

2. Φυλλάδιο ασκήσεων II

[Παράδοση μέχρι Δευτέρα 3 Δεκεμβρίου 2012]

2.1. **Άσκηση.** Θεωρήστε το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \quad \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2.$$

Κληρώστε 4 αριθμούς από το -10 έως το 10 και θεωρήστε ότι οι αριθμοί που κληρώθηκαν δίνουν τις τιμές των a, b, c, d . Βρείτε το είδος και την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για το γραμμικό σύστημα που κληρώσατε. Σχεδιάστε, με μολύβι, με όσο καλύτερη ακρίβεια μπορείτε το διάγραμμα φάσεων (δείξτε με σαφήνεια τον ασταθή και ευσταθή υπόχωρο).

2.2. **Άσκηση.** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων για τον αναρμονικό ταλαντωτή

$$\ddot{x} = -x + \epsilon x^3, \quad \epsilon > 0.$$

Επίσης, αφού κάνετε γραμμικοποίηση γύρω από ένα από τα ασταθή σημεία ισορροπίας σχεδιάστε τον ευσταθή και ασταθή υπόχωρο του γραμμικού συστήματος. (Κάνετε όλα τα σχέδια με υπολογιστή, παραθέστε τον κώδικα. Χρησιμοποιήστε μία τιμή για το ϵ της επιλογής σας.)

2.3. **Άσκηση.** Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς x, y, z των υγείων, αρρώστων και άνοσων ατόμων αντίστοιχα, κατά τη διάρκεια μιας επιδημίας:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\beta xy + \mu \\ \dot{y} &= \beta xy - \gamma y \\ \dot{z} &= \gamma y - \mu \end{aligned}$$

όπου β, γ, μ είναι θετικές σταθερές.

(α) Βρείτε το σημείο ισορροπίας του συστήματος. Επίσης, δείξτε ότι ο συνολικός πληθυσμός $x + y + z$ παραμένει σταθερός.

(β) Βρείτε το είδος και την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας: εξετάστε δύο σεντ τιμών των β, γ, μ για τα οποία το σημείο ισορροπίας είναι διαφορετικού είδους. (Περιοριστείτε στο επίπεδο (x, y))

(γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για ένα σεντ τιμών των β, γ, μ της επιλογής σας. (Σχεδιάστε στον υπολογιστή τουλάχιστον τρεις φασικές καμπύλες. Παραθέστε τον κώδικα.)

2.4. **Άσκηση.** Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς x_1, x_2 δύο ειδών τα οποία ανταγωνίζονται για το ίδιο είδος τροφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - ax_2) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_2(1 - x_2 - bx_1) \end{aligned}$$

όπου για τις σταθερές ισχύει $a, b, \rho > 0$.

(α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (μελετήστε όλες τις δυνατές τιμές των παραμέτρων, αλλά υποθέστε $a \neq 1, b \neq 1$).

(β) Σχεδιάστε στον υπολογιστή μία λύση του συστήματος, για ένα σεντ τιμών των παραμέτρων.

2.5. **Άσκηση.** Θεωρούμε το δυναμικό Lennard-Jones το οποίο περιγράφει χημικούς δεσμούς μεταξύ δύο ατόμων:

$$V(r) = D \left(\frac{R}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R}{r} \right)^6,$$

όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των ατόμων τα οποία συμμετέχουν στο χημικό δεσμό και D, R είναι θετικές σταθερές. (α) Σχεδιάστε το δυναμικό με υπολογιστή. (β) Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης για μικρές αποκλίσεις από το ελάχιστο του δυναμικού. (γ) Βρείτε την περίοδο ταλάντωσης ως συνάρτηση της ενέργειας. (Παραθέστε τους κώδικες που χρησιμοποιήσατε.)