

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Σταύρος Κομηνέας

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

1	Dimensionless variables	3
1.1	A chemical reaction	3
1.2	Heat conduction	4
1.3	The projectile problem	6
2	Εννοιες θεωρητικής μηχανικής	9
2.1	Σημειακά σωματΙΑ	9
2.1.1	Διανύσματα	9
2.1.2	Πολικές συντεταγμένες	10
2.2	Νομοί του Νευτωνα	11
2.3	Ενεργεια	13
2.4	Δυναμική ενεργεια και δυναμεις	15
2.4.1	Σταθερό δυναμικό	15
2.4.2	Γραμμικό δυναμικό	15
2.4.3	Αρμονικός ταλαντωτής	16
2.4.4	Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση	18
2.4.5	Γενικά δυναμικά	18
2.4.6	Απλό εκκρεμές	19
2.5	Δυναμικό χημικού δεσμού	21
3	Εξισώσεις Euler-Lagrange	25
3.1	Γενικευμένες συντεταγμένες	25
3.2	Εξισώσεις Lagrange	25
3.3	Λογισμος μεταβολων	30
3.3.1	Αρχή του Hamilton	30
3.3.2	Εξισώσεις Euler-Lagrange	31
3.3.3	Ολοκλήρωμα δράσης	34
3.3.4	Ανακεφαλαίωση των εξισώσεων Lagrange	35
3.4	Νομοί διατηρησης	36
3.4.1	Ενέργεια	36
3.4.2	Γενικευμένη ορμή	38
3.4.3	Λυμένη Άσκηση.	39

4	Δίνες και η δυναμική τους	43
4.1	Εισαγωγή	43
4.1.1	Συνήθεις δίνες σε ρευστά	43
4.1.2	Δίνες σε υπερρευστά	44
4.1.3	Μαγνητικές δίνες	45
4.2	Εξισώσεις κίνησης δινών	46
4.2.1	Μία απομονωμένη δίνη	47
4.2.2	Ζεύγος αλληλεπιδρώντων δινών: Διατηρήσιμες ποσότητες	48
4.2.3	Ζεύγος αλληλεπιδρώντων δινών: Τροχιές	50
4.3	Φορτίο σε μαγνητικό πεδίο	52
4.3.1	Εξισώσεις Newton	52
4.3.2	Εξισώσεις Lagrange	53
4.3.3	Νόμοι διατήρησης	53
4.4	Φορτίο σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο	55
4.4.1	Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο	56
4.4.2	Δυνάμεις τριβής	57
4.5	Κίνηση ζευγούς φορτίων σε μαγνητικό πεδίο	58
5	Μοντελα απο την βιολογια	61
5.1	Διαγραμμα φασεων για εξισώσεις 2ης τάξης	61
5.1.1	Το απλό εκκρεμές	61
5.1.2	Εξισώσεις 2ης τάξης ως σύστημα εξισώσεων 1ης τάξης	64
5.2	Πληθυσμιακα μοντελα	66
5.2.1	Βασικά πληθυσμιακά μοντέλα	66
5.2.2	Μοντέλο κυνηγού-θηράματος (Lotka-Volterra)	67
5.2.3	Μοντέλα ανταγωνισμού δύο ειδών	69
5.2.4	Μοντέλο επιδημιών	70
5.3	Συστηματα γραμμικων εξισωσεων	71
5.3.1	Συστηματα δυο εξισωσεων 1ης τάξης	71
5.3.2	Γραμμικά συστήματα με δύο μεταβλητές	72
5.3.3	Πραγματικές ιδιοτιμές	73
5.3.4	Μιγαδικές ιδιοτιμές	76
5.3.5	Διάγραμμα σημείων ισορροπίας.	79
5.4	Ευσταθεια σημειων ισορροπιας	80
5.5	Μη γραμμικα συστηματα	81

Πρόλογος

Στις ακόλουθες σελίδες δίνονται σύντομες σημειώσεις για το μάθημα "Μαθηματική Μο-
ντελοποίηση Ι' του τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης.
Είναι ιδιαίτερα σύντομες για θέματα τα οποία καλύπτονται επαρκώς από την υπάρχουσα βι-
βλιογραφία στα ελληνικά και κάπως πιο εκτεταμένες για θέματα τα οποία δεν καλύπτονται
επαρκώς στην βιβλιογραφία. Με οδηγό λοιπόν αυτές τις σημειώσεις και τις παραπομπές που
δίνονται στο τέλος κάθε ενότητας, ο φοιτητής μπορεί να μελετήσει τα αντίστοιχα θέματα
από πιο εκτεταμένα συγγράμματα. Σημειώνουμε επίσης ότι η ύλη του μαθήματος καθορίζε-
ται από τις παραδόσεις στην αίθουσα διδασκαλίας κατά την διάρκεια του εξαμήνου και δεν
συμπίπτει απολύτως με το περιεχόμενο των σημειώσεων.

Εκτός αρκετών παραδειγμάτων δίνονται και πολλές ασκήσεις (οι περισσότερες άλυτες) ο
βαθμός δυσκολίας των οποίων είναι από εύκολες έως ιδιαίτερα περίπλοκες. Αυτές, ανάλογα
με τον βαθμό δυσκολίας τους, μπορούν να χρησιμεύσουν για εξάσκηση, ως μικρές εργασίες
για κάποιους φοιτητές, είτε ως αφορμή για συζήτηση διαφόρων θεμάτων. Δεν αναμένεται
η λύση όλων των ασκήσεων οι οποίες περιέχονται στις σημειώσεις, από τους φοιτητές οι
οποίοι θα παρακολουθήσουν το μάθημα.

Χειμερινό εξάμηνο 2010

Introduction

Models

The need for *mathematical modeling* stems from the ability of mathematics to make predictions about the world. This area can be interpreted broadly to include the mathematical description of systems in many sciences, e.g., physics, biology and economics. One could argue that an early example of mathematical modeling was provided by Newton in his laws describing the dynamics (time evolution) of mechanical systems of particles. Later models were proposed to describe the dynamics of biological species populations and these have been quite successful. Modern examples include models for complex financial products. A careful observer of a certain system may at some point argue that the system obeys certain laws (for example, in its dynamics or in its equilibrium states), at least regarding its general behavior. As a next step, the observer may then attempt to phrase these laws using differential equations (which are then seen as laws for the system dynamics).

The observer of the system may choose to take the view that the equations which he has written down actually contain *the laws* governing the (mechanical, biological, or other) system. However, there is little argument to support *a priori* this point of view. Even if one takes for granted that there actually *are* some laws governing the system (which is a question that needs to be answered before we make any further progress), it is hard to argue that a few terms in a differential equation will be completely sufficient to describe all types of behavior of a certain system. The above questions are difficult to discuss as we all have made the experience that physical and other systems often present particularly complex behavior. In view of the above it may be more reasonable for the observer to take that point of view that his system can be described by a *mathematical model*. This is typically a differential equation which contains all the terms necessary to render accurately the small number of important features observed. The observer then turns to a *modeler* who then hopes that his model will follow reality reasonably faithfully.

In the history of science many models have been used to describe many many aspects of the world. Unsuccessful or partially successful models are certainly ubiquitous but it is necessary to mention that some models have been remarkably successful, at times, beyond any initial hopes. As such an example, one could cite Quantum Mechanics and the equation of Schroedinger which is supposed to describe the dynamics of particles at

the microscopic level. In this task, it has been successful to the extent that there is still no known clear example where it fails. One may then have some reason to argue that this equation or other similarly successful ones give *the laws* governing their respective systems.

Variables of a model

In the course of writing down a model for a certain system one of the first problems we have to decide upon are the specific variables which are needed in order to achieve a correct and complete model. For example, Newton has used the acceleration (second time derivative of position) of a particle in order to write down its law of motion (Newton's second law). This has changed the trend of the previous two thousand years where, starting from the ideas of Aristotle, the velocity (first time derivative of position) was thought to be the crucial variable.

Another example is the dynamics of vortices in fluids. In this case it turns out that the crucial variable to be used in the equations of motion of a vortex is its velocity (not its acceleration as in the case of Newtonian particles).

A contemporary example showing the importance of choosing the correct variables is given by the current development of *memristors*. These are electronic circuits (so-called, passive circuit elements) which may be used in memory devices (hence their name as a concatenation of "memory resistors"). It has been traditionally assumed that the fundamental relationship in passive circuitry was between voltage and charge. However, Leon Chua of the University of California at Berkeley realized, in a paper published in 1971, that the fundamental relationship is between changes-in-voltage and charge, thus these are the variables which should be used in the equations. In his words "The situation is analogous to what is called "Aristotle's Law of Motion, which was wrong, because he said that force must be proportional to velocity. That misled people for 2000 years until Newton came along and pointed out that Aristotle was using the wrong variables. Newton said that force is proportional to acceleration—the change in velocity. This is exactly the situation with electronic circuit theory today. All electronic textbooks have been teaching using the wrong variables—voltage and charge—explaining away inaccuracies as anomalies. What they should have been teaching is the relationship between changes in voltage, or flux, and charge." Having realized the above memristors are now (year 2010) considered for various applications in the electronics industry.

Bibliography: [1]

Chapter 1

Dimensionless variables

1.1 A chemical reaction

(See Ref. [2]) Let us suppose a chemical reactor of volume V . This is fed with a substance \mathbf{C} on the one end, which is taking part in a chemical reaction inside the reactor, and what is left exits on the other end of the reactor. We assume that the substance is fed at a rate q , it is consumed at a rate k in the reactor, and it exits at the same rate q . The dimensions of these parameters are

$$q : \frac{\text{volume}}{\text{time}}$$
$$k : \frac{1}{\text{time}}$$

We further assume that the incoming substance has a constant density c_i while the outgoing has a density which is a function of time $c(t)$ (with dimensions mass/volume). We can derive an equation for $c(t)$ if we write an equation for the conservation of mass of the substance \mathbf{C} . It is easy to see that the incoming mass is qc_i , the outgoing mass is $qc(t)$, the mass consumed in the reactor is $Vkc(t)$. The mass in the reactor is $Vc(t)$ and thus the rate of change of this mass is

$$\frac{d}{dt} [Vc(t)] = qc_i - qc(t) - Vkc(t).$$

In order to define the initial value problem we assume that at $t = 0$ the incoming density is $c(t) = c_0$.

As a first step we can write the above equation in the simpler form

$$\frac{dc}{dt} = \frac{q}{V}(c_i - c) - kc, \quad t > 0$$
$$c(0) = c_0$$

Combining the parameters of the problem, we can use as a unit for the density c_i , and as a unit for time k^{-1} . We define

$$C = \frac{c}{c_i}, \quad \bar{t} = \frac{t}{k^{-1}} = kt$$

and the equation takes the form

$$\begin{aligned}\frac{dC}{d\bar{t}} &= \beta(1 - C) - C, & \bar{t} > 0 \\ C(0) &= \gamma\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

where the new constants

$$\beta = \frac{q}{Vk}, \quad \gamma = \frac{c_0}{c_i}$$

are *dimensionless*.

A careful reader would have already noted that there are more possibilities for scaling our original equation. We may write the new dimensionless variables

$$C = \frac{c}{c_i}, \quad \tau = \frac{t}{V/q}.$$

The scaled equation now reads

$$\beta \frac{dC}{d\tau} = \beta(1 - C) - C\tag{1.1.2}$$

and looks different than the first scaled equation.

Both scaled equations are correct but one may be more suitable than the other for a specific problem. Take as an example the case of a rapid chemical reaction where $k \gg q/V \Rightarrow \beta \ll 1$. Eq. (1.1.1) states that the second term on the rhs is much more important than the first term. Therefore one may, for example, write the approximation

$$\frac{dC}{d\bar{t}} = -C \Rightarrow C(\bar{t}) = \gamma \exp(-\bar{t})$$

which is reasonable as it states that a rapid rate of reaction leads to rapid consumption of the substance \mathbf{C} . However, the condition $\beta \ll 1$ in Eq. (1.1.2) seems to indicate that the second term on the rhs is much larger than the other terms in the equation and it therefore does not lead to any reasonable approximation of the equation.

1.2 Heat conduction

(See Ref. [3]) Suppose a rod extending from $x = 0$ to $x = l$ which is homogeneous and has constant cross-sectional area A . We assume that heat flows in the x direction only and temperature is constant in any cross-section. Let the the variable $u(x, t)$ denote the temperature at position x at time t . We seek an equation for $u(x, t)$. Let us first note that the amount of heat in a segment of the rod from x to $x + \Delta x$ is

$$c_v \rho u(\xi, t) A \Delta x$$

where (i) $A \Delta x$ is the volume under consideration, (ii) ρ is the density, and therefore $\rho A \Delta x$ is the mass in the volume, (iii) c_v is the *specific heat*, that is, the amount of heat

required to raise one unit mass of the material one degree, measured in calories/(gram · degree C), and finally (iv) $x \leq \xi \leq x + \Delta x$.

In the next step we denote by $\phi(x, t)$ the *heat flux*, that is the amount of heat energy per time flowing through the sectional area at x . Then we have the balance equation

$$\frac{\partial}{\partial t} [c_v \rho u(\xi, t) A \Delta t] = \phi(x, t) - \phi(x + \Delta x, t).$$

This equation states that the rate of change of the heat energy in the segment is equal to the energy flowing-in at x minus that flowing-out at $x + \Delta x$. We now divide by Δx , take the limit $\Delta x \rightarrow 0$ and obtain the partial differential equation

$$c_v \rho A u_t(x, t) = -\phi_x(x, t) \quad (1.2.1)$$

where we have taken $\xi \rightarrow x$ as $\Delta x \rightarrow 0$. This equation expresses conservation of energy.

The equation which we have derived contains two unknown functions u and ϕ . In addition to this we have another *constitutive relation* which formulates the conductivity of a material. The simplest form of such a relation is

$$\phi(x, t) = -K A u_x(x, t) \quad (1.2.2)$$

which states that the heat flux is proportional to temperature difference and it is based on experimental observations. The constant K depends on the material, it is called *thermal conductivity* and it is measured in calories/(cm · sec · degree C).

We substitute the constitutive relation Eq. (1.2.2) into Eq. (1.2.1) and obtain a partial differential equation for the temperature $u(x, t)$:

$$c_v \rho u_t(x, t) = K u_{xx}(x, t) \quad (1.2.3)$$

We may now introduce the *thermal diffusivity* k

$$k = \frac{K}{c_v \rho} \quad \text{with dimensions} \quad \frac{\frac{\text{calories}}{\text{cm} \cdot \text{sec} \cdot \text{degreeC}}}{\frac{\text{calories}}{\text{gram} \cdot \text{degreeC}} \frac{\text{gram}}{\text{cm}^3}} = \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$$

and write the above equation in the simpler form

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t) \quad (1.2.4)$$

which is called the *heat equation* or *diffusion equation*.

