

1. Εξετάσεις, Τετάρτη 4 Σεπτεμβρίου 2013

Μαθηματική Μοντελοποίηση I [TEM281]

Διάρκεια: 2:00 ώρες (επιλέξτε δύο από τα τρία θέματα)

Θέμα 1. (10 + 15 + 10 μονάδες) Θεωρούμε ένα μοντέλο για πληθυσμούς N_1, N_2 δύο ειδών τα οποία ζουν στο ίδιο οικοσύστημα:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 (1 - N_1 + b_1 N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_2 \frac{N_1}{K_2} \right),\end{aligned}$$

όπου οι σταθερές r_1, r_2, b_1, b_2, K_2 είναι θετικές.

(α) Ορίστε κανονικές (αδιάστατες) μεταβλητές για τους πληθυσμούς N_1, N_2 και για τον χρόνο t και γράψτε την εξίσωση στις νέες μεταβλητές.

(β) Περιγράψτε (με επιχειρήματα) τι θέση μπορεί να έχουν στο οικοσύστημα τα δύο είδη (N_1, N_2). Ποιά βιολογική διαδικασία είναι δυνατόν να παριστάνει ο 2ος ($-r_1 N_1^2$) και ποιά ο 3ος όρος ($r_1 b_1 N_1 N_2$) στο δεξιό μέλος της 1ης εξίσωσης;

(γ) Υπάρχει σημείο ισορροπίας του συστήματος που παριστάνει συμβίωση των δύο ειδών; Βρείτε το σημείο, αν υπάρχει και αναφέρετε για ποιές τιμές των παραμέτρων αυτό υπάρχει. [Δουλέψτε είτε στις αρχικές είτε σε αδιάστατες μεταβλητές.]

Θέμα 2. (10 + 10 + 10 + 5 μονάδες) Το απλό εκκρεμές περιγράφεται από μία γωνία θ με την εξίσωση

$$m\ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0,$$

όπου m είναι η μάζα, ℓ το μήκος τους εκκρεμούς και g η σταθερά επιτάχυνσης της βαρύτητας.

(α) Γράψτε την εξίσωση ως σύστημα εξισώσεων πρώτου βαθμού.

(γ) Βρείτε σημεία ισορροπίας (τουλάχιστον τρία).

(β) Βρείτε ένα ολοκλήρωμα της κίνησης (διατηρήσιμη ποσότητα).

(δ) Γράψτε μία εξίσωση για εκείνη την καμπύλη στο διάγραμμα φάσεων η οποία περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία ισορροπίας. [Υποβοηθητικά μπορείτε να σχεδιάσετε το διάγραμμα φάσεων.]

Θέμα 3. (10 + 10 + 15 μονάδες) Δίνεται το ακόλουθο μοντέλο το οποίο παριστάνει την εξέλιξη μίας εθνικής οικονομίας με βάση το εθνικό εισόδημα, την κατανάλωση και τα έξοδα του κράτους:

$$\begin{aligned}\dot{I} &= I - \alpha C \\ \dot{C} &= b(I - C - G),\end{aligned}$$

όπου έχουμε τις σταθερές $a > 1, b > 1$.

(α) Περιγράψτε τι είναι δυνατόν να παριστάνουν τα I, C, G (εξηγήστε).

(β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος αν (i) G είναι μία σταθερά $G = G_0$ και επίσης αν (ii) $G = G_0 + kI$ (k : σταθερά). Σε ποιά περιοχή θα χρησιμοποιούσατε τη μία περίπτωση και σε ποιά την άλλη;

(γ) Εξετάστε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας για μία από τις περιπτώσεις του ερωτήματος (β). [Αφού βρείτε έναν γενικό τύπο, εξετάστε τι συμβαίνει για συγκεκριμένες τιμές των a, b , αλλά επιλέξτε $a, b > 1$.]

2. Εργαστηριακή άσκηση

Διάρκεια: 45 λεπτά

Θέμα 1. (15 + 10 + 10 μονάδες) Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει εξέλιξη των πληθυσμών λύκων (κυνηγών) και λαγών (θηραμάτων) σε ένα οικοσύστημα:

$$\dot{x} = ax - xy$$

$$\dot{y} = -by + xy$$

[Επιλέξτε τιμές που επιθυμείτε για τις σταθερές a, b].

(α) Ολοκληρώστε αριθμητικά το σύστημα των εξισώσεων από χρόνο $t_1 = 0$ έως t_2 (χρόνια) και βρείτε τις καμπύλες στο διάγραμμα φάσεων (τουλάχιστον τρεις).

(β) Σχεδιάστε τις συναρτήσεις $x(t), y(t)$. Ποιά είναι η περίοδος τους (προσεγγιστικά); Αναφερθείτε στις τρεις καμπύλες, δώστε επεξηγήσεις].

(γ) Εάν υποθέσουμε ότι για χρόνο $t = t_0$ έχουμε μέγιστο αριθμό λύκων (κυνηγών), σε πόσο, κατά προσέγγιση, χρόνο θα έχουμε ελάχιστο και σε πόσο μέγιστο αριθμό λαγών (θηραμάτων); [Εξηγήστε ποιά μεταβολή παριστάνει αριθμό λύκων και ποιά λαγών, Αναφερθείτε σε μία από τις καμπύλες, δώστε επεξηγήσεις].

Υποδείξεις: Μπαίνουμε στο σύστημα με το όνομα *temuser*.