του ήχου στον αέρα $v = 343\,\mathrm{m/sec}$.]
Λύση. Γνωρίζουμε γιά τον αέρα ότι $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m}^3$ και $v = 343\,\mathrm{m/sec}$. Έτσι βρίσκουμε γιά $I = I_{\min}$:

$$\Delta P_m = (2\rho v I_{\min})^{1/2} = \ldots = 2.87\times 10^{-5}\,\mathrm{N/m}^2.$$

Αυτό είναι ένα εξαιρετικά μικρό κλάσμα της ατμοσφαιρικής πίεσης $P_{\mathrm{atm}} = 10^5\,\mathrm{N/m^2}$. Γιά την αντίστοιχη μετατόπιση έχουμε

$$s_m = \frac{\Delta P_m}{\rho\omega v} = \ldots = 1.11 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}, \tag{20.21}$$

ένα νούμερο μικρότερο από τη διάμετρο ενός μορίου.

Γιά $I = I_{\max}$ βρίσκουμε αντιστοίχως $\Delta P_m = 30\,\mathrm{N/m^2}$ και $s_m = 1.1 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}$.

Άσκηση 20.5. ([3] ασκ 18.34) Ηχητικός σωλήνας ανοικτός και στα δύο άκρα έχει θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 300\,\mathrm{Hz}$ όταν η ταχύτητα του ήχου είναι $v = 333\,\mathrm{m/sec}$. (α) Ποιό είναι το μήκος του σωλήνα; (β) Ποιά είναι η συχνότητα της δεύτερης αρμονικής όταν η θερμοκρασία του αέρα αυξηθεί ώστε η ταχύτητα του ήχου να είναι $344\,\mathrm{m/sec}$;

Λύση. Υπόδειξη: Οι παραγόμενες αρμονικές δίνονται από την

$$f = \frac{v}{2L}n.$$

21. ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

21.1. **Εισαγωγή.** Η θερμοδυναμική μελετά τη ροή της θερμότητας *μακροσκοπικά*. Γιά να έχουμε μία *μικροσκοπική* περιγραφή θα χρειαζόμασταν να γνωρίζουμε την κίνηση κάθε μορίου του υλικού (π.χ., αερίου). Από την άλλη πλευρά, μία μακροσκοπική έννοια, όπως η θερμοκρασία δίνει τη *μέση* κινητική ενέργεια των μορίων του αέρα.

21.2. **Θερμοκρασία.** Γνωρίζουμε ότι άλλα αντικείμενα είναι θερμά και άλλα πιό κρύα. Επίσης, εάν φέρουμε σε επαφή δύο αντικείμενα τότε το πιό θερμό θα κρυώσει και το πιό κρύα θα θερμανθεί. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ροή ενέργειας από το ένα υλικά προς το άλλο.

Παρατήρηση 34. *Θα λέμε ότι δύο αντικείμενα βρίσκονται σε θερμική επαφή όταν μπορούν να ανταλλάσουν ενέργεια χωρίς να παράγεται μακροσκοπικό έργο.*

Θα λέμε ότι έχουμε *θερμική ισορροπία* όταν δύο σώματα σε θερμική επαφή έχουν πάψει να ανταλλάσσουν ενέργεια.

Έστω δύο σώματα A και B και ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα τρίτο σώμα C το οποίο είναι πολύ μικρότερο από αυτά και θα χρησιμοποιηθεί ως θερμόμετρο. Αν φέρουμε σε θερμική επαφή το C με το A τότε, όταν επέλθει θερμική ισορροπία, το C θα δείχνει κάποια ένδειξη θερμοκρασίας. Φέρνοντας το C σε επαφή με το B παίρνουμε μία άλλη ένδειξη. Ο μηδενικός νόμος της θερμοδυναμικής αναφέρεται στην περίπτωση που οι δύο ενδείξεις είναι ίδιες.

Παρατήρηση 35. Μηδενικός νόμος της θερμοδυναμικής: *Εάν αντικείμενο A βρίσκεται σε θερμική ισσοροπία με αντικείμενο C και επίσης ένα αντικείμενο B βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το C, τότε τα A και B βρίσκονται σε θερμική ισορροπία μεταξύ τους.*

Με βάση αυτόν τον νόμο μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της θερμοκρασίας. Αν δύο αντικείμενα είναι σε θερμική ισορροπία τότε λέμε ότι έχουν την ίδια θερμοκρασία.