In defining the system more precisely we assume that the rod has length ℓ extending in $0 < x < \ell$. Let us choose as initial condition that the rod is, at time $t = 0$, at zero temperature:

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{for} \quad 0 < x < \ell$$

and as boundary conditions that the two ends of the rod is at a temperature T_0 :

$$u(0, t) = u(\ell, t) = T_0 \quad \text{for} \quad t > 0.$$

Having formulated the problem we note that the equation contains one independent variable (u) and two dependent ones (x, t). We have no reason to believe that the usual physical units for these variables (i.e., degree C, cm, sec) are the most appropriate ones. Let us choose different units and see how the equation transforms. Looking at parameters of our problem we note that the constants l, T_0 and l^2/k have dimensions of length, temperature and time, respectively. We therefore define

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{t}{l^2/k}, \quad \bar{u} = \frac{u}{T_0}.$$

The new variables are *dimensionless* since each of the original variables is divided by a constant with the same dimensions as the variable. An advantage of the new variables is that they all seem to vary from zero to unity, e.g., $0 < \bar{x} < 1$. A simple application of the chain rule gives in the heat equation gives

$$\bar{u}_{\bar{t}} - \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} = 0$$

while the initial and boundary conditions become

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, 0) &= 0 && \text{for } 0 < \bar{x} < 1 \\ \bar{u}(0, \bar{t}) = \bar{u}(1, \bar{t}) &= 1 && \text{for } \bar{t} > 0. \end{aligned}$$

An advantage of the formulation with dimensionless variables is that no physical constants appear in the equation. The heat equation in its latter form essentially states that the rate of change of temperature in time is on the order of the rate of change of the temperature in space.

1.3 The projectile problem

(see Ref. [2]) Let a mass m on the surface of the earth, which has radius R and mass M . The mass m is given a vertical upward velocity V at time $t = 0$. Newton's gravitational law states

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -G \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

where h is the height of the mass m above the surface of the earth. We usually define the acceleration of gravity on surface of the earth

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

and may write

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\frac{R^2 g}{(R+h)^2}$$

with initial conditions

$$h(0) = 0, \quad \frac{dh}{dt}(0) = V.$$

We may choose for length scale either R or V^2/g , and as time scale R/V , $\sqrt{R/g}$ or V/g . Let us test the choices

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{t}{R/V}, & \bar{h} &= \frac{h}{R} \\ \bar{r} &= \frac{t}{Vg^{-1}}, & \bar{h} &= \frac{h}{V^2g^{-1}}\end{aligned}$$

which lead respectively to the equations

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{d^2\bar{h}}{d\bar{t}^2} &= -\frac{1}{(1+\bar{h})^2}, & \bar{h}(0) &= 0, \quad \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}}(0) = 1 \\ \frac{d^2\bar{h}}{d\bar{t}^2} &= -\frac{1}{(1+\epsilon\bar{h})^2}, & \bar{h}(0) &= 0, \quad \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}}(0) = 1\end{aligned}$$

where the dimensionless parameter is

$$\epsilon = \frac{V^2}{gR}.$$

In order to see that the two equations may not be suitable for all kinds of problems, let us assume that ϵ is small. In this case the first scaling leads to a trivial equation which has no solution. This actually happens because the second derivative term may not be small (or order unity). The second equation leads to

$$\frac{d^2\bar{h}}{d\bar{t}^2} = -1 \Rightarrow \bar{h} = \bar{t} - \frac{1}{2}\bar{t}^2 \Rightarrow h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + Vt$$

which is a familiar solution.

Example. In order to understand the difficulties arising in some of the approximations used above, let us suppose a function of the form

$$f(t) = t + e^{-100t}.$$

Its derivative is

$$f'(t) = 1 - 100e^{-100t}$$

and it is of order unity for $t \gg 1$ but takes very different values for $t \ll 1$. We say that this has two different scales. It is obvious that the approximation for differential equation which may have solutions of this form should be done appropriately in the different regimes for the variable t . Note also that similar problems are important in methods for numerical solutions of differential equations.

Bibliography: [2, 3]

Κεφάλαιο 2

Έννοιες Θεωρητικής Μηχανικής

2.1 Σημειακά σωμάτια

2.1.1 Διανύσματα

Στην μηχανική υποθέτουμε πολλές φορές ότι τα σωμάτια δεν έχουν μέγεθος και παριστάνουμε την θέση τους με ένα σημείο. Η θέση λοιπόν ενός σημειακού σωματίου δίνεται από ένα διάνυσμα \mathbf{r} το οποίο παριστάνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}},$$

όπου $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και x, y, z είναι οι συντεταγμένες του σωματίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Παράδειγμα. Έστω θέση σωματίου επάνω στον οριζόντιο άξονα

$$\mathbf{r} = at\hat{\mathbf{i}}, \quad (2.1.1)$$

όπου a είναι μία σταθερά. Αν υποθεθεί ότι η μεταβλητή t παριστάνει τον χρόνο, τότε η παραπάνω εξίσωση δίνει την θέση σημειακού σωματίου το οποίο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. \square

Ταχύτητα λέγεται η χρονική παράγωγος της θέσης, δηλαδή το διάνυσμα

$$\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

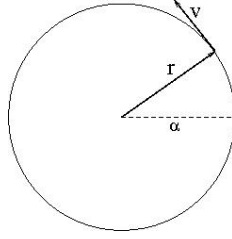
Στην περίπτωση του παραπάνω σωματίου έχουμε $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \Rightarrow \mathbf{v} = a\hat{\mathbf{i}}$, το οποίο είναι ένα σταθερό διάνυσμα.

Παράδειγμα. Έστω το διάνυσμα θέσης σωματίου

$$\mathbf{r} = at\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}gt^2\hat{\mathbf{j}}, \quad (2.1.2)$$

ώστε η ταχύτητά του είναι

$$\mathbf{v} = a\hat{\mathbf{i}} - gt\hat{\mathbf{j}}. \square$$



Σχήμα 2.1: Σωματίο σε κυκλική κίνηση.

Παράδειγμα. (κυκλική κίνηση) Έστω το διάνυσμα θέσης σωματίου σε κυκλική κίνηση (όπως στο σχήμα)

$$\mathbf{r} = \alpha \sin(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + \alpha \cos(\omega t) \hat{\mathbf{j}}. \quad (2.1.3)$$

Πραγματικά το σωματίο αυτό βρίσκεται πάντα επάνω σε κύκλο ακτίνας $|\mathbf{r}| = \sqrt{\alpha^2 \sin^2(\omega t) + \alpha^2 \cos^2(\omega t)} = \alpha$. Η ταχύτητά του είναι

$$\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \alpha \cos(\omega t) \hat{\mathbf{i}} - \omega \alpha \sin(\omega t) \hat{\mathbf{j}}.$$

Παρατηρούμε ότι $|\mathbf{v}| = \omega \alpha$ είναι σταθερό διάνυσμα. Επίσης $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$, δηλαδή το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης. \square

Παράδειγμα. (κυκλοειδής κίνηση) Έστω το διάνυσμα θέσης σωματίου

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1 &= \alpha \omega t \hat{\mathbf{i}} + \alpha \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}_2 &= \alpha \sin(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + \alpha \cos(\omega t) \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

Η ταχύτητά του είναι

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \omega \alpha [1 + \cos(\omega t)] \hat{\mathbf{i}} - \omega \alpha \sin(\omega t) \hat{\mathbf{j}}. \square$$

2.1.2 Πολικές συντεταγμένες

Είναι πολύ συχνά ευκολότερο να περιγράψουμε την θέση ή την κίνηση ενός σωματίου σε πολικές συντεταγμένες (παρά στις συνήθεις καρτεσιανές). Θεωρούμε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta$. Η θέση σωματίου δίνεται από το διάνυσμα

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r.$$

Τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις δύο διευθύνσεις είναι

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}.$$

Η ταχύτητα του σωματίου είναι

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{e}}_r + r \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt},$$

όπου έχουμε

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \hat{\mathbf{j}}) = -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Θέτουμε $d\theta/dt := \dot{\theta}$ και $dr/dt := \dot{r}$ και γράφουμε τελικά

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta. \quad (2.1.4)$$

Παράδειγμα. Αν γράψουμε $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r = r(\cos\theta \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \hat{\mathbf{j}})$, παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα (2.1.3), οι πολικές συντεταγμένες είναι $r = \alpha$, $\theta = \omega t$. Όσπε $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$ και άρα έχουμε ταχύτητα

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = \alpha\omega \hat{\mathbf{e}}_\theta. \square$$

Βιβλιογραφία: [4, 6]

2.2 Νόμοι του Νεύτωνα

1ος νόμος του Νεύτωνα. Σώμα στο οποίο δεν επιδρούν δυνάμεις κινείται σε ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα. \square

Παρατήρηση. Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε ένα σώμα το οποίο βρίσκεται σε ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Είναι προφανές ότι ένας περιστρεφόμενος παρατηρητής δεν θα βλέπει το ίδιο σώμα να βρίσκεται σε ευθύγραμμη κίνηση. Άρα με τον 1ο νόμο του Νεύτωνα εισάγεται η έννοια ενός *αδρανειακού συστήματος αναφοράς* ως προς το οποίο γίνονται οι παρατηρήσεις.

Προχωρούμε τώρα να μελετήσουμε αλληλεπίδραση δύο σωμάτων. Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν το πείραμα δείχνει ότι έχουμε μεταβολή των ταχυτήτων τους σε αντίθετες κατευθύνσεις:

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -c \frac{d\mathbf{v}_2}{dt},$$

όπου c είναι μία σταθερά. Γράφουμε αυτή την σχέση ως

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d(m_1 \mathbf{v}_1)}{dt} = -\frac{d(m_2 \mathbf{v}_2)}{dt}.$$

Οι m_1, m_2 είναι σταθερές, λέγονται *μάζες* των σωμάτων, χαρακτηρίζουν το κάθε σώμα και δεν εξαρτώνται από το ζευγάρι των σωμάτων που μελετάμε.

Η παραπάνω σχέση δίνει αφορμή να ορίσουμε την *γραμμική ορμή*

$$\mathbf{p} := m\mathbf{v}. \quad (2.2.1)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι μεταβολή της ορμής ενός σώματος προκαλείται από την επίδραση άλλου σώματος. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ότι το κάθε σώμα ασκεί στο άλλο μία δύναμη.

2ος νόμος του Νεύτωνα. Λέμε ότι σε σώμα του οποίου αλλάζει η κινητική κατάσταση (δηλαδή, του οποίου αλλάζει η ορμή) ασκείται δύναμη η οποία είναι ίση με

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \square$$

3ος νόμος του Νεύτωνα. Οι δυνάμεις μεταξύ δύο σωμάτων είναι ίσες και αντίθετες:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

και τις ονομάζουμε *δράση* και *αντίδραση*. \square

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι μεταβολές της ορμής για ένα ζευγάρι σωμάτων είναι αντίθετες, ώστε γράφουμε

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const.}$$

Η σχέση αυτή είναι βέβαια η ίδια με εκείνη που γράψαμε πριν τον 2ο νόμο.

Εδώ έχουμε ουσιαστικά εισάγει μία ακόμα βασική έννοια, εκείνη της *επιτάχυνσης*

$$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.2.2)$$

Η δύναμη είναι ανάλογη της επιτάχυνσης με βάση τον 2ο νόμο:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Στα παραδείγματα που δώσαμε παραπάνω έχουμε, για το παράδειγμα (2.1.1),

$$\mathbf{r} = \alpha t \hat{\mathbf{i}} \Rightarrow \mathbf{v} = \alpha \hat{\mathbf{i}} \Rightarrow \mathbf{a} = 0.$$

Αυτό το αποτέλεσμα περιγράφει τον 1ο νόμο του Νεύτωνα. Για το παράδειγμα (2.1.2)

$$\mathbf{r} = \alpha t \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2} g t^2 \hat{\mathbf{j}} \Rightarrow \mathbf{v} = \alpha \hat{\mathbf{i}} - g t \hat{\mathbf{j}} \Rightarrow \mathbf{a} = -g \hat{\mathbf{j}}.$$

Για το παράδειγμα (2.1.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \alpha [\sin(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\omega t) \hat{\mathbf{j}}] \\ \Rightarrow \mathbf{v} &= \omega \alpha [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{i}} - \sin(\omega t) \hat{\mathbf{j}}] \\ \Rightarrow \mathbf{a} &= -\omega^2 \alpha [\sin(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\omega t) \hat{\mathbf{j}}] = -\omega^2 \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Άσκηση. Γράψτε τη γενική μορφή του διανύσματος της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες.

Λύση:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Βιβλιογραφία: [5, 4, 6]

2.3 Ενέργεια

Θεωρούμε σωματίο το οποίο διανύει μία απόσταση από την θέση \mathbf{r}_0 στην θέση \mathbf{r} . Ολοκληρώνουμε την εξίσωση του Νεύτωνα ως εξής

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r}.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα γράφεται ως (αφού $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^t m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2. \end{aligned}$$

Στις παραπάνω σχέσεις θεωρήσαμε ότι το σωματίο είναι στην θέση \mathbf{r} την χρονική στιγμή t και έχει ταχύτητα \mathbf{v} και ότι είναι στην θέση \mathbf{r}_0 την χρονική στιγμή t_0 και έχει ταχύτητα \mathbf{v}_0 .

Έχουμε το αποτέλεσμα

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = T - T_0, \quad T := \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2, \quad (2.3.1)$$

όπου T λέγεται κινητική ενέργεια του σωματίου.

Θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου υπάρχει πραγματική συνάρτηση $V(\mathbf{r})$ τέτοια ώστε η δύναμη μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (2.3.2)$$

Τότε

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r}).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r}) = T - T_0 \Rightarrow V(\mathbf{r}) + T = V(\mathbf{r}_0) + T_0.$$

Ορίζουμε την διατηρήσιμη ποσότητα

$$\mathcal{E} := \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}), \quad (2.3.3)$$

η οποία ονομάζεται ενέργεια.

