6. Φυσικη Ι [ΕΜΦ101]: Φυλλαδιο ασκησεων 6

[Δεν θα παραδοθεί]

Άσκηση 6.1. (Κυλάφης σελ. 15 παράδειγμα 1.2) Μάζα m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δύναμης

$$F = F_0 \frac{t^2}{t_0^2},$$

όπου F_0, t_0 σταθερές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα βρίσκεται στη θέση $x = x_0$ και έχει ταχύτητα $v = v_0$. Να βρεθεί η ταχύτητα και θέση της σαν συνάρτηση του χρόνου.
Λύση. Γιά την ταχύτητα ισχύει η εξίσωση

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 \frac{t^2}{t_0^2}.$$

Βρίσκουμε την ταχύτητα ως εξής

$$\int dv = \frac{F_0}{m}\int \frac{t^2}{t_0^2}\,dt \Rightarrow v(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2} + c_1.$$

Γιά να έχουμε $v(t=0) = v_0$ θέτουμε $c_1 = v_0$, ώστε τελικά

$$v(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2} + v_0.$$

Γιά τη θέση έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\frac{t^3}{3t_0^2} + v_0 \Rightarrow dx = \frac{F_0}{m}\int \frac{t^3}{3t_0^2}\,dt + \int v_0\,dt \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^4}{12t_0^2} + v_0\,t + c_2.$$

Παρατηρούμε ότι $x(t=0) = c_1$, ώστε θέτουμε $c_1 = v_0$ και έχουμε τελικά

$$x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{t^4}{12t_0^2} + v_0\,t + x_0. \ \square$$

Άσκηση 6.2. (Κυλάφης σελ. 20 ασκ 1.1) Μάζα m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δύναμης

$$F = F_0 e^{-t/t_0},$$

όπου F_0, t_0 θετικές σταθερές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα βρίσκεται στη θέση x_0 και έχει ταχύτητα v_0. Να βρεθεί η θέση και η ταχύτητά της ως συνάρτηση του χρόνου.
Λύση.

$$v(t) = \frac{F_0 t_0}{m}\left(1 - e^{-t/t_0}\right).$$

$$x(t) = -\frac{F_0 t_0^2}{m}\left(1 - e^{-t/t_0}\right) + \left(v_0 + \frac{F_0 t_0}{m}\right) t + x_0.$$

Άσκηση 6.3. (Κυλάφης ασκ 3.3) Έστω το πεδίο δυνάμεων

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{Mm}{r^2}\,\hat{r},$$

το οποίο περιγράφει την έλξη μεταξύ δύο μαζών, π.χ., του ήλιου με μάζα M και της Γης με μάζα m. Το G είναι η σταθερά της βαρύτητας και r είναι η απόσταση μεταξύ των μαζών. Η δύναμη έχει τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{r} = \vec{r}/r$ και το μείον πρόσημο σημαίνει ότι η φορά της δύναμης είναι από τη μία μάζα προς την άλλη (δηλαδή η δύναμη είναι ελκτική). Βρείτε τη δυναμική ενέργεια η οποία δίνει αυτή την δύναμη.
Λύση. Σε πολικές συντεταγμένες

$$F = -\frac{dU}{dr} \Rightarrow U(r) = -\int F(r)dr$$

άρα

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}.$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα από τη σχέση

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\,\hat{r}.$$

Άσκηση 6.4. (Serway III ασκ 18.34) Ηχητικός σωλήνας ανοικτός και στα δύο άκρα έχει θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 300\,\mathrm{Hz}$ όταν η ταχύτητα του ήχου είναι $v = 333\,\mathrm{m/sec}$. (α) Ποιό είναι το μήκος του σωλήνα; (β) Ποιά είναι η συχνότητα της δεύτερης αρμονικής όταν η θερμοκρασία του αέρα αυξηθεί ώστε η ταχύτητα του ήχου να είναι $344\,\mathrm{m/sec}$;
Λύση. Υπόδειξη: Οι παραγόμενες αρμονικές δίνονται από την

$$f = \frac{v}{2L}n.$$
