

**Μαθηματική Μοντελοποίηση I [TEM281]**  
**Εξετάσεις, Παρασκευή 1 Φεβρουαρίου 2013**  
**Διάρκεια: 2:15 ώρες**

**Θέμα 1.** (10 + 5 + 10 μονάδες) Έστω ένα σωματίο το οποίο βρίσκεται σε δυναμικό  $V = V(r)$ , όπου  $(r, \theta)$  είναι πολικές συντεταγμένες.

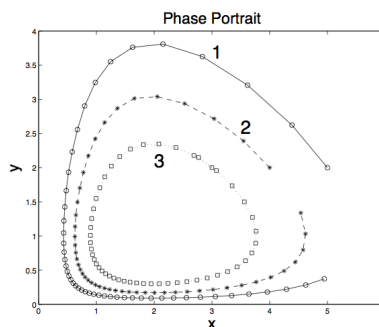
- (α) Βρείτε και γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του σωματίου (σε πολικές συντεταγμένες).  
 (β) Γράψτε μία διατηρήσιμη ποσότητα της κίνησης (αιτιολογήστε γιατί είναι διατηρήσιμη).  
 (γ) Μία επιπλέον δύναμη τριβής  $\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v}$  (η οποία δεν περιέχεται στο δυναμικό) ασκείται σε αυτό το σωματίο, όπου  $\lambda$  είναι μία σταθερά και  $\mathbf{v}$  είναι η ταχύτητά του. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησής του.

**Θέμα 2.** (7 + 7 + 7 μονάδες) Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει εξέλιξη των πληθυσμών λύκων (κυνηγών) και λαγών (θηραμάτων) σε ένα οικοσύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy \\ \dot{y} &= -2y + xy\end{aligned}$$

Έχουμε ολοκληρώσει αριθμητικά το σύστημα των εξισώσεων από χρόνο  $t_1 = 0$  έως  $t_2 = 4.8$  χρόνια και βρήκαμε τις καμπύλες στο διάγραμμα φάσεων όπως φαίνεται στο σχήμα.

- (α) Ποιά μεταβλητή παριστάνει λύκους (κυνηγούς) και ποιιά λαγούς (θηράματα); [Αιτιολογήστε]. Ποιές είναι, κατά προσέγγιση, οι αρχικές συνθήκες  $[x(t=0), y(t=0)]$  που χρησιμοποιήθηκαν στην ολοκλήρωση του συστήματος; [Αναφερθείτε σε δύο από τις καμπύλες, δώστε επεξηγήσεις].  
 (β) Αν είναι γνωστό ότι οι  $x(t), y(t)$  είναι περιοδικές συναρτήσεις, τι μπορείτε να πείτε για την περίοδο μεταβολής του συστήματος; [Αναφερθείτε και στις τρεις καμπύλες, δώστε επεξηγήσεις].  
 (γ) Εάν υποθέσουμε ότι για χρόνο  $t = t_0$  έχουμε μέγιστο αριθμό λύκων (κυνηγών), σε πόσο, κατά προσέγγιση, χρόνο θα έχουμε ελάχιστο και σε πόσο μέγιστο αριθμό λαγών (θηραμάτων); [Αναφερθείτε σε μία από τις καμπύλες, δώστε επεξηγήσεις].



**ΣΧΗΜΑ 1.** Καμπύλες στο διάγραμμα φάσεων για το μοντέλο κυνηγού-θηράματος του Θέματος 2. Η εξίσωση έχει ολοκληρωθεί από χρόνο  $t_1 = 0$  έως  $t_2 = 4.8$  για τρεις διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Διαδοχικά σύμβολα σε κάθε καμπύλη (1:κύκλος, 2:αστέρι, 3:τετραγώνισ) σημειώνονται ανά χρόνο  $\Delta t = 0.1$  και ενώνονται με γραμμές (1:συνεχή, 2:διακεκομμένη, 3:εστιγμένη).