Έχουμε λοιπόν την εξίσωση $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ όπου $\mathcal{E}_0 = V(\mathbf{r}_0) + T_0$ είναι μία σταθερά. Αυτή είναι μία εξίσωση πρώτης τάξεως και, στην περίπτωση κίνησης σε μία διάσταση, λύνεται ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = \mathcal{E}_0 &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [\mathcal{E}_0 - V(x)]} \\ \Rightarrow t - t_0 &= \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [\mathcal{E}_0 - V(x)]}}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Παράδειγμα. Έστω ένα παραβολικό (αρμονικό) δυναμικό

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2.$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [\mathcal{E}_0 - \frac{1}{2} kx^2]}} = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{k} - x^2}}} \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) &= \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{k} - x^2}} = \pm \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{\frac{k}{2\mathcal{E}_0}} dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2\mathcal{E}_0} x^2}} \end{aligned}$$

Γιά την απλοποίηση των υπολογισμών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεταβλητές

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad \bar{x} = \sqrt{\frac{k}{2\mathcal{E}_0}} x,$$

Όστε τώρα έχουμε

$$\bar{t} - \bar{t}_0 = \pm \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}} = \pm [-\arccos(\bar{x})]_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} = \pm [\arccos(\bar{x}_0) - \arccos(\bar{x})],$$

όπου έχουμε βέβαια θέσει $\bar{t}_0 = \sqrt{k/m} t_0$ και $\bar{x}_0 = \sqrt{k/(2\mathcal{E}_0)} x_0$. Θέτουμε την γωνία $\theta_0 := \arccos(\bar{x}_0) = \arccos(\sqrt{k/(2\mathcal{E}_0)} x_0)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{t} - \bar{t}_0 &= \pm [\theta_0 - \arccos(\bar{x})] \Rightarrow \\ \arccos(\bar{x}) &= \pm(\bar{t} - \bar{t}_0) + \theta_0 \Rightarrow \\ \bar{x} &= \cos[\pm(\bar{t} - \bar{t}_0) + \theta_0], \end{aligned}$$

ή, απλούστερα

$$\bar{x} = \cos(\bar{t} + \phi_0)$$

όπου ϕ_0 είναι μία σταθερή γωνία. Επιστρέφουμε τελικά στις αρχικές μεταβλητές στις οποίες η λύση έχει την έκφραση

$$x = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{k}} \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right]. \square$$

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε να πετύχουμε το παραπάνω αποτέλεσμα με έναν πιό άμεσο τρόπο. Γράφουμε την ενέργεια

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \mathcal{E}_0 \Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [\mathcal{E}_0 - \frac{1}{2} kx^2]}}$$

Θα πρέπει τώρα να αναρωτηθούμε ποιές είναι οι πιο κατάλληλες μεταβλητές για αυτό το πρόβλημα, δηλαδή, πώς θα βρούμε κατάλληλες αδιάστατες μεταβλητές. Συγκρίνοντας τον πρώτο και δεύτερο όρο (στο αριστερό μέλος) στην εξίσωση της ενέργειας παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\sqrt{m/k}$ έχει διαστάσεις χρόνου. Επίσης συγκρίνοντας τον δεύτερο όρο (στο αριστερό μέλος) και το \mathcal{E}_0 βλέπουμε ότι η ποσότητα $\sqrt{2\mathcal{E}_0/k}$ έχει διαστάσεις μήκους. Άρα οι αδιάστατες μεταβλητές για τον χρόνο και την θέση είναι οι \bar{t} και \bar{x} τις οποίες έχουμε ήδη ορίσει. Τις εισάγουμε στην εξίσωση και έχουμε

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [\mathcal{E}_0 - \frac{1}{2} kx^2]}} \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k}} (\bar{t} - \bar{t}_0) = \pm \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \frac{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{k}} d\bar{x}}{\sqrt{\frac{2}{m} [\mathcal{E}_0 - \frac{1}{2} k \frac{2\mathcal{E}_0}{k} \bar{x}^2]}} \\ &\Rightarrow \bar{t} - \bar{t}_0 = \pm \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}} \end{aligned}$$

η οποία είναι η εξίσωση την οποία βρήκαμε και παραπάνω με τον πρώτο τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος.

Άσκηση. Από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (2.3.3) να παραχθεί μία εξίσωση δεύτερης τάξης.

2.4 Δυναμική ενέργεια και δυνάμεις

2.4.1 Σταθερό δυναμικό

Αν υποθέσουμε την δυναμική ενέργεια

$$V(x) = \text{const.}$$

τότε εύκολα υπολογίζουμε την δύναμη $F = -dV/dx = 0$. Η εξίσωση του Νεύτωνα είναι $m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{const.}$ και εκφράζει ουσιαστικά τον 1ο νόμο του Νεύτωνα.

2.4.2 Γραμμικό δυναμικό

Αν υποθέσουμε την δυναμική ενέργεια

$$V(x) = -cx, \quad c : \text{const.}$$

τότε εύκολα υπολογίζουμε την δύναμη $F = -dV/dx = c$. Ο νόμος του Νεύτωνα είναι $m\ddot{x} = c$.

Παράδειγμα. Έστω $c = -mg$ όπου m η μάζα σώματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Τότε το δυναμικό $V = mgx$ είναι το βαρυτικό δυναμικό και η εξίσωση σώματος σε βαρυτικό δυναμικό γράφεται και λύνεται ως εξής

$$m\ddot{x} = -mg \Rightarrow \ddot{x} = -g \Rightarrow \dot{x} = -gt + \alpha \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \alpha t + \beta,$$

όπου α, β είναι σταθερές.

2.4.3 Αρμονικός ταλαντωτής

Θα μελετήσουμε και πάλι το παραβολικό δυναμικό (το οποίο λέγεται και *αρμονικό δυναμικό* του παραδείγματος του προηγούμενου κεφαλαίου, θα ακολουθήσουμε όμως άλλη μέθοδο. Αφού γνωρίζουμε το δυναμικό μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη:

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow F = -\frac{dV}{dx} = -kx.$$

Όστε η εξίσωση του Νεύτωνα γίνεται

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (2.4.1)$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε την γενική λύση της εξίσωσης η οποία δίνει την θέση του σωματίου x σαν συνάρτηση του χρόνου t . Πρόκειται για μια γραμμική εξίσωση και για να βρούμε λύσεις δοκιμάζουμε την συνάρτηση

$$x(t) = C e^{i\omega t},$$

όπου το C είναι μιγαδική σταθερά. Αντικατάσταση της συνάρτησης στην εξίσωση δίνει

$$-m\omega^2 x + kx = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Ας θεωρήσουμε $\omega = \sqrt{k/m}$ και $C = A e^{i\phi_0}$ όπου A και ϕ_0 είναι πραγματικές σταθερές. Η γενική λύση γράφεται

$$x(t) = A e^{i\omega t + \phi_0},$$

όπου οι A και ϕ_0 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Μία σημαντική παρατήρηση είναι ότι η λύση που βρήκαμε είναι μιγαδική και άρα δεν μπορεί να περιγράφει την θέση ενός σωματίου. Όμως, επειδή η αρχική διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, ξέρουμε ότι και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της λύσης είναι λύσεις της εξίσωσης. Άρα η πραγματική λύση μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0).$$

Η λύση αυτή περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές (A, ϕ_0) και άρα είναι η γενική λύση της εξίσωσης δεύτερης τάξης (2.4.1).

Η λύση (2.4.2) περιγράφει μία περιοδική κίνηση η οποία λέγεται *αρμονική ταλάντωση* με πλάτος (δηλ., μέγιστη απόκλιση από το κέντρο $x = 0$ της ταλάντωσης) ίσο με A και συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$. Σημειώνουμε ότι η γενική λύση μπορεί να γραφεί και στην μορφή

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0). \quad (2.4.2)$$

Άσκηση. Έστω ένα σώμα το οποίο βρίσκεται σε δυναμικό $V = 1/2 kx^2$. Δίδεται ότι η θέση του σωματίου κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x(t = 0) = 0$ και η ταχύτητά του είναι $v(t = 0) = 1$. Βρείτε την θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου.

Λύση: Το σύστημα ικανοποιεί την Εξ. (2.4.1) με γενική λύση την (2.4.2). Με τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0) \Rightarrow x(t=0) = A \sin \phi_0 \quad \text{άρα} \quad A \sin \phi_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0, \pi,$$

όπου έχουμε εξαιρέσει την τετριμμένη περίπτωση $A = 0$. Ας υποθέσουμε $\phi = 0$, οπότε έχουμε για την ταχύτητα

$$\dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \dot{x}(t=0) = \omega A \cos(0) \quad \text{άρα} \quad \omega A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\omega}.$$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

η οποία γράφεται

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

Παρατήρηση: Αν είχαμε επιλέξει $\phi_0 = \pi$ θα καταλήγαμε στην ίδια λύση.

Άσκηση. Δείξτε ότι η γενική πραγματική λύση γράφεται στην μορφή

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

όπου A, B είναι πραγματικές σταθερές.

Λύση: Χρησιμοποιούμε την σχέση

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

ώστε

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) = A[\cos(\omega t) \cos \phi_0 + \sin(\omega t) \sin \phi_0] = A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t),$$

όπου θέσαμε $A' := A \cos \phi_0$, $B' := A \sin \phi_0$.

Άσκηση. Ένα σωματίο μάζας m βρίσκεται σε παραβολικό δυναμικό $V(x) = 1/2kx^2$. Γράψτε την θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου όταν σε χρόνο $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = 1$ και έχει ταχύτητα $v = 0$. Ποιά είναι η ενέργειά του;

Άσκηση. Ένα σωματίο μάζας m βρίσκεται σε παραβολικό δυναμικό $V(x) = 1/2kx^2$. Η θέση του δίνεται από την $x = x_{\max} \cos(\omega t + \phi_0)$, όπου $\omega = \sqrt{k/m}$. Αν οι σταθερές x_{\max}, ϕ_0 είναι γνωστές, βρείτε την ενέργειά του η οποία δίνεται από την Εξ. (2.3.3).

2.4.4 Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση

Θεωρούμε έναν αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος συναντά κάποια αντίσταση κατά την κίνησή του (π.χ., τριβή, αντίσταση του αέρα, κλπ). Μία τέτοια διαδικασία παριστάνεται από έναν επιπλέον όρο στο δεξιό μέλος της εξίσωσης του Νεύτωνα (2.4.1) της μορφής $-c\dot{x}$ όπου c είναι μία σταθερά. Αυτός ο όρος παριστάνει δύναμη που μειώνει την επιτάχυνση όταν $c > 0$. Γράφουμε λοιπόν την εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (2.4.3)$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι της μορφής $x = Ce^{qt}$, την οποία αντικαθιστούμε στην εξίσωση για να βρούμε την συνθήκη

$$mq^2 + cq + k = 0 \Rightarrow q = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.$$

Βλέπουμε ότι το q έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Στην περίπτωση σχετικά μικρής απόσβεσης, όπου $c^2 < 4mk$, γράφουμε

$$q = -\alpha \pm i\omega, \quad \alpha := \frac{c}{2m}, \quad \omega := \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m},$$

η λύση γράφεται

$$x(t) = Ce^{-\alpha t} e^{i\omega t}$$

και παριστάνει ταλάντωση με μειούμενο πλάτος.

Αν υποθέσουμε ότι η ενέργεια του ταλαντωτή είναι η

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2,$$

τότε αυτή θα μειώνεται καθώς το πλάτος της ταλάντωσης θα μειώνεται. Μπορούμε να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ως εξής

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = -c\dot{x}^2 < 0$$

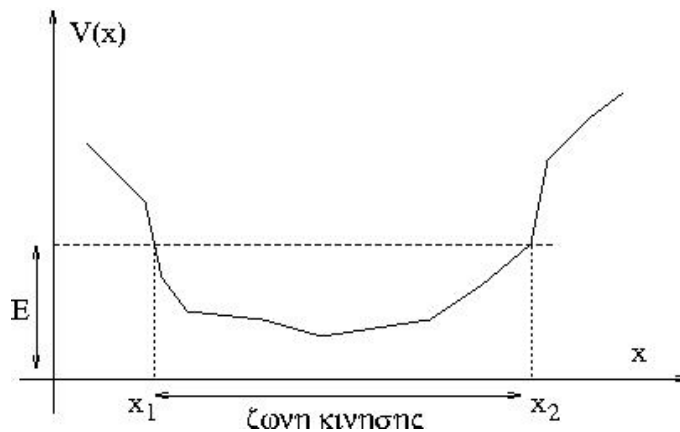
δηλαδή, η ενέργεια \mathcal{E} μειώνεται με τον χρόνο.

2.4.5 Γενικά δυναμικά

Ας υποθέσουμε ένα δυναμικό το οποίο έχει ένα τοπικό ελάχιστο όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Για να καταλάβουμε ποιοτικά την κίνηση σωματίου γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [\mathcal{E} - V(x)]}, \quad (2.4.4)$$

όπου \mathcal{E} είναι η σταθερά που δίνει την ενέργεια του σωματίου. Ας υποθέσουμε ότι \mathcal{E} είναι μεγαλύτερη από το ελάχιστο του $V(x)$ και ότι έχουμε δύο σημεία x_1, x_2 εκατέρωθεν της



Σχήμα 2.2: Ένα δυναμικό το οποίο παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

θέσης του ελαχίστου για τα οποία ισχύει $\mathcal{E} = V(x_1)$ και $\mathcal{E} = V(x_2)$. Πρέπει να είναι σαφές ότι η κίνηση είναι δυνατή μόνο στο διάστημα $x_1 \leq x \leq x_2$ όπου $\mathcal{E} > V(x)$, δηλαδή στο διάστημα όπου η υπόριζος ποσότητα στην Εξ. (2.4.4) είναι μη αρνητική. Στα άκρα του διαστήματος η Εξ. (2.4.4) δίνει $v(x_1) = 0$, $v(x_2) = 0$ και, με βάση το σχήμα, βλέπουμε ότι η ταχύτητα ενός σωματίου που κινείται μέσα σε αυτό το δυναμικό αλλάζει πρόσημο κάθε φορά που αυτό φθάνει στα σημεία x_1 ή x_2 . Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ένα σωματίο θα παλινδρομεί μεταξύ των x_1 και x_2 .

Παρατηρούμε επίσης ότι η ταχύτητα v είναι συνάρτηση της θέσης $v = v(x)$ και μόνο. Αυτή η παρατήρηση σε συνδυασμό με την Εξ. (2.4.4) (ή ακριβέστερα την (2.3.4)) δείχνει ότι η χρονική διάρκεια της κίνησης από το x_1 στο x_2 και πάλι στο x_1 είναι σταθερή και άρα μπορεί κανείς τελικά να συμπεράνει ότι η κίνηση ενός σωματίου μέσα σε ένα τυχαίο δυναμικό, σαν αυτό του σχήματος, είναι περιοδική.

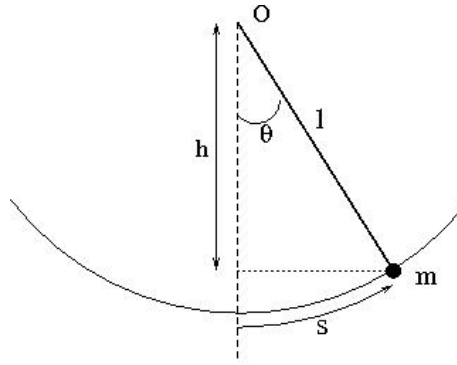
2.4.6 Απλό εκκρεμές

Υποθέτουμε ότι μία σημειακή μάζα m εξαρτάται από σημείο O μέσω μιάς αβαρούς ράβδου με μήκος ℓ όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Η δυναμική ενέργεια αυτού του συστήματος είναι $V = -mgh$ όπου το h θεωρείται θετικό όταν η μάζα είναι χαμηλότερα του σημείου O . Το σημείο αναφοράς γι' αυτή την δυναμική ενέργεια είναι το O , όπου $h = 0$ και άρα $V = 0$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι $h = \ell \cos \theta$, όπου θ είναι η γωνιά σε πολικές συντεταγμένες που μετράται από την κατακόρυφο (διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα). Ωστε βρίσκουμε δυναμική ενέργεια

$$V(\theta) = -mg\ell \cos \theta. \quad (2.4.5)$$

Γιά να γράψουμε την εξίσωση κίνησης ορίζουμε το μήκος τόξου που διανύει το σωματίο $s = \ell\theta$ από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του. Η επιτάχυνσή του είναι $\ddot{s} = \ell\ddot{\theta}$. Από αυτήν προκύπτει η εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{s} = -\frac{dV}{ds} \Rightarrow m\ell\ddot{\theta} = -\frac{1}{\ell} \frac{dV}{d\theta} \Rightarrow m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$



Σχήμα 2.3: Το απλό εκκρεμές.

Μία απλή λύση που μπορούμε να βρούμε είναι η $\theta(t) = 0$ πράγμα που σημαίνει ότι η κατακόρυφη θέση $\theta = 0$ είναι μία θέση ισορροπίας του εκκρεμούς. Γενικά, η παραπάνω εξίσωση είναι μη γραμμική και η γενική λύση της είναι περίπλοκη.

Μπορούμε όμως να μελετήσουμε μία προσέγγισή της στην περίπτωση που το εκκρεμές δεν αποκλίνει πολύ από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του, δηλαδή για $\theta \ll 1$. Η προσέγγιση μπορεί να γίνει με τους ακόλουθους δύο τρόπους.

