1. Φυλλάδιο ασκήσεων Ι

[Παράδοση μέχρι Δευτέρα 22 Οκτωβρίου 2012]

1.1. **Άσκηση.** Θεωρούμε ένα μοντέλο τύπου Lotka-Volterra στο οποίο εισάγουμε την λογιστική α-νάπτυξη, οπότε μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12}\frac{N_2}{K_1}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21}\frac{N_1}{K_2}\right).$$

Ορίστε κανονικές μεταβλητές γιά τους πληθυσμούς N_1, N_2 και γιά τον χρόνο t και γράψτε την εξίσωση στις νέες μεταβλητές.

1.2. **Άσκηση.** Έστω ότι σε ένα πανεπιστήμιο δραστηριοποιείται η φοιτητική παράταξη Α. Ένα ποσοστό (έστω r) των οπαδών της δραστηριοποιείται έντονα και πείθουν ο καθένας ένα νέο φοιτητή κάθε χρόνο να ενταχθεί στην παράταξη. Επίσης λαμβάνουμε υπόψιν ότι ένα ποσοστό (έστω s) των οπαδών αποφοιτά κάθε χρόνο.
(α) Γράψτε ένα μοντέλο γιά τον αριθμό των οπαδών της παράταξης σαν συνάρτηση του χρόνου.

Ακολούθως, θεωρούμε ότι από τον συνολικό αριθμό των φοιτητών του πανεπιστημίου Φ μόνο ένα ποσοστό (έστω p) είναι δυνατόν να πεισθεί από την παράταξη Α ενώ οι υπόλοιποι είναι εξαιρετικά δύσκολο να γίνουν οπαδοί της (γιά ιδεολογικούς και άλλους λόγους).
(β) Γράψτε ένα νέο μοντέλο γιά τον αριθμό των οπαδών της παράταξης εισάγοντας τη λογιστική ανάπτυξη (logistic growth) ώστε να λάβετε υπόψιν την παραπάνω παρατήρηση (θεωρήστε $r > s$).
(γ) Ορίστε αδιάστατες (κανονικές) μεταβλητές και γράψτε την κανονική μορφή της εξίσωσης (του (β)) στις νέες μεταβλητές.

1.3. **Άσκηση.** Η *μαγνητική ροπή* ενός ατόμου δίνεται από διάνυσμα $\boldsymbol{M}$. Εάν το άτομο βρεθεί σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ τότε ισχύει η εξίσωση κίνησης

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \gamma\, \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B}$$

όπου γ είναι μία σταθερά (γυρομαγνητικός λόγος). (α) Δείξτε ότι το $\boldsymbol{M}$ έχει σταθερό μέτρο (έστω M_s), δηλ., $\boldsymbol{M}^2 = M_s^2$. (β) Γράψτε την εξίσωση σε αδιάστατη μορφή (Υποθέστε ότι το $\boldsymbol{B}$ έχει ίδιες μονάδες με το $\boldsymbol{M}$). (γ) Δώστε τη γενική της λύση στις αδιάστατες μεταβλητές (θεωρήστε $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$). (δ) Μετατρέψτε τη λύση στις αρχικές (φυσικές) μεταβλητές.

1.4. **Άσκηση.** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και σχεδιάστε (με υπολογιστή) το διάγραμμα φάσεων για τον αναρμονικό ταλαντωτή

$$\ddot{x} = -x + \epsilon x^3, \qquad \epsilon > 0.$$

(Γιά τη σχεδίαση του διαγράμματος φάσεων χρησιμοποιήστε ένα συγκεκριμένο ϵ της επιλογής σας.)

1.5. **Άσκηση.** Μελετήστε το μοντέλο Lotka-Volterra κάνοντας τα ακόλουθα. (α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας γιά a, b, c, d της επιλογής σας. (β) Λύστε αριθμητικά το σύστημα των εξισώσεων γιά διάφορες αρχικές συνθήκες (αρκεί να παραθέσετε τον κώδικα που κάνει αυτό). (γ) Σχεδιάστε τους πληθυσμούς σαν συνάρτηση του χρόνου. (δ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων (και παραθέστε τον κώδικα γιά αυτό).