Ένα θερμόμετρο μπορεί να είναι ένα μικρό αντικείμενο στο οποίο η θερμοκρασία επηρρεάζει κάποια άλλη ιδιότητά του. Π.χ., μία στήλη υγρού του οποίου ο όγκος αυξάνεται με τη θερμοκρασία. Στα θερμόμετρα υδραργύρου ο όγκος του υγρού αυξάνεται γραμμικά με τη θερμοκρασία. Πάντως ο υδράργυρος στερεοποιείται στους -39^oC οπότε δεν μπορούμε να μετρήσουμε με αυτή τη μέθοδο θερμοκρασίες χαμηλότερες από -39^oC.

Ορίζουμε την θερμοκρασία στην *κλίμακα Κελσίου* θέτοντας $T = 0^oC$ στο σημείο τήξεως του πάγου και $T = 100^oC$ στο σημείο βρασμού του νερού.

21.3. **Θερμόμετρα αερίου.** Θεωρούμε ένα αέριο περιορισμένο σε έναν σταθερό όγκο. Όταν το αέριο θερμαίνεται μεταβάλλεται η πίεσή του. Κάθε κατάσταση στην οποία βρίσκεται το αέριο την χαρακτηρίζουμε με ένα μέγεθος το οποίο λέμε *θερμοκρασία*. Θα ορίσουμε την θερμοκρασία T συναρτήσει της πίεσης P. Υποθέτουμε ότι η πίεση και η θερμοκρασία συνδέονται με τη γραμμική σχέση

$$T = aP + b, \tag{21.1}$$

όπου a, b είναι σταθερές.

Χρησιμοποιώντας διάφορα αέρια μετράμε με τον παραπάνω τύπο ίδιες θερμοκρασίες, εφόσον η πίεση του αερίου είναι χαμηλή. Αυτό υποδεικνύει ότι όλα τα θερμόμετρα δίνουν την ίδια σταθερά b. Δεν μπορούμε να μετρήσουμε άμεσα την b, διότι γιά πολύ μικρά T τα αέρια στερεοποιούνται (και δεν ισχύει η παραπάνω σχέση). Όμως παίρνουμε μετρήσεις και βάζουμε σημεία στην ευθεία σε ένα διάγραμμα $T - P$, ακολούθως προεκτείνουμε την ευθεία και τέμνει τον άξονα P στη θερμοκρασία $T = -273.15^oC$.

Μπορούμε να μεταβάλουμε την κλίμακα Κελσίου και να ορίσουμε νέα κλίμακα στην οποία το μηδέν βρίσκεται στην ελάχιστη θερμοκρασία και ο ένας βαθμός ισούται με το 1/273.16 της θερμοκρασίας του τριπλού σημείου του νερού (περίπου η θερμοκρασία τήξη του πάγου). Το νερό συνυπάρχει σε υγρή στερεή και άερια μορφή σε αυτή την κατάσταση και αυτό συμβαίνει γιά μία μόνο δυάδα τιμών θερμοκρασίας και πίεσης. Η κλίμακα αυτή ονομάζεται *κλίμακα Kelvin* και το ένα Kelvin ισούται με τον ένα βαθμό Κελσίου.

21.4. **Θερμοκρασία και θερμότητα.** Η θερμοκρασία ενός υλικού (στερεού, υγρού ή αερίου) μεταβάλλεται διότι υπάρχει μεταφορά ενέργειας από ή προς το υλικό. Αυτή είναι θερμική ενέργεια και ονομάζεται *θερμότητα*.

Παρατήρηση 36. *Θερμότητα είναι η ενέργεια που μεταφέρεται μεταξύ ενός συστήματος και του περιβάλλοντος εξαιτίας διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ τους.*

Γιά παράδειγμα, χρειαζόμαστε μία ποσότητα ενέργειας γιά να αυξήσουμε τη θερμοκρασία. π.χ., ενός γραμμαρίου νερού κατά ένα βαθμό, π.χ., από 14.5^oC σε 15.5^oC. Αυτή η ποσότητα θερμότητας ορίζεται ως μία θερμίδα (cal).