Ο πρώτος τρόπος είναι να κάνουμε την προσέγγιση στην εξίσωση κίνησης. Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \theta \ll 1,$$

την οποία αντικαθιστούμε στην εξίσωση κίνησης. Βρίσκουμε

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \quad (2.4.6)$$

της οποίας η λύση είναι

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi_0), \quad \omega := \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Δηλαδή έχουμε περιοδική κίνηση με συχνότητα ω και περίοδο $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

Ο δεύτερος τρόπος είναι να γράψουμε μία προσέγγιση για την δυναμική ενέργεια. Έχουμε

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \theta \ll 1,$$

την οποία αντικαθιστούμε στην δυναμική ενέργεια. Βρίσκουμε

$$V(\theta) = \frac{1}{2} mgl \theta^2 - mgl.$$

Ο σταθερός όρος στην δυναμική ενέργεια $-mgl$ δίνει μηδενική δύναμη, όπως έχουμε δει παραπάνω και άρα δεν θα επηρεαστεί η εξίσωση κίνησης αν τον παραλήψουμε. Γράφουμε τελικά για το προσεγγιστικό δυναμικό

$$V(\theta) = \frac{1}{2} mgl \theta^2.$$

Η εξίσωση κίνησης προκύπτει τώρα ως εξής

$$m\ell\ddot{\theta} = -\frac{1}{\ell}\frac{dV}{d\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0,$$

και συμπίπτει με αυτή που βρήκαμε με τον πρώτο τρόπο.

Παρατήρηση. Μπορούμε να έχουμε μία εκτίμηση της συχνότητας της κίνησης πριν καν λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης. Παρατηρούμε ότι οι φυσικές σταθερές και οι αντίστοιχες διαστάσεις τους είναι m : [μάζα], g : [μήκος]/[χρόνος]², ℓ : [μήκος]. Ο μόνος συνδυασμός τους που δίνει διαστάσεις [χρόνος] είναι ο $\sqrt{\ell/g}$. Είναι λοιπόν σαφές ότι αυτή η τελευταία σταθερά θα είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος του συστήματος (στην προκειμένη περίπτωση σχετίζεται με την περίοδο της ταλάντωσης).

Γιά να γίνει πιά σαφής η αξία αυτής της παρατήρησης, θα μπορούσε κανείς να ορίσει μία νέα αδιάστατη μεταβλητή \bar{t} για τον χρόνο από την σχέση

$$t := \bar{t} \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Με την βοήθεια αυτής η Εξ. (2.4.6) γράφεται

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{t}^2} + \theta = 0$$

όπου δεν εμφανίζεται καμμία φυσική σταθερά.

Άσκηση. Βρείτε όλα τα σημεία ισοροπίας του εκκρεμούς. Κάνετε για όλα τα σημεία την αρμονική προσέγγιση χρησιμοποιώντας την μέθοδο που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

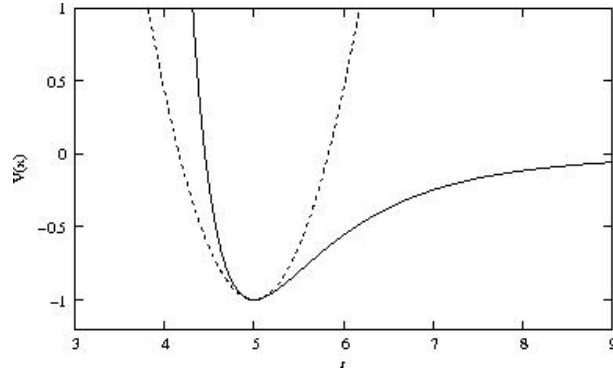
Άσκηση. Σχεδιάστε το δυναμικό (2.4.5). (α) Τι είδους κίνηση κάνει ένα σωματίο με ενέργεια $-mgl < \mathcal{E} < mgl$; Είναι η περίοδος της κίνησης μεγαλύτερη ή μικρότερη από $2\pi\sqrt{\ell/g}$; (β) Τι κίνηση κάνει ένα σωματίο με ενέργεια $|\mathcal{E}| > mgl$; (γ) Τι κίνηση κάνει ένα σωματίο με ενέργεια $\mathcal{E} = mgl$; [Δώστε κατ' αρχήν ποιοτικές απαντήσεις στα ερωτήματα. Η πλήρης ποσοτική μελέτη του προβλήματος είναι σχετικά εκτενής.] □

2.5 Δυναμικό χημικού δεσμού

Ο χημικός δεσμός μεταξύ δύο ατόμων προκύπτει από την αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Μπορούμε να περιγράψουμε τέτοιες αλληλεπιδράσεις με την βοήθεια δυναμικών και ένα εμπειρικό τέτοιο δυναμικό είναι το λεγόμενο δυναμικό Lennard-Jones

$$V(r) = D \left(\frac{R}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R}{r} \right)^6.$$

Αυτή η μορφή δυναμικού (η οποία παριστάνεται στο σχήμα με την συνεχή γραμμή) περιγράφει δεσμούς Van der Waals μεταξύ των ατόμων, δηλαδή αλληλεπιδράσεις διπόλου-διπόλου. Η απόσταση μεταξύ των ατόμων είναι r , ενώ D και R_0 είναι εμπειρικές σταθερές.



Σχήμα 2.4: Το δυναμικό Lennard Jones (γιά $D = 1, R = 5$) παριστάνεται με την συνεχή γραμμή. Ένα παραβολικό δυναμικό παριστάνεται με την διακεκομμένη γραμμή.

Γιά να σχεδιάσουμε το γράφημα της V παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι

$$\begin{aligned} V(r) &\rightarrow \infty, & \text{as } r &\rightarrow 0 \\ V(r) &\rightarrow 0, & \text{as } r &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Γιά να αποκτήσουμε πληρέστερη εικόνα του γραφήματος της V πρέπει να βρούμε τις παραγώγους της:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{12}{r} \left[\left(\frac{R}{r} \right)^6 - D \left(\frac{R}{r} \right)^{12} \right],$$

ώστε το δυναμικό έχει ακρότατο στο σημείο $r = r_0$, όπου

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow D \left(\frac{R}{r_0} \right)^6 = 1 \Rightarrow r_0 = D^{1/6} R,$$

με τιμή $V(r = r_0) = -1/D$. Με υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου βρίσκουμε ότι

$$\frac{d^2V}{dr^2}(r = r_0) = \frac{72}{R^2 D^{4/3}}$$

και άρα έχουμε ελάχιστο. Συμπεραίνουμε ότι τα άτομα, σε κατάσταση ισορροπίας, βρίσκονται σε απόσταση μεταξύ τους $r = r_0$, αφού εκεί η δύναμη μεταξύ τους $F = -dV/dr$ μηδενίζεται.

Αν και η γενική περιγραφή της δυναμικής των ατόμων είναι συνήθως περίπλοκη, μπορούμε όμως να την περιγράψουμε σχετικά απλά όταν αυτά βρίσκονται κοντά στην θέση ισορροπίας τους. Προσεγγίζουμε το δυναμικό με το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο $r = r_0$:

$$V \approx V_0 + \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r=r_0} (r - r_0)^2 = V_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r=r_0} (r - r_0)^2,$$

όπου $V_0 = V(r = r_0)$ είναι μία σταθερά. Η $d^2V/dr^2(r = r_0)$ είναι επίσης μία σταθερά την οποία θα ονομάσουμε k . Τότε το σύστημά μας περιγράφεται από το δυναμικό

$$V(r) = \frac{1}{2} kq^2,$$

όπου θέσαμε την σταθερά $k := d^2V/dr^2(r = r_0)$ και την απόκλιση από την θέση ισορροπίας $q := r - r_0$. Επίσης, παραλείψαμε την σταθερά V_0 η οποία δεν θα επηρεάσει τις εξισώσεις κίνησης. Η παραβολική αυτή προσεγγιστική μορφή του δυναμικού γύρω από το ελάχιστο $r = r_0$ παριστάνεται στο σχήμα με την διακεκομμένη γραμμή.

Άσκηση. Βρείτε αριθμητικά λύσεις της εξίσωσης του Νεύτωνα για την περίπτωση του δυναμικού Lennard-Jones για ενέργεια $\mathcal{E} < 0$ και για $\mathcal{E} > 0$. Ποιά είναι η περίοδος της κίνησης σαν συνάρτηση του \mathcal{E} (για την περίπτωση περιοδικής κίνησης);

Βιβλιογραφία: [4, 6]

Κεφάλαιο 3

Εξισώσεις Euler-Lagrange

3.1 Γενικευμένες συντεταγμένες

Η θέση κάθε σωματίου στον χώρο μπορεί να περιγραφεί από τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες. Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα N σωματιών, τότε αυτό περιγράφεται γενικά από $3N$ συντεταγμένες οι οποίες θα μπορούσαν να είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σωματιών. Σε πολλές όμως περιπτώσεις αυτές δεν είναι οι πιο κατάλληλες μεταβλητές για την περιγραφή του συστήματος, ενώ υπάρχουν κάποιες άλλες μεταβλητές οι οποίες περιγράφουν με απλούστερο τρόπο το συγκεκριμένο σύστημα. Μία κατηγορία συστημάτων όπου αυτό συμβαίνει συχνά είναι για κινήσεις οι οποίες υπόκεινται σε δεσμούς και τότε είναι δυνατόν να χρειάζονται λιγότερες από $3N$ μεταβλητές για να περιγράψουν το σύστημα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ένα σωματίο το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται πάνω σε μία σφαίρα. Τότε δεν είναι αναγκαίες τρεις μεταβλητές (π.χ., οι τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες) για να περιγράψουν την κίνηση, αλλά, π.χ., μόνο οι δύο γωνίες σφαιρικών συντεταγμένων αρκούν. Επίσης, η θέση ενός σωματίου το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται επάνω σε κύκλο δεδομένης ακτίνας ℓ (π.χ., το απλό εκκρεμές) περιγράφεται από μία μόνο μεταβλητή, η οποία είναι μία γωνία θ .

Γιά να περιγράψουμε γενικότερα συστήματα με μεταβλητές οι οποίες είναι ενδεχομένως κατάλληλες για το συγκεκριμένο κάθε φορά σύστημα εισάγουμε την έννοια των *γενικευμένων συντεταγμένων*. Γιά ένα σύστημα N σωματιών ορίζουμε τις n μεταβλητές q_i έτσι ώστε να περιγράφουν πλήρως το σύστημα. Τότε οι καρτεσιανές συντεταγμένες δίνονται από σχέσεις της μορφής

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (3.1.1)$$

Σαν παράδειγμα μετασχηματισμού της μορφής (3.1.1) σκεφθείτε ότι οι q_i μπορεί να είναι οι πολικές συντεταγμένες r, θ . Περιμένουμε ότι γενικά θα ισχύει $n \leq 3N$.

3.2 Εξισώσεις Νεύτωνα και εξισώσεις Lagrange

Ο σκοπός μας τώρα είναι να γράψουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα για γενικευμένες συντεταγμένες. Στα βήματα που ακολουθούν είναι αναγκαίο ο αναγνώστης να κατανοήσει τις

έννοιες και την χρήση της μερικής και ολικής παραγώγου. Ένα βασικό σημείο είναι ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες x_i καθώς και οι γενικευμένες συντεταγμένες q_k είναι συναρτήσεις του χρόνου. Δηλαδή, η λύση του συστήματος είναι τελικά της μορφής $x_i = x_i(t)$ είτε $q_k = q_k(t)$. Χρησιμοποιούμε τις (3.1.1) και τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης για να γράψουμε τις χρονικές παραγώγους των συντεταγμένων:

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k},$$

Στην παραπάνω σχέση και στις επόμενες αυτής της παραγράφου θεωρούμε πάντα ότι οι δείκτες παίρνουν τις τιμές $i = 1, \dots, 3N$ και $k = 1, \dots, n$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω με \dot{x}_i και παραγωγίζουμε με τον τελεστή d/dt :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial q_k}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε με την μάζα m_i του κάθε σωματίου και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης και χρησιμοποιούμε την εξίσωση του Νεύτωνα $m_i \ddot{x}_i = F_i$ για να βρούμε

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right).$$

Τελικά αθροίζουμε στον δείκτη i και βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (3.2.1)$$

όπου T είναι η κινητική ενέργεια.

Είναι τώρα σημαντικό να καταλάβουμε την έννοια του πρώτου όρου στο δεξιό μέλος. Για τον σκοπό αυτό γράφουμε το έργο της δύναμης

$$\sum_i F_i dx_i = \sum_i F_i \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k = \sum_k \left(\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) dq_k.$$

Ονομάζουμε την

$$Q_k := \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (3.2.2)$$

γενικευμένη δύναμη, ώστε το έργο γράφεται $\sum_i F_i dx_i = \sum_k Q_k dq_k$.

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις παράγονται από δυναμικό, δηλ., $F_i = -\partial V / \partial x_i$, έχουμε

$$Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (3.2.3)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγωγίσης.

Παράδειγμα. Ο απλούστερος τρόπος να περιγράψουμε το απλό εκκρεμές είναι να χρησιμοποιήσουμε μία γωνία θ η οποία περιγράφει την απόκλιση του εκκρεμούς από την κατακόρυφο. Άρα το απλό εκκρεμές περιγράφεται από μία γενικευμένη συντεταγμένη, την γωνία θ . Η δυναμική του ενέργεια έχουμε δει ότι γράφεται ως $V = -mgl \cos \theta$. Άρα η γενικευμένη δύναμη είναι

$$Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta. \square$$

Αντικαθιστώντας την (3.2.3) στην (3.2.1) βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης για τις γενικευμένες συντεταγμένες q_k

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}. \quad (3.2.4)$$

Οι εξισώσεις παίρνουν μία πιό συμπαγή μορφή εάν ορίσουμε την συνάρτηση

$$L := T - V \quad (3.2.5)$$

η οποία ονομάζεται Lagrangian (Λαγκρανζιανή) του συστήματος και αφού παρατηρήσουμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},$$

δεδομένου ότι συνήθως υποθέτουμε $V = V(q_k)$. Οι εξισώσεις κίνησης τότε γράφονται

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.2.6)$$

και ονομάζονται εξισώσεις Lagrange. Παρατηρήστε ότι ένα μηχανικό σύστημα που ορίζεται από n γενικευμένες συντεταγμένες περιγράφεται από ένα σύστημα n εξισώσεων Lagrange.

Παράδειγμα. Έστω ο αρμονικός ταλαντωτής με κινητική και δυναμική ενέργεια

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} k x^2.$$

Εδώ έχουμε μία συντεταγμένη, την x .

Η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2.$$

Υπολογίζουμε

$$\frac{dL}{d\dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{dL}{dx} = -kx$$

και άρα η εξίσωση Lagrange γράφεται

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) = \frac{dL}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0. \square$$

Παράδειγμα. Έστω το απλό εκκρεμές με κινητική και δυναμική ενέργεια

$$T = \frac{1}{2} m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2, \quad V = -mg\ell \cos \theta,$$

οπότε η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta.$$

Και για αυτό το πρόβλημα έχουμε μία γενικευμένη συντεταγμένη, την γωνία θ .

