

3. Φυλλάδιο ασκήσεων ΙΙΙ

[Παράδοση μέχρι Πέμπτη 20/12/2012]

3.1. **Άσκηση.** Θεωρήστε δύο δίνες με ισχύες $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0$ και $|\Gamma_1| \neq |\Gamma_2|$. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. (β) Βρείτε αναλυτικά την τροχιά τους (χρησιμοποιήστε τις διατηρήσιμες ποσότητες).

Υπόδειξη:

(β) Γιά τη δίνη Γ_1 έχουμε κυκλική τροχιά:

$$(x_1 - R_x)^2 + (y_1 - R_y)^2 = A_1^2.$$

όπου

$$R_x = \frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad R_y = \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad A_1 = \frac{\Gamma_2 \ell_0}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

και ℓ_0 η σταθερή απόσταση μεταξύ των δινών.

Γιά τη δίνη Γ_2 έχουμε:

$$(x_2 - R_x)^2 + (y_2 - R_y)^2 = A_2^2.$$

όπου

$$A_2 = \frac{\Gamma_1 \ell_0}{\Gamma_1 + \Gamma_2}.$$

3.2. **Άσκηση.** Έστω σώμα μάζας m το οποίο κινείται σε κύκλο ακτίνας a .

(α) Θεωρήστε ότι στο σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις και (i) γράψτε την Λαγκρανζιανή, (ii) γράψτε την εξίσωση κίνησης και (iii) βρείτε μία διατηρήσιμη ποσότητα της κίνησης.

(β) Θεωρήστε τώρα ότι το ίδιο σώμα δέχεται δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητάς του $\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v}$. Γράψτε την εξίσωση κίνησής του.

Υπόδειξη: (πρόκειται γιά μία απλούστερη μορφή παραδείγματος που λύσαμε στο μάθημα.)

Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2.$$

Εξ. κίνησης

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \Rightarrow \frac{d}{dt} (m a^2 \dot{\theta}) = -\lambda a^2 \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\lambda}{a} \dot{\theta} = 0.$$

Η εξίσωση κίνησης μπορεί να ολοκληρωθεί ως

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\theta} + \frac{\lambda}{a} \theta \right) = 0 \Rightarrow \dot{\theta} + \frac{\lambda}{a} \theta = \text{const.}$$