Θερμοχωρητικότητα. Έστω στερεό η υγρό το οποίο απορροφά θερμότητα Q κατά τη μεταβολή της θερμοκρασίας του από T_i σε T_f. Ισχύει

$$Q = C(T_f - T_i) = C\Delta T, \tag{21.2}$$

όπου η σταθερά C λέγεται θερμοχωτητικότητα.

Ειδική θερμότητα. Είναι λογικό ότι η θερμοχωρητικότητα θα εξαρτάται από την ποσότητα μάζας που θερμαίνεται. Ορίζουμε την ειδική θερμότητα c από την

$$Q = m\, c\Delta T, \tag{21.3}$$

ώστε αυτή είναι ανεξάρτητη από την μάζα m. Είναι

$$c = \frac{C}{m}. \tag{21.4}$$

Παράδειγμα 21.1. ([1] σελ 613 Πρόβλημα 18-3) Πόση θερμότητα πρέπει να απορροφήσει πάγος μάζας $m = 720\,\mathrm{gr}$ στους -10^oC γιά να φθάσει στους 0^oC;
Λύση. Η θερμότητα που απορροφάται είναι

$$Q = c_{\mathrm{ice}} m(T_f - T_i),$$

όπου $T_f = 0$, $T_i = -10$ και $c_{\mathrm{ice}} = 2220\,\mathrm{J/(kg \cdot K)}$ η ειδική θερμότητα του πάγου. Έχουμε

$$Q = (2220\,\mathrm{J/(Kg \cdot K)})\,(0.720\,\mathrm{kg})[0^o\mathrm{C} - (-10^o\,\mathrm{C})] = 15984\,\mathrm{J}. \ \square$$

21.5. **Θερμότητα και έργο.** ([1] σελ 614-616 κεφ 18-9)

Θεωρούμε έναν όγκο αερίου περιορισμένο σε δοχείο το οποίο πιέζεται από επάνω από ένα έμβολο επιφάνειας A. Αν θεωρήσουμε ότι το αέριο πιέζει το έμβολο με πίεση p, τότε του ασκεί δύναμη $F = pA$. Αν το έμβολο μετακινηθεί κατά στοιχειώδες διάστημα ds τότε το αέριο έχει παραγάγει έργο

$$dW = Fds = (pA)ds = p(Ads) = p\,dV, \tag{21.5}$$

όπου dV είναι η μεταβολή του όγκου του αερίου. Γιά μεταβολή όγκου από V_i σε V_f έχουμε συνολικό έργο

$$W = \int_{V_i}^{V_f} dW = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV. \tag{21.6}$$

Μπορούμε να παραστήσουμε σε ένα διάγραμμα $P - V$ την κατάσταση του αερίου και επίσης τη διαδρομή που ακολουθεί το αέριο από μία αρχική σε μία τελική κατάσταση. Το εμβαδό κάτω από την καμπύλη που οδηγεί από την αρχική στην τελική κατάσταση $\int_{V_i}^{V_f} p\,dV$ είναι ίσο με το έργο W που παράγει το άεριο.

21.6. **Πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής.** Μπορούμε να φανταστούμε διάφορους τρόπους γιά να μετακινηθεί το έμβολο. Αυτό θα συμβεί, γιά παράδειγμα, αν μεταβληθεί το βάρος του. Επίσης, αν θερμάνουμε το αέριο στο δοχείο οπότε αυξάνει η πίεσή του. Κάθε διαδικασία που θα διαλέξουμε έχει σαν συνέπεια την παραγωγή διαφορετικής ποσότητας έργου W. Επίσης, η θερμότητα Q που θα χρησιμοποιήσουμε είναι διαφορετική γιά κάθε διαδικασία.

Πειραματικά διαπιστώνουμε ότι γιά την μετάβαση από μία συγκεκριμένη κατάσταση σε άλλη επίσης συγκεκριμένη, η ποσότητα $W-Q$ είναι δεδομένη ανεξαρτήτως διαδρομής που ακολουθήθηκε (δηλαδή, ανεξαρτήτως διαδικασίας). Αυτό μπορεί να συμβαίνει αν αυτή η ποσότητα αντιπροσωπεύει κάποια εσωτερική ενέργεια του συστήματος. Αυτήν την ονομάζουμε E_{int} και γράφουμε

$$\Delta E_{\mathrm{int}} = E_{\mathrm{int,f}} - E_{\mathrm{int,i}} = Q - W. \tag{21.7}$$

Αυτός είναι ο *πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής*. Γιά μία διαφορική μεταβολή αυτός διατυπώνεται ως

$$dE_{\mathrm{int}} = dQ - dW. \tag{21.8}$$

Παρατήρηση 37. *Η εσωτερική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται αν προστίθεται θερμότητα στο σύστημα και μειώνεται (χάνεται) αν παράγεται έργο από το σύστημα.*

Ας δούμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις του πρώτου νόμου.