Υπολογίζουμε

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta}, \quad \frac{dL}{d\theta} = -mg\ell \sin \theta$$

και άρα η εξίσωση Lagrange γράφεται

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) = \frac{dL}{d\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\ell^2 \dot{\theta}) = -mg\ell \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \square$$

Παράδειγμα. Έστω ένα σωματίο το οποίο κινείται σε δύο διαστάσεις και βρίσκεται σε κεντρικό δυναμικό, δηλαδή, όταν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , το δυναμικό γράφεται $V = V(r)$. Η κινητική του ενέργεια σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

και άρα η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r).$$

Έχουμε δύο γενικευμένες συντεταγμένες r, θ και άρα δύο εξισώσεις Lagrange. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}, & \frac{dL}{d\theta} &= 0 \end{aligned}$$

και άρα οι εξισώσεις Lagrange είναι οι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0. \square \end{aligned}$$

Άσκηση. (Logan, Άσκ. 5.13) Θωρήστε το κεντρικό δυναμικό $V(r) = -k/r^2$. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. (β) Λύστε αναλυτικά τις εξισώσεις κίνησης. (γ) Προσδιορίστε την κίνηση.

Ας υποθέσουμε ότι στο σύστημα ασκούνται δυνάμεις και ορισμένες μόνο από αυτές παράγονται από δυναμικό $V(q_1, \dots, q_n)$, δηλ.,

$$Q_k = Q'_k - \frac{\partial V}{\partial q_k},$$

όπου Q_k είναι οι συνολικές δυνάμεις και Q'_k είναι το μέρος των δυνάμεων οι οποίες δεν παράγονται από το δυναμικό V . Τότε ξεκινάμε από την (3.2.1), όπου οι Q_k είναι όπως στην (3.2.2) και αντικαθιστούμε την παραπάνω μορφή των γενικευμένων δυνάμεων. Ορίζουμε την Λαγκρανζιανή $L = T - V$ και οι εξισώσεις γράφονται ως

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Οι Q'_k δίνονται από εξίσωση ανάλογη της (3.2.2):

$$Q'_k := \sum_i F'_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

όπου F'_i είναι τώρα οι δυνάμεις που δεν δίνονται από το δυναμικό.

Άσκηση. Έστω αρμονικός ταλαντωτής σε μία διάσταση στον οποίο ασκείται μία επιπλέον δύναμη τριβής $f = -c\dot{x}$, όπου c μία σταθερά. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Lagrange.

Λύση: Η Λαγκρανζιανή είναι (όπου αγνοείται η δύναμη τριβής)

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2.$$

Στις εξισώσεις Lagrange πρέπει να λάβουμε επιπλέον υπ' όψιν τη δύναμη τριβής. Αυτή είναι ίση με την γενικευμένη δύναμη $Q_x = f$, η οποία θα προστεθεί στο δεξιό μέλος της εξίσωσης. Η πλήρης εξ. Lagrange είναι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} + Q_x \Rightarrow m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = 0. \square$$

Άσκηση. Έστω ένα σωματίο το οποίο βρίσκεται σε δυναμικό $V = V(r)$, όπου (r, θ) είναι πολικές συντεταγμένες. Μία επιπλέον δύναμη τριβής $\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v}$ (η οποία δεν περιέχεται στο δυναμικό) ασκείται σε αυτό το σωματίο, όπου λ είναι μία σταθερά και \mathbf{v} είναι η ταχύτητά του. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησής του.

Λύση: Χρειάζεται να βρούμε τις γενικευμένες δυνάμεις που προκύπτουν από την δύναμη τριβής για να γράψουμε τις εξισώσεις Lagrange. Εφαρμόζουμε την (3.2.2) η οποία εδώ γράφεται ως εξής

$$Q_r = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \quad Q_\theta = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta},$$

όπου $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r$. Έχουμε $\partial \mathbf{r} / \partial r = \hat{\mathbf{e}}_r$ και επίσης, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $\hat{\mathbf{e}}_r = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$, βρίσκουμε $\partial \mathbf{r} / \partial \theta = r \hat{\mathbf{e}}_\theta$. Άρα έχουμε τις γενικευμένες δυνάμεις

$$Q_r = \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r, \quad Q_\theta = r \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Η δύναμη τριβής σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v} = -\lambda (\dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta)$$

και άρα έχουμε

$$Q_r = -\lambda \dot{r}, \quad Q_\theta = -\lambda r^2 \dot{\theta}.$$

Αυτές οι γενικευμένες δυνάμεις πρέπει να προστεθούν στο δεύτερο μέλος των εξισώσεων Lagrange (τις οποίες έχουμε βρει σε προηγούμενο παράδειγμα). Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial r} + Q_r \Rightarrow m \ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr} - \lambda \dot{r} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} + Q_\theta \Rightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = -\lambda r^2 \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η 2η εξίσωση μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = -\frac{\lambda}{m} (m r^2 \dot{\theta})$$

ώστε αν θέσουμε

$$J := m r^2 \dot{\theta},$$

αυτή γράφεται και λύνεται ως εξής

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{\lambda}{m} J \Rightarrow J(t) = J_0 e^{-\frac{\lambda}{m} t}.$$

Η ποσότητα J λέγεται *στροφορμή* του σωματίου. Η σταθερά της ολοκλήρωσης J_0 είναι η στροφορμή την χρονική στιγμή $t = 0$, δηλ., $J(t = 0) = J_0$. Βλέπουμε ότι η στροφορμή μειώνεται με τον χρόνο λόγω της δύναμης τριβής. \square

Βιβλιογραφία: [4, 6]

3.3 Λογισμός μεταβολών

3.3.1 Αρχή του Hamilton

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε μία πιά γενική αιτιολόγηση για τις εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος σωμάτων, δηλαδή θα εξάγουμε τις εξισώσεις Lagrange από μία γενική αρχή. Ας υποθέσουμε ένα σύστημα που περιγράφεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_1, \dots, q_n . Σε κάθε χρονική στιγμή η κατάσταση του συστήματος δίνεται από τις τιμές των συντεταγμένων. Άρα η εξέλιξη του στον χρόνο μπορεί να περιγραφεί σαν κίνηση στον n -διάστατο χώρο των συντεταγμένων.

Η κίνηση ενός συστήματος σωμάτων μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια μίας πραγματικής συνάρτησης η οποία παίζει το ρόλο ενός γενικευμένου δυναμικού. Η συνάρτηση αυτή είναι η Λαγκρανζιανή L . Η αρχή του Hamilton βασίζεται στο ολοκλήρωμα της L στον χρόνο, από μία αρχική στιγμή t_1 σε μία τελική στιγμή t_2 :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt. \quad (3.3.1)$$

Η αρχή αυτή λέει ότι από όλες τις πιθανές κινήσεις στον χώρο το σώμα επιλέγει να κινηθεί σε αυτήν για την οποία το I έχει ελάχιστη τιμή.

Σύμφωνα με όσα ξέρουμε για ελάχιστα συναρτήσεων, η παράγωγος μίας συνάρτησης σε ένα ελάχιστο, μηδενίζεται. Άρα η αρχή του Hamilton διατυπώνεται και ως

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt = 0,$$

όπου το σύμβολο δI δηλώνει την μεταβολή του I .

3.3.2 Εξισώσεις Euler-Lagrange

Θα εξετάσουμε μεθόδους για να υπολογίσουμε την μεταβολή μίας συνάρτησης της μορφής του I και θα βρούμε την συνθήκη ώστε η μεταβολή της να μηδενίζεται.

Γιά να απλοποιήσουμε το πρόβλημα, υποθέτουμε μόνο μία συνάρτηση $y = y(x)$ (μίας μεταβλητής x) και ενδιαφερόμαστε για το ολοκλήρωμα

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x) dx,$$

όπου $y_x := dy/dx$. Η ποσότητα $J[y]$ ονομάζεται *συναρτησιακό* διότι δεν είναι μία συνηθισμένη συνάρτηση, αλλά η τιμή της εξαρτάται από την πλήρη μορφή μίας συνάρτησης $y(x)$. Άρα, ένα συναρτησιακό ορίζεται πάνω σε ένα σύνολο συναρτήσεων (και όχι σε μία περιοχή στον χώρο των συντεταγμένων).

Παράδειγμα. Ποιό είναι το μήκος καμπύλης $y = y(x)$ η οποία περνάει από τα σημεία $(x_1, y(x_1))$ και $(x_2, y(x_2))$;

Το ζητούμενο μήκος δίνεται από το ακόλουθο συναρτησιακό

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x^2} dx.$$

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι να βρούμε την καμπύλη με το μικρότερο (ελάχιστο) μήκος που διέρχεται από τα δεδομένα σημεία. Είναι προφανές ότι αυτή προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού J . Γιά τη λύση όμως του προβλήματος της ελαχιστοποίησης του J θα χρειαστούμε ορισμένα αποτελέσματα από τον λογισμό μεταβολών, τα οποία εκτίθενται στην συνέχεια. \square

Το θεμελιώδες πρόβλημα του λογισμού μεταβολών είναι να βρεθεί το ελάχιστο του ολοκληρώματος $J[y]$ όπου τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) , με $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$, είναι δεδομένες. Θα μελετήσουμε αυτό το πρόβλημα για το σύνολο A των συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες, και είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες, $y \in C^2[x_1, x_2]$.

Θα χρειαστούμε την έννοια της γειτονιάς συνάρτησης $f(x)$, μέσα στο σύνολο A , η οποία ορίζεται ως εξής. Έστω $h > 0$, τότε στην γειτονιά (h) της συνάρτησης f βρίσκονται οι συναρτήσεις $f_1(x)$ για τις οποίες ισχύει $|f(x) - f_1(x)| < h$ σε όλο το διάστημα (πεδίο) ορισμού τους.

Ας θεωρήσουμε συνάρτηση $y_0(x) \in A$ για την οποία το συναρτησιακό J έχει ελάχιστο, δηλαδή $J[y_0] \leq J[y]$ για κάθε y στη γειτονιά του y_0 . Υποθέτουμε τώρα μία συνάρτηση $\eta(x)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και με $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$. Εισάγουμε την παράμετρο ϵ και γράφουμε συναρτήσεις στην γειτονιά της συνάρτησης $y_0(x) \in A$ ως

$$y(x, \epsilon) = y_0(x) + \epsilon\eta(x).$$

Σημειώστε ότι έχουμε $y_0(x) = y(x, \epsilon = 0)$ και επίσης με τη συνθήκη μηδενισμού της η στα άκρα του διαστήματος έχουμε $y(x, \epsilon) \in A$. Η μεταβολή της συνάρτησης y συμβολίζεται με δy και είναι στην περίπτωση αυτή $\delta y = \eta(x)$.

Το συναρτησιακό J γίνεται τώρα μία συνάρτηση του ϵ και γράφεται

$$J(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \epsilon), y_x(x, \epsilon), x] dx.$$

Από τον λογισμό πραγματικών συναρτήσεων ξέρουμε ότι η διαφορά της J που αντιστοιχεί στην μεταβολή $\delta y = \eta(x)$ είναι

$$J[y_0 + \epsilon\eta] - J[y_0] = J'(\epsilon = 0)\epsilon + \dots$$

Είναι βέβαια σαφές ότι η παραπάνω διαφορά εξαρτάται από την επιλογή της $\eta(x)$.

Ορίζουμε ως μεταβολή του J κατά την διεύθυνση $\eta(x)$ την ποσότητα

$$\delta J[y_0, \eta] := J'(\epsilon = 0) = \frac{d}{d\epsilon} J[y_0 + \epsilon\eta] \Big|_{\epsilon=0}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\delta J[y_0, \eta] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J[y_0 + \epsilon\eta] - J[y_0]}{\epsilon},$$

δηλαδή ο ορισμός για την μεταβολή του J είναι αντίστοιχος του ορισμού παραγώγου κατά κατεύθυνση για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Η κατεύθυνση στην παρούσα περίπτωση είναι η συνάρτηση $\eta(x)$ και υπάρχουν κατ' αρχήν άπειρες επιλογές για αυτή την συνάρτηση.

Εφόσον θεωρήσουμε ότι το $J[y]$ έχει ελάχιστο για $y = y_0$, τότε για μία επιλογή του $\eta(x)$ η $J(\epsilon)$ έχει επίσης ελάχιστο για $\epsilon = 0$. Από τον απειροστικό λογισμό προκύπτει η αναγκαία συνθήκη $J'(\epsilon = 0) = 0$, η οποία γράφεται και $\delta J[y_0, \eta] = 0$.

Έχουμε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι αν $y_0 \in A$ είναι σημείο όπου το J έχει τοπικό ελάχιστο τότε η μεταβολή του J μηδενίζεται

$$\delta J[y_0, \eta] = 0$$

γιά όλες τις αποδεκτές συναρτήσεις $\eta(x)$.

Ας υπολογίσουμε το

$$\frac{d}{d\epsilon} J[y] = \frac{d}{d\epsilon} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x) dx, \quad y = y_0 + \epsilon \eta,$$

όπου θα θεωρήσουμε συναρτήσεις $f(y, y_x, x)$ οι οποίες είναι δύο φορές διαφορίσιμες ως προς όλες τις μεταβλητές. Με τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης έχουμε

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \epsilon} \right) dx$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος, με κατά παράγοντες ολοκλήρωση, γίνεται

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \epsilon} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \epsilon} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \frac{\partial y}{\partial \epsilon} dx.$$

Έχουμε $\partial y / \partial \epsilon = \eta(x)$ και άρα

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \right] \eta(x) dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y_x} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2}.$$

Εφόσον έχουμε υποθέσει $\eta(x) = 0$ στα άκρα του διαστήματος $x = x_1, x = x_2$ οι συνοριακοί όροι μηδενίζονται. Άρα έχουμε

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \right] \eta(x) dx. \quad (3.3.2)$$

και η συνθήκη για να έχουμε ακρότατο είναι $dJ/d\epsilon = 0$ για κάθε αποδεκτή συνάρτηση $\eta(x)$.

Στο σημείο αυτό χρειαζόμαστε το Θεμελιώδες λήμμα του Λογισμού Μεταβολών: Αν $\phi(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση και

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x) \eta(x) dx = 0$$

ισχύει για κάθε συνάρτηση $\eta(x)$ η οποία είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και μηδενίζεται στα όρια, τότε έχουμε $\phi(x) = 0$.

Σύντομη απόδειξη. Έστω $\phi(x) \neq 0$, π.χ., $\phi(x = \xi) > 0$. Τότε υπάρχει γειτονιά G του x ($\xi_0 < x < \xi_1$) όπου $\phi(x) > 0$. Τώρα εκλέγω $\eta(x) = (x - \xi_0)^4 (x - \xi_1)^4$ στο G και $\eta(x) = 0$ εκτός του G . Στην περίπτωση αυτή θα έχω $\int_{x_1}^{x_2} \phi \eta dx > 0$, το οποίο όμως αντιβαίνει στην υπόθεση. \square

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό που έχουμε εισάγει ως γράψουμε την (3.3.2) ως

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \right] \delta y dx.$$

Η συνθήκη $\delta J = 0$ με την βοήθεια του προηγούμενου λήμματος δίνει την ακόλουθη αναγκαία συνθήκη για να έχει ακρότατο το J :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0. \quad (3.3.3)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση λέγεται εξίσωση Euler-Lagrange. Οι λύσεις της y εξασφαλίζουν ότι $\delta J[y, \eta] = 0$ για κάθε η και λέμε ότι το y είναι στάσιμο σημείο του $J[y, \eta]$.

Παράδειγμα. Βρείτε την καμπύλη $y = y(x)$ η οποία συνδέει δύο σημεία $(x_1, y(x_1))$ και $(x_2, y(x_2))$ και έχει το ελάχιστο μήκος.

Έχουμε δει σε προηγούμενο παράδειγμα ότι το μήκος της καμπύλης δίνεται από το συναρτησιακό

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x^2} dx.$$

Για να βρούμε ακρότατα για το J πρέπει να βρούμε τις $y(x)$ για τις οποίες $\delta J = 0$, δηλαδή αρκεί να λύσουμε την εξίσωση Euler-Lagrange (3.3.3). Έχουμε

$$f = \sqrt{1 + y_x^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_x} = \frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}},$$

ώστε η εξίσωση (3.3.3) γράφεται

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} = c \Rightarrow y_x = a \Rightarrow y = ax + b,$$

όπου a, b, c είναι σταθερές (και μάλιστα $c = a/\sqrt{1 + a^2}$). Άρα η ζητούμενη καμπύλη είναι μία ευθεία. Τα a, b πρέπει να προσδιορισθούν έτσι ώστε η ευθεία να περνάει από τα δεδομένα σημεία. \square

Άσκηση. Στην γεωμετρική οπτική η αρχή του Fermat ορίζει ότι ο χρόνος που χρειάζεται μία ακτίνα φωτός για να ταξιδέψει μεταξύ δύο σημείων είναι ελάχιστος μεταξύ όλων των διαδρομών που συνδέουν τα δύο σημεία. Περιοριστείτε στο επίπεδο και θεωρήστε μέσο με δείκτη διάθλασης $n(x, y)$ (δηλαδή, η ταχύτητα στο μέσο είναι $c(x, y) = 1/n(x, y)$). Βρείτε την καμπύλη $y = y(x)$ την οποία ακολουθεί μία ακτίνα φωτός.

3.3.3 Ολοκλήρωμα δράσης

Το ολοκλήρωμα (3.3.1), του οποίου η ολοκληρωταία ποσότητα είναι η Λαγκρανζιανή και η ολοκλήρωση είναι στον χρόνο, λέγεται ολοκλήρωμα δράσης. Το I είναι ένα συναρτησιακό της μορφής που μελετήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους όπου τον ρόλο του x παίζει ο χρόνος t . Πρέπει όμως να προσέξουμε ότι το I εξαρτάται από n συναρτήσεις q_i (και όχι από μία μόνο συνάρτηση y όπως το $J[y]$).

Η γενίκευση του αποτελέσματος (3.3.3) για συναρτησιακό το οποίο εξαρτάται από n συναρτήσεις $J = J(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ είναι σχετικά απλή και αφήγεται σαν άσκηση.

Άσκηση. Βρείτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το ολοκλήρωμα δράσης

$$I = \int f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt. \square$$

Από την συνθήκη $\delta J = 0$ προκύπτουν οι εξής n εξισώσεις Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.3.4)$$

Αυτές συμπίπτουν με τις Εξ. (3.2.6).

3.3.4 Ανακεφαλαίωση των εξισώσεων Lagrange

Θα συνοψίσουμε τις μορφές των εξισώσεων Lagrange τις οποίες έχουμε δει μέχρι τώρα.

Γιά ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται από n μεταβλητές q_1, \dots, q_n και στο οποίο ασκούνται οι γενικευμένες δυνάμεις Q_k έχουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.3.5)$$

όπου στο αριστερό μέλος είναι κινητικοί όροι και στο δεξιό μέλος οι δυνάμεις. Οι Q_k δίνονται από την Εξ. (3.2.2).

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις παράγονται από δυναμικό $V(q_1, \dots, q_n)$ ορίζουμε την Λαγκρανζιανή και έχουμε την συνήθη μορφή των εξισώσεων

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.3.6)$$

Ας υποθέσουμε ότι στο σύστημα ασκούνται δυνάμεις και ορισμένες μόνο από αυτές παράγονται από δυναμικό $V(q_1, \dots, q_n)$, δηλ.,

$$Q_k = Q'_k - \frac{\partial V}{\partial q_k},$$

όπου Q_k είναι οι συνολικές δυνάμεις και Q'_k είναι το μέρος των δυνάμεων οι οποίες δεν παράγονται από το δυναμικό V . Τότε ορίζουμε την Λαγκρανζιανή $L = T - V$ και γράφουμε τις εξισώσεις ως

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.3.7)$$

Αυτή την εξίσωση έχουμε χρησιμοποιήσει σε προηγούμενα παραδείγματα όπου έπρεπε να λάβουμε υπ' όψιν δυνάμεις τριβής.

Βιβλιογραφία: [2, 4, 6]

3.4 Νόμοι διατήρησης

3.4.1 Ενέργεια

Οι εξισώσεις Lagrange είναι σε μορφή η οποία υποδεικνύει την ύπαρξη ποσοτήτων οι οποίες διατηρούνται κατά την διάρκεια της κίνησης. Για να βρούμε τέτοιες ποσότητες θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η ολική παράγωγος τους στον χρόνο μηδενίζεται.

Ο βασικότερος νόμος διατήρησης παράγεται ως εξής. Γράφουμε το ολικό διαφορικό της Λαγκρανζιανής

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right] + \frac{\partial L}{\partial t},$$

και χρησιμοποιούμε τις Εξ. Lagrange (3.2.6)

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right] + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Προκύπτει άμεσα ότι, στην περίπτωση $\partial L/\partial t = 0$, η ποσότητα

$$H := \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \quad (3.4.1)$$

είναι διατηρήσιμη. Αυτή λέγεται *ενέργεια* του συστήματος.

Παράδειγμα. Έστω ένα μονοδιάστατο σύστημα με Λαγκρανζιανή $L = 1/2 m \dot{x}^2 - V(x)$. Η ενέργειά του είναι

$$H = \frac{dL}{d\dot{x}} \dot{x} - L = (m\dot{x})\dot{x} - \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right] = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x).$$

Η ενέργεια H διατηρείται αφού $\partial L/\partial t = 0$. \square

Παράδειγμα. Έστω ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες και έχει Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r, \theta).$$

Γιά να υπολογίσουμε την ενέργεια έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

και άρα

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \left[\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r, \theta) \right] \\ &= m \dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + V(r, \theta) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r, \theta). \square \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες οι οποίες ορίζονται από τις

$$x_i = x_i(q_k).$$

Έχουμε

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Θα υποθέσουμε στα επόμενα την περίπτωση που $\partial L / \partial t = 0$, οπότε η κινητική ενέργεια γράφεται

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

όπου τα a_{jk} ορίζονται από την παραπάνω σχέση, δηλαδή,

$$a_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

και ισχύει $a_{jk} = a_{kj}$.

Η κινητική ενέργεια είναι μία ομογενής συνάρτηση δευτέρου βαθμού. Το θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις λέει

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \dots = 2T.$$

Θεωρούμε επίσης ότι η δυναμική ενέργεια είναι $V = V(q_k)$, οπότε

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T.$$

Βρίσκουμε τελικά

$$H = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T - (T - V) = T + V.$$

3.4.2 Γενικευμένη ορμή

Η μορφή των εξισώσεων Lagrange υποδεικνύει τις εξής σημαντικές ποσότητες

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

οι οποίες ονομάζονται *γενικευμένες ορμές*. Για κάθε γενικευμένη συντεταγμένη q_k υπάρχει η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή p_k . Άλλος όρος που χρησιμοποιείται για τις ποσότητες p_k είναι *κανονική ορμή*. Με αυτό τον ορισμό μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Lagrange στην μορφή

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (3.4.2)$$

οπότε βλέπουμε ότι η μεταβολή στον χρόνο μιάς γενικευμένης ορμής ισούται με ποσότητα η οποία είναι, στις συνήθεις περιπτώσεις, ίση με μία γενικευμένη δύναμη - έτσι δικαιολογείται και το όνομά τους.

Σημειώνουμε τέλος ότι, με τον συμβολισμό που εισαγάγαμε για τις γενικευμένες ορμές, η ενέργεια (3.4.1) ενός συστήματος γράφεται

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L.$$

Παράδειγμα. Έστω ένα μονοδιάστατο πρόβλημα με $T = 1/2 m \dot{x}^2$ και $L = T - V(x)$. Έχουμε την γενικευμένη ορμή

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x},$$

η οποία συμπίπτει με την συνήθη ορμή. \square

Παράδειγμα. Έστω ένα σωματίο που βρίσκεται σε κεντρικό δυναμικό (σε δύο διαστάσεις) και περιγράφεται από πολικές συντεταγμένες. Έχουμε

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad L = T - V(r),$$

ώστε οι δύο γενικευμένες ορμές είναι

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}.$$

Η p_r μοιάζει με συνήθη ορμή, ενώ η p_θ έχει μία ασυνήθιστη μορφή και ονομάζεται *στροφορμή* καθώς είναι ανάλογη (μέσω του $\dot{\theta}$) με τον ρυθμό περιστροφής του σωματίου. \square

Η σημαντικότερη ιδιότητα των γενικευμένων ορμών προκύπτει από τις εξισώσεις (3.4.2). Παρατηρούμε την εξής περίπτωση:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(p_k) = 0 \Rightarrow p_k = \text{σταθ.}$$

Δηλαδή, έχουμε τον εξής γενικό κανόνα: στην περίπτωση που κάποια συντεταγμένη q_k (για συγκεκριμένο k) δεν περιέχεται στην Λαγκρανζιανή, τότε η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή p_k είναι διατηρήσιμη ποσότητα.

Παράδειγμα. Στην περίπτωση του κεντρικού δυναμικού που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, η Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

δεν περιέχει την συντεταγμένη θ , δηλ., $\partial L / \partial \theta = 0$. Άρα η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή $p_\theta = mr^2 \dot{\theta}$ (η στροφορμή) είναι διατηρήσιμη ποσότητα. Αυτό σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα ενός σωματίου είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτινικής του συντεταγμένης

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

όπου p_θ είναι μία σταθερά.

Τέτοιες σχέσεις είναι πολύ χρήσιμες. Στο παράδειγμά μας, μπορούμε να επιστρέψουμε στην εξίσωση κίνησης για το r (που έχουμε δει σε προηγούμενο παράδειγμα)

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}$$

και να αντικαταστήσουμε το $\dot{\theta}$ από τον νόμο διατήρησης:

$$m\ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0,$$

οπότε έχουμε μία εξίσωση που περιέχει μόνο το r \square

Βιβλιογραφία: [2, 4, 6]

3.4.3 Λυμένη Άσκηση.

Δύο σώματα μάζας m το καθένα εξαρτώνται από αβαρείς ράβδους μήκους ℓ . Οι μάζες είναι συνδεδεμένες με ελατήριο σταθεράς K . Το φυσικό μήκος του ελατηρίου d είναι ίσο με την απόσταση μεταξύ των σημείων από τα οποία εξαρτώνται τα σώματα (όπως φαίνεται στο σχήμα).

(α) Γράψτε την Lagrangian και τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος υποθέτοντας μικρές αποκλίσεις των σωμάτων από τις θέσεις ισορροπίας (δηλ. χρησιμοποιείτε την αρμονική προσέγγιση. Μπορείτε να αγνοήσετε την κίνηση των μαζών στην κατακόρυφη διεύθυνση).

(β) Βρείτε τις συχνότητες ταλάντωσης του συστήματος.

(γ) Γράψτε την γενική λύση που δίνει την κίνηση των μαζών.

(δ) Έστω ότι για χρόνο $t = 0$ οι μάζες είναι στην κατακόρυφο και έχουν ίσες (μη μηδενικές) ταχύτητες. Γράψτε τις λύσεις που περιγράφουν αυτήν την κίνηση.

Λύση:

(α) Χρησιμοποιούμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες θ_1 και θ_2 που μετρούν τις αποκλίσεις από τις κατακόρυφους θέσεις ισορροπίας. Θεωρούμε ως αρχή των αξόνων το σημείο εξάρτησης της αριστερά μάζας και γράφουμε τις θέσεις των μαζών

$$\mathbf{r}_1 = (\ell \sin \theta_1, -\ell \cos \theta_1), \quad \mathbf{r}_2 = (d + \ell \sin \theta_1, -\ell \cos \theta_1)$$

για την αριστερή και την δεξιά μάζα αντίστοιχα. Οι ταχύτητες τους είναι

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = (\ell \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, \ell \dot{\theta}_1 \sin \theta_1), \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = (\ell \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \ell \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)$$

και άρα $\dot{\mathbf{r}}_1^2 = (\ell \dot{\theta}_1)^2$, $\dot{\mathbf{r}}_2^2 = (\ell \dot{\theta}_2)^2$.

Η κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}_2^2.$$

Η έκφραση για την δυναμική ενέργεια είναι κάπως περίπολοχη διότι περιέχει τα $\sin \theta$, $\cos \theta$. Για να απλοποιηθούν αυτές οι εκφράσεις θα θεωρήσουμε μικρές αποκλίσεις από τις θέσεις ισορροπίας, δηλ.,

$$\theta_1 \ll 1, \quad \theta_2 \ll 1.$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, ώστε οι θέσεις των σωμάτων είναι προσεγγιστικά $(\ell \theta_1, 0)$ και $(d + \ell \theta_2, 0)$ (εδώ κρατάμε μόνο όρους πρώτης τάξης). Σε αυτή την προσέγγιση η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\ell(\theta_2 - \theta_1)$ και άρα η δυναμική του ενέργεια του ελατηρίου είναι $\frac{1}{2} K \ell^2 (\theta_2 - \theta_1)^2$. Η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας είναι $-mg\ell \cos \theta_1 - mg\ell \cos \theta_2 \approx -mg\ell(1 - \theta_1^2/2) - mg\ell(1 - \theta_2^2/2)$. Όπως βλέπουμε έχουμε κρατήσει στη δυναμική ενέργεια όρους δεύτερης τάξης (διότι θα δώσουν όρους πρώτης τάξης στις εξισώσεις). Η Lagrangian είναι

$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} mg\ell \theta_1^2 - \frac{1}{2} mg\ell \theta_2^2 - \frac{1}{2} K \ell^2 (\theta_2 - \theta_1)^2,$$

όπου αγνοήσαμε μια σταθερά. Μπορούμε επίσης να διαιρέσουμε την L με $m\ell^2$ (αφού κάτι τέτοιο δεν θα επηρεάσει τις εξ. κίνησης):

$$L = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} \frac{g}{\ell} \theta_1^2 - \frac{1}{2} \frac{g}{\ell} \theta_2^2 - \frac{1}{2} \frac{K}{m} (\theta_2 - \theta_1)^2.$$

Οι εξισώσεις Lagrange είναι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{K}{m} \right) \theta_1 - \frac{K}{m} \theta_2 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0 \Rightarrow \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{K}{m} \right) \theta_2 - \frac{K}{m} \theta_1 = 0. \end{aligned}$$

(β) Οι εξισώσεις κίνησης έχουν λύσεις της μορφής $\theta_1 = A_1 e^{i\omega t}$, $\theta_2 = A_2 e^{i\omega t}$. Αντικαθιστούμε αυτές τις λύσεις στις εξισώσεις και παίρνουμε τις

$$\begin{aligned} \left(\frac{g}{\ell} + \frac{K}{m} - \omega^2 \right) A_1 - \frac{K}{m} A_2 &= 0 \\ -\frac{K}{m} A_2 + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{K}{m} - \omega^2 \right) A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Γιά να έχουμε μη τετριμμένες λύσεις για αυτό το αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων θα πρέπει η συχνότητα ω να ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{\ell} + \frac{K}{m} - \omega^2 & -\frac{K}{m} \\ -\frac{K}{m} & \frac{g}{\ell} + \frac{K}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{g}{\ell} + \frac{K}{m} - \omega^2 \right)^2 - \left(\frac{K}{m} \right)^2 = 0.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι δύο συχνότητες ταλάντωσης

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2K}{m}}.$$

(γ) Για $\omega = \omega_1$ το παραπάνω αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων δίνει $A_1 = A_2$ και για $\omega = \omega_2$ δίνει $A_1 = -A_2$. Άρα η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A_1 e^{i\omega_1 t} + B_1 e^{i\omega_2 t} \\ \theta_2 &= A_1 e^{i\omega_1 t} - B_1 e^{i\omega_2 t}. \end{aligned}$$

όπου A_1, B_1 δύο αυθαίρετες (μιγαδικές) σταθερές. Αυτό γράφεται ισοδύναμα και ως

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) + c_1 \cos(\omega_2 t) + d_1 \sin(\omega_2 t) \\ \theta_2 &= a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) - c_1 \cos(\omega_2 t) - d_1 \sin(\omega_2 t). \end{aligned}$$

όπου a_1, b_1, c_1, d_1 τέσσερες αυθαίρετες (πραγματικές) σταθερές.

(δ) Αν επιβάλουμε τις αρχικές συνθήκες έχουμε $\theta_1(t=0) = 0 \Rightarrow a_1 + c_1 = 0$, $\theta_2(t=0) = 0 \Rightarrow a_1 - c_1 = 0$ ώστε $a_1 = c_1 = 0$. Οι ταχύτητες είναι λοιπόν $\dot{\theta}_1 = b_1 \cos(\omega_1 t) + d_1 \cos(\omega_2 t)$, $\dot{\theta}_2 = b_1 \cos(\omega_1 t) - d_1 \cos(\omega_2 t)$. Για να έχουμε $\dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0)$ πρέπει $d_1 = 0$. Άρα η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \theta_1 &= b_1 \sin(\omega_1 t) \\ \theta_2 &= b_1 \sin(\omega_1 t), \end{aligned}$$

όπου το b_1 παραμένει μια απροσδιόριστη σταθερά.

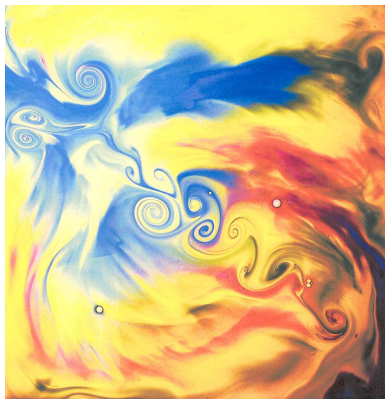
Κεφάλαιο 4

Δίνες και η δυναμική τους

4.1 Εισαγωγή

4.1.1 Συνήθεις δίνες σε ρευστά

Δίνες εμφανίζονται και παίζουν σημαντικό ρόλο σε πάρα πολλά φυσικά συστήματα. Τα πιο γνωστά τέτοια συστήματα είναι τα ρευστά. Στην μηχανική ρευστών είναι γνωστό ότι οι δίνες (fluid vortices) παίζουν κεντρικό ρόλο στην περιγραφή και κατανόηση τόσο της κίνησης των ρευστών όσο και πιο περίπλοκων φαινομένων όπως η τυρβώδης ροή.



Σχήμα 4.1: Φωτογραφία δινών και ζευγών δινών οι οποίες δημιουργήθηκαν από την κίνηση ενός σωματίου στην επιφάνεια υγρού.

Η περιγραφή της κίνησης των ρευστών και άρα και της δυναμικής των δινών βασίζεται στις εξισώσεις της μηχανικής ρευστών οι οποίες είναι μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Απλοποίηση της περιγραφής δινών προκύπτει στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι κάθε δίνη είναι μακριά από κάθε άλλη και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σημαντική κεντρική περιοχή της δίνης είναι μικρού μεγέθους σε σύγκριση με την απόσταση μεταξύ τους. Τότε μπορούμε να περιγράψουμε προσεγγιστικά την θέση κάθε δίνης από ένα σημείο. Λέμε τότε ότι έχουμε την προσέγγιση σημειακών δινών.

Στην περιγραφή δινών πολύ χρήσιμη είναι μία ποσότητα που λέγεται vorticity (γ) και της οποίας το ολοκλήρωμα στην επιφάνεια του ρευστού

$$\Gamma = \int \gamma dx dy$$

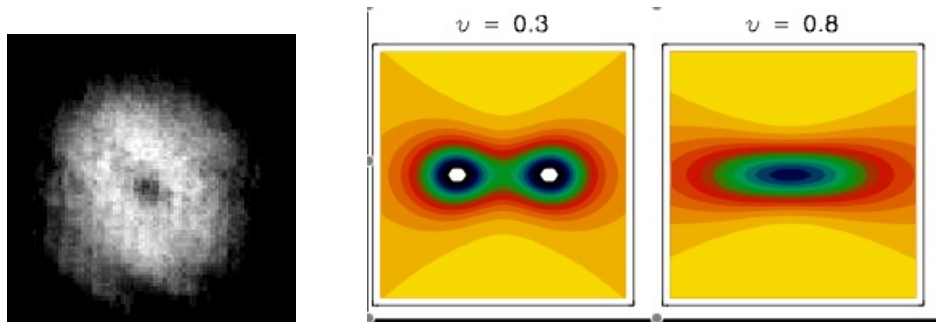
δίνει την ισχύ της δίνης. Επιπλέον, μπορεί να δειχθεί ότι για μία δίνη οι ποσότητες

$$I_x = \int x\gamma dx dy, \quad I_y = \int y\gamma dx dy \quad (4.1.1)$$

είναι διατηρήσιμες. Αυτές οι ποσότητες μπορούν να θεωρηθούν ως ένας ορισμός της θέσης μίας δίνης (μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση). Στην περίπτωση που θεωρούμε την δίνη σημειακή μπορούμε εύκολα να δούμε ότι τα παραπάνω ολοκληρώματα δίνουν την θέση της σημειακής δίνης πολλαπλασιασμένη με την ισχύ της. (Για κετενέστερη μελέτη μπορείτε να δείτε στο P.G. Saffman, “*Vortex Dynamics*”, (Cambridge University Press, 1992), κεφάλαιο 7.)

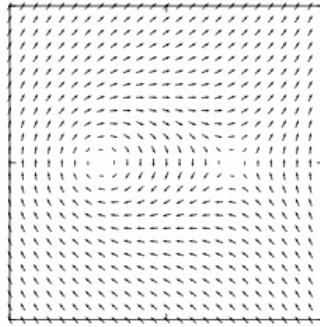
4.1.2 Δίνες σε υπερρευστά

Ορισμένα ρευστά επιδεικνύουν ασυνήθιστες ιδιότητες όταν βρίσκονται σε ιδιαίτερα χαμηλές θερμοκρασίες. Η πιό εντυπωσιακή ίσως ιδιότητα τους είναι ότι ρέουν χωρίς η κίνησή τους να επιβραδύνεται από φαινόμενα τριβής. Υγρά που παρουσιάζουν αυτή την ιδιότητά ονομάζονται υπερρευστά. Τα σημαντικότερα υπερρευστά είναι το στοιχείο Ήλιο σε θερμοκρασίες $T < 2.7$ Kelvin το οποίο είναι τότε σε υγρή κατάσταση. Επίσης, υπερρευστά είναι οι ατμοί αλκαλικών μετάλλων (Li, Na, K, Rb, Cs) οι οποίοι παγιδεύονται με μαγνητικά πεδία και ψύχονται σε θερμοκρασίες $T \sim 10 - 100$ nanoKelvin με οπτικά (LASER) και άλλα μέσα.



Σχήμα 4.2: [Αριστερά:] Φωτογραφία δίνης σε υπερρευστό (το λευκό χρώμα σημαίνει μέγιστη πυκνότητα και το μαύρο μηδενική πυκνότητα του υπερρευστού). [Δεξιά:] Αριθμητική προσομοίωση ζευγών δινών σε υπερρευστό (ο χρωματικός κώδικας αποδίδει την πυκνότητα του υπερρευστού).

Μία επιπλέον ιδιότητα των υπερρευστών είναι ότι οι δίνες που δημιουργούνται σε αυτά έχουν ισχύ η οποία είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας βασικής ποσότητας ισχύος. Τέτοιες δίνες ονομάζονται κβαντισμένες (quantized vortices). Η ιδιότητα αυτή των δινών σχετίζεται



Σχήμα 4.3: Αριθμητική προσομοίωση ζεύγους μαγνητικών δινών (τα βελόνια αποδίδουν το διανυσματικό πεδίο \mathbf{m} , δηλαδή, τον προσανατολισμό των μαγνητικών ροπών των ατόμων).

πάντως με την ιδιότητα της ροής χωρίς τριβή. Τα υπερρευστά και οι δίνες τους μελετώνται με την βοήθεια των νόμων της κβαντικής φυσικής. Σε ορισμένες περιπτώσεις η δυναμική τους μπορεί να περιγραφεί από μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις όμως αυτές διαφέρουν από εκείνες για τα συνήθη ρευστά στα οποία αναφερθήκαμε παραπάνω.

Ένα σημαντικό σημείο είναι ότι η vorticity στα υπερρευστα συνδέεται με τοπολογικά χαρακτηριστικά του πεδίου που περιγράφει το υπερρευστό (αυτό είναι ένα μιγαδικό πεδίο $\Psi(x, y)$ το οποίο ονομάζεται *κυματοσυνάρτηση*). Η ολική ισχύς $\Gamma = \int \gamma dx dy$ παίρνει διάκριτες τιμές και έχει την ερμηνεία ενός τοπολογικού αριθμού. Διατηρήσιμες ποσότητες ανάλογες των (4.1.1) υπάρχουν και σε αυτή την περίπτωση.

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση των σημειακών δινών και στο παρόν σύστημα. Έτσι μπορούμε να απλοποιήσουμε σημαντικά την μελέτη της δυναμικής τους.

4.1.3 Μαγνητικές δίνες

Παρά το ότι συνδέουμε συνήθως τις δίνες με τα ρευστά, η αλήθεια είναι ότι οι δίνες, ως μαθηματικές δομές διανυσματικών πεδίων, εμφανίζονται σε πολλά διαφορετικά συστήματα. Ένα παράδειγμα είναι τα μαγνητικά υλικά στα οποία έχουμε τις λεγόμενες *μαγνητικές δίνες*.

Η μικροσκοπική δομή σε ένα μαγνητικό υλικό περιγράφεται από ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{m}(x, y)$ το οποίο παριστάνει την μαγνήτιση του υλικού σε κάθε σημείο (x, y) του υλικού. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι τι δομές σχηματίζει η μαγνήτιση στο υλικό και ποιά είναι η δυναμική της. Για παράδειγμα, αυτό το ερώτημα αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσον αφορά στον μαγνητικό δίσκο ενός υπολογιστή όπου η πληροφορία αποθηκεύεται σε κάποιες ειδικές δομές της μαγνήτισης, ενώ για τα γραφτεί ή να σβηστεί μία πληροφορία θα πρέπει οι δομές αυτές να μεταβληθούν με ελεγχόμενο τρόπο.

Μία αριθμητική προσομοίωση μαγνητικών δομών οι οποίες χαρακτηρίζονται ως *μαγνητικές δίνες* παρουσιάζονται στο σχήμα 4.3. Στο σχήμα βλέπουμε ότι στην περίπτωση των μαγνητικών δινών δεν υπάρχει ροή πραγματικού ρευστού. Όμως μπορούμε να ορίσουμε μία ποσότητα q η οποία έχει ομοιότητες με την vorticity (γ) στα ρευστά. Η q δίνει κάποια τοπολογικά χαρακτηριστικά της μαγνήτισης και η ισχύς της δίνης $Q = \int q dx dy$ είναι ακέραιο

πολλαπλάσιο μιάς βασικής ποσότητας.

Από τη θεωρία προκύπτουν διατηρήσιμες ποσότητες της μορφής

$$I_x = \int xq \, dx dy, \quad I_y = \int yq \, dx dy \quad (4.1.2)$$

οι οποίες μοιάζουν με τις και (4.1.1). Μπορεί ναδειχθεί ότι, στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι οι μαγνητικές δίνες είναι σημειακές, η δυναμική τους συμπεριφορά μοντελοποιείται από εξισώσεις ανάλογες με αυτές που των δινών σε ρευστά.

4.2 Εξισώσεις κίνησης δινών

Οι εξισώσεις κίνησης για αλληλεπιδρώσες δίνες δόθηκαν από τον Helmholtz σε μία εργασία του το 1858 με τον τίτλο “Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen”. Στο μοντέλο που εισήγαγε ο Helmholtz θεωρεί ότι η vorticity περιορίζεται μέσα σε ορισμένες περιοχές που έχουν σχήμα ευθύγραμμων κυλίνδρων με ελάχιστη διάμετρο, οι οποίες λέγονται vortex filaments. Κάθε μία από αυτές τις δίνες χαρακτηρίζεται από την ισχύ της η οποία δόθηκε παραπάνω και ονομάζεται και κυκλοφορία αφού περιγράφει την κυκλοφορία του υγρού γύρω από το κέντρο της δίνης. Σε αυτή την προσέγγιση λέμε ότι έχουμε σημειακές δίνες.

Θα περιοριστούμε σε ροές σε δύο διαστάσεις, δηλαδή, θα θεωρήσουμε ότι η συμπεριφορά της δίνης (του vortex filament) μέσα στο υγρό ακολουθεί την συμπεριφορά της δίνης την οποία παρατηρούμε στην επιφάνεια του υγρού. Οι εξισώσεις κίνησης για δύο αλληλεπιδρώσες δίνες στο επίπεδο δίνονται από τις

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= Q_2 \frac{y_1 - y_2}{\ell^2}, & \frac{dy_1}{dt} &= Q_2 \frac{x_2 - x_1}{\ell^2} \\ \frac{dy_2}{dt} &= Q_1 \frac{x_1 - x_2}{\ell^2}, & \frac{dx_2}{dt} &= Q_1 \frac{y_2 - y_1}{\ell^2}, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

όπου

- ο $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ είναι οι θέσεις των δύο δινών στο επίπεδο,
- ο Q_1, Q_2 είναι η κυκλοφορίες τους που δίνουν την ισχύ τους

και

$$\ell := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

είναι η απόσταση μεταξύ των δινών. (Η λεπτομερής εξαγωγή αυτών των εξισώσεων ξεφεύγει από τους στόχους αυτών των σημειώσεων.)