Αδιαβατικές μεταβολές. Αν μία διαδικασία συμβαίνει γρήγορα τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας. Άρα ισχύει

$$\Delta E_{\mathrm{int}} = W. \tag{21.9}$$

Ισόχωρες μεταβολές. Αν ο όγκος του συστήματος διατηρείται σταθερός σε μία διαδικασία τότε δεν υπάρχει παραγωγή έργου. Άρα ισχύει

$$\Delta E_{\mathrm{int}} = Q. \tag{21.10}$$

Παράδειγμα 21.2. ([1] σελ 620 Πρόβλημα 18-5) Έστω ότι $1\,\mathrm{kg}$ υγρού νερού σε 100^oC βρίσκεται μέσα σε δοχείο το οποίο περιορίζεται από πάνω με έμβολο. Το νερό μετατρέπεται με βρασμό σε ατμό πάλι σε 100^oC κάτω από ατμοσφαιρική πίεση $P_{\mathrm{atm}} = 1.01\times10^5\,\mathrm{Pa}$. Ο όγκος του νερό μεταβάλεται από $V_i = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ σε υγρό $V_f = 1.671\,\mathrm{m}^3$ σε αέριο. (α) Πόσο έργο παράγεται από το σύστημα στη διάρκεια της διαδικασίας; (β) Πόση ενέργεια μεταφέρεται σαν θερμότητα στη διάρκεια της διαδικασίας; (γ) Πόση είναι η μεταβολή στην εσωτερική ενέργεια του συστήματος;
Λύση. (α) Η πίεση είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της διαδικασίας $p = P_{\mathrm{atm}}$. Γνωρίζουμε ότι η μονάδα πίεσης είναι $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m}^2$. Ώστε

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_i}^{V_f} P_{\mathrm{atm}}\,dV = P_{\mathrm{atm}}\int_{V_i}^{V_f} dV = P_{\mathrm{atm}}(V_f - V_i) \\ &= (1.01\times10^5\,\mathrm{Pa})(1.671\,\mathrm{m}^3 - 10^{-3}\,\mathrm{m}^3) = 1.69\times10^5\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

(β) Η θερμότητα προκαλεί μόνο μεταβολή φάσης και όχι μεταβολή θερμοκρασίας. Είναι

$$Q = L_V m = (2256\,\mathrm{kJ/kg})(1.00\,\mathrm{kg}) = 2256\,\mathrm{kJ}.$$

(γ) Έχουμε μεταβολή στην εσωτερική ενέργεια λόγω απορρόφησης θερμότητας και λόγω παραγωγής έργου. Από τον πρώτο νόμο της Θερμοδυναμικής έχουμε

$$\Delta E_{\mathrm{int}} = Q - W = 2256\,\mathrm{kJ} - 169\,\mathrm{kJ} = 2087\,\mathrm{kJ}.$$

Η ποσότητα αυτή είναι θετική πράγμα που σημαίνει ότι η εσωτερική ενέργεια του συστήματος αυξήθηκε κατά τη διάρκεια της διαδικασίας.

Αναφορες

[1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, "Φυσική", Εκδόσεις Δαρδάνος.
[2] R.A. Serway, "Φυσική", "Τόμος I, Μηχανική".
[3] R.A. Serway, "Φυσική", "Τόμος III, Θερμοδυναμική, Κυματική, Οπτική".
[4] Young H., Freedman R., "Πανεπιστημιακή φυσική με σύγχρονη φυσική", Εκδόσεις Παπαζήση
[5] Δ. Καραμπουρνιώτης, "Σημειώσεις Φυσικής", Ηράκλειο.
[6] N. Κυλαφής, "Σημειώσεις Μηχανικής", Ηράκλειο, 2013