Παρά ότι θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε στην μελέτη του παραπάνω συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων, ξέρουμε από την πείρα των προηγούμενων κεφαλαίων ότι η περιγραφή μπορεί να γίνει πιο συστηματικά εφόσον μπορέσουμε να εξαγάγουμε τις εξισώσεις από μία Lagrangian του συστήματος (εάν φυσικά αυτή υπάρχει). Στην περίπτωση των δινών

μία τέτοια Lagrangian μπορεί κανείς να γράψει μετά από προσεκτική μελέτη των εξισώσεων και είναι η

$$L = \frac{Q_1}{2} (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + \frac{Q_2}{2} (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) + Q_1 Q_2 \ln(\ell). \quad (4.2.2)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι δύο πρώτοι όροι σε αυτή την Lagrangian αντιστοιχούν στις ενέργειες της κάθε μίας δίνης αντίστοιχα ενώ ο τελευταίος όρος περιγράφει την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο δινών. Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο δινών είναι

$$V(\ell) = -Q_1 Q_2 \ln(\ell)$$

όπου ℓ είναι η απόσταση μεταξύ τους.

Άσκηση. Εξάγεται τις εξισώσεις κίνησης από την Lagrangian (4.2.2).

Λύση.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow \dot{y}_1 = Q_2 \frac{x_2 - x_1}{\ell^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_2} \Rightarrow \dot{y}_2 = Q_1 \frac{x_1 - x_2}{\ell^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial y_1} \Rightarrow \dot{x}_1 = Q_2 \frac{y_1 - y_2}{\ell^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial y_2} \Rightarrow \dot{x}_2 = Q_1 \frac{y_2 - y_1}{\ell^2}.$$

Άσκηση. Γράψτε τις Εξ. (4.2.1) χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές μεταβλητές $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$ [Υπόδειξη: δείτε το αποτέλεσμα στο βιβλίο P.K. Newton, “*The N-Vortex Problem*”, (Springer, 2001)]. □

Άσκηση. Στην περίπτωση μαγνητικών δινών τα Q_1, Q_2 παίρνουν μόνο ακέραιες (ή ημιακέραιες) τιμές και η Lagrangian έχει την κάπως πιο γενική μορφή

$$L = \frac{Q_1}{2} (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + \frac{Q_2}{2} (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) + \kappa_1 \kappa_2 \ln(\ell).$$

όπου κ_1, κ_2 είναι ακέραιοι αριθμοί (οι οποίοι σχετίζονται με ειδικότερα χαρακτηριστικά της δομής κάθε δίνης) για τους οποίους ισχύει $Q_i = \pm \kappa_i$, $i = 1, 2$. Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί είναι από φυσική άποψη πραγματοποιήσιμοι, άρα υπάρχουν τέσσερις δυνατές περιπτώσεις για τις δύο μαγνητικές δίνες με δεδομένα Q_1, Q_2 . Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από αυτή την Lagrangian.

4.2.1 Μία απομονωμένη δίνη

Ας περιοριστούμε σε αυτήν την παράγραφο στην περιγραφή μίας απομονωμένης δίνης. Μπορούμε με απλό τρόπο να αγνοήσουμε το δυναμικό αλληλεπίδρασης στην Lagrangian (4.2.2)

(και επίσης να θέσουμε $Q_2 = 0$ και $Q_1 = Q$) και να βρούμε την

$$L = \frac{Q}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (4.2.3)$$

Σημειώστε ότι ο αριθμητικός συντελεστής που εμφανίζεται στην Lagrangian δεν πρόκειται να εμφανιστεί στις εξισώσεις.

Οι εξισώσεις Lagrange για τις μεταβλητές x, y είναι

$$\begin{aligned} -\frac{Q}{2}\dot{y} &= \frac{Q}{2}\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = 0 \\ \frac{Q}{2}\dot{x} &= -\frac{Q}{2}\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = 0, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

όπου θεωρήσαμε βέβαια $Q \neq 0$. Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν την μορφή νόμων διατήρησης. Οι λύσεις τους είναι $x = \text{σταθ.}$, $y = \text{σταθ.}$ και οδηγούν στο συμπέρασμα ότι μία απομονωμένη δίνη (δηλαδή μία δίνη που δεν δέχεται δυνάμεις) είναι πάντα στάσιμη σε ένα ρευστό (ή σε ένα μαγνητικό υλικό).

Οι απλοί αυτοί νόμοι διατήρησης βρίσκονται σε αντιστοιχία με τους νόμους διατήρησης για τα I_x, I_y στις Εξ. (4.1.1) για τους οποίους μιλήσαμε στην γενική εισαγωγή για τις δίνες. Αυτή είναι μία ισχυρή ένδειξη ότι το μοντέλο που χρησιμοποιούμε αποδίδει καλά τις δυναμικές ιδιότητες των δινών.

Άσκηση. Γράψτε την Lagrangian για μία μαγνητική δίνη σε εξωτερικό πεδίο. Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης για κάποια απλή μορφή του πεδίου. [Υπόδειξη: Προσθέστε ένα δυναμικό στην Lagrangian το οποίο να δίνει το επιθυμητό πεδίο.]

4.2.2 Ζεύγος αλληλεπιδρώντων δινών: Διατηρήσιμες ποσότητες

Για το μοντέλο (4.2.2) έχουμε τις ακόλουθες διατηρήσιμες ποσότητες.

Ενέργεια. Την βρίσκουμε με τον συνήθη τρόπο

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^2 \left(x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + y_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - L = -Q_1 Q_2 \ln(\ell). \quad (4.2.5)$$

Θέση (Οδηγός της κίνησης). Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4.2.1) βρίσκουμε ότι

$$Q_1 \dot{x}_1 + Q_2 \dot{x}_2 = 0 \quad \text{και} \quad Q_1 \dot{y}_1 + Q_2 \dot{y}_2 = 0,$$

δηλαδή έχουμε τις διατηρήσιμες ποσότητες

$$I_x := Q_1 x_1 + Q_2 x_2, \quad I_y := Q_1 y_1 + Q_2 y_2. \quad (4.2.6)$$

Παρατηρούμε ότι αυτές οι ποσότητες είναι ανάλογες των ποσοτήτων (4.1.1) οι οποίες δίνουν την θέση μίας δίνης στην μηχανική ρευστών και επίσης των (4.1.2) για την θέση μίας μαγνητικής δίνης. Άρα η απλοποιημένη θεωρία μας δίνει ένα από τα βασικά αποτελέσματα της πλήρους θεωρίας (είτε στην μηχανική ρευστών είτε στην θεωρία για μαγνητικά υλικά, είτε

και σε άλλες θεωρίες). Πρέπει να είναι σαφές ότι οι ποσότητες (4.2.6) δίνουν την μέση θέση του ζεύγους των δινών και άρα έχουμε το αποτέλεσμα ότι η μέση αυτή θέση είναι μία σταθερά της κίνησης. (Πάντως, για να δίνουν με συνέπεια την μέση θέση των δινών θα πρέπει να κανονικοποιηθούν κατάλληλα όπως ζητάει η άσκηση στο τέλος της παραγράφου.)

Στροφορμή. Για το μοντέλο που μελετάμε είναι επίσης γνωστό ότι η ποσότητα

$$M = \frac{Q_1}{2} (x_1^2 + y_1^2) + \frac{Q_2}{2} (x_2^2 + y_2^2) \quad (4.2.7)$$

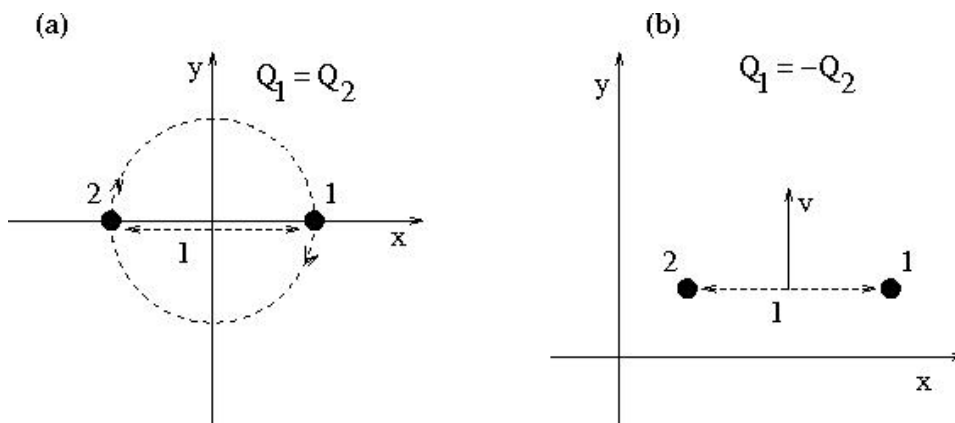
είναι διατηρήσιμη. Αυτό αποδεικνύεται με άμεσο υπολογισμό

$$\frac{dM}{dt} = Q_1(x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1) + Q_2(x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2) = 0$$

όπου για τις χρονικές παραγώγους χρησιμοποιήσαμε τις Εξ. (4.2.1).

Στα επόμενα θα μελετήσουμε δύο ειδικές περιπτώσεις χρησιμοποιώντας τις διατηρήσιμες ποσότητες τις οποίες είδαμε σε αυτήν την παράγραφο.

Άσκηση. Με κατάλληλη κανονικοποίηση των σχέσεων (4.2.6) γράψτε ποσότητα η οποία να δίνει με συνέπεια έναν ορισμό της θέσης του ζεύγους δινών (αυτός ο ποσότητα που θα ορίσετε μπορεί να ονομαστεί *οδηγός της κίνησης*). Σε ποιά περίπτωση αυτό δεν είναι δυνατόν; Επίσης, τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε, από την διατήρηση του οδηγού της κίνησης, για την κίνηση κάθε μίας από τις δίνες; □



Σχήμα 4.4: (a) Ένα ζεύγος δινών με $Q_1 = Q_2 = 1$ κάνει κυκλική κίνηση (σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή) με γωνιακή συχνότητα $\omega = 2/l^2$. (b) Ένα ζεύγος δινών με $Q_1 = -Q_2 = 1$ κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $v = 1/l$. (l είναι η απόσταση μεταξύ των δινών.)

4.2.3 Ζεύγος αλληλεπιδρώντων δινών: Τροχιές

Περίπτωση $Q_1 = Q_2 = 1$

Έχουμε τις ακόλουθες διατηρήσιμες ποσότητες

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\ln(\ell) \\ I_x &= x_1 + x_2 \\ I_y &= y_1 + y_2 \\ M &= \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2).\end{aligned}$$

Οι I_x και I_y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και επίσης η τιμή τους μπορεί να αλλάξει με απλή μετάθεση της αρχής του συστήματος συντεταγμένων. Εκλέγουμε λοιπόν την αρχή του συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε $I_x = 0$, $I_y = 0$. Έτσι έχουμε τις

$$x_2 = -x_1, \quad y_2 = -y_1. \quad (4.2.8)$$

Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\mathcal{E} = -\ln(\ell) \Rightarrow \ell = \ell_0 (= \text{const.}). \quad (4.2.9)$$

Με τη βοήθεια όμως των (4.2.8) η απόσταση μεταξύ των δύο δινών γράφεται

$$\ell = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Άσκηση. Δείξτε ότι η διατήρηση της στροφορμής δεν δίνει επιπλέον αποτελέσματα από τα παραπάνω.

Λύση: Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4.2.8) γράφουμε την στροφορμή ως

$$M = x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{4}\ell^2.$$

Άρα έχουμε $M : \text{const} \Rightarrow \ell = \ell_0 (= \text{const.})$, δηλαδή βρίσκουμε ένα αποτέλεσμα το οποίο ήδη γνωρίζουμε. \square

Συμπερασματικά, η Εξ. (4.2.8) δείχνει ότι οι δίνες βρίσκονται (για όλους τους χρόνους) σε αντιδιαμετρικές θέσεις ως προς ένα σημείο το οποίο έχει εκλεγεί ως αρχή των αξόνων. Η Εξ. (4.2.9) δείχνει ότι κινούνται σε κύκλο με διάμετρο ℓ_0 (και κέντρο την αρχή των αξόνων).

Γιά να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής εργαζόμαστε ως εξής. Θεωρούμε τις δύο από τις Εξ. (4.2.1) για τις μεταβλητές x_1, y_1 και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις τις οποίες βρήκαμε από τους νόμους διατήρησης:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= Q_2 \frac{x_2 - x_1}{\ell^2} \Rightarrow \dot{y}_1 = -\frac{2x_1}{\ell_0^2} \\ \dot{x}_1 &= Q_2 \frac{y_1 - y_2}{\ell^2} \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{2y_1}{\ell_0^2}\end{aligned}$$

Παίρνοντας την χρονική παράγωγο της πρώτης και χρησιμοποιώντας την δεύτερη βρίσκουμε

$$\ddot{y}_1 = -\frac{2}{\ell_0^2} \dot{x}_1 \Rightarrow \dot{y}_1 + \frac{4}{\ell_0^4} y_1 = 0.$$

Μία ανάλογη εξίσωση μπορούμε να εξάγουμε και για την x_1 . Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν περιοδική κίνηση με συχνότητα

$$\omega = \frac{2}{\ell_0^2}.$$

Άρα τα φορτία κινούνται σε κυκλική τροχιά με συχνότητα αντιστόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους αποστάσεως.

Άσκηση. Έστω δίνες με $Q_1 = Q_2 = 1$ οι οποίες βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $(x_1, y_1) = (1, 0)$ και $(x_2, y_2) = (-1, 0)$. Βρείτε την τροχιά τους.

Άσκηση. Δείξτε ότι για $Q_1 \neq 0 \neq Q_2$ οι Εξ. (4.2.1) δεν έχουν στατικές λύσεις, δηλ., δεν έχουν λύσεις της μορφής $(x_1, y_1) = const.$, $(x_2, y_2) = const.$

Άσκηση. Γράψτε τις Εξ. (4.2.1) σε πολικές συντεταγμένες για $Q_1 = Q_2$. Βρείτε τη συχνότητα περιστροφής του ζεύγους.

Περίπτωση $Q_1 = -Q_2 = 1$

Έχουμε τις ακόλουθες διατηρήσιμες ποσότητες

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \ln(\ell) \\ I_x &= x_1 - x_2 \\ I_y &= y_1 - y_2 \\ M &= \frac{1}{2} [(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)]. \end{aligned}$$

Με κατάλληλη στροφή του συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να εκλέξουμε τον άξονα x να είναι παράλληλος στην ευθεία που περνάει από τις δύο δίνες και τον άξονα y κάθετα στην γραμμή που ενώνει τις δύο δίνες. Έτσι μπορούμε να επιτύχουμε την

$$y_1 = y_2 \Rightarrow I_y = 0. \quad (4.2.10)$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\ell = \sqrt{I_x^2 + I_y^2},$$

άρα η απόσταση ℓ μεταξύ των δινών είναι σταθερή (έστω $\ell = \ell_0$). Αυτό δείχνει επίσης ότι η πρώτη διατηρήσιμη ποσότητα (για το \mathcal{E}) περιέχεται στις δύο επόμενες. Μάλιστα, αφού έχουμε εκλέξει $I_y = 0$ έχουμε

$$\ell^2 = \ell_0^2 = I_x^2.$$

Γιά την τελευταία διατηρήσιμη ποσότητα, την στροφορμή, έχουμε

$$M = \frac{1}{2} (x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{2} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \frac{I_x}{2} (x_1 + x_2),$$

ώστε η $x_1 + x_2$ είναι επίσης διατηρήσιμη ποσότητα. Άρα έχουμε

$$x_1 - x_2 = \text{const.}, \quad x_1 + x_2 = \text{const.} \Rightarrow x_1 = \text{const.}, \quad x_2 = \text{const.} \quad (4.2.11)$$

δηλ., οι συντεταγμένες x_1, x_2 είναι σταθερές κατά την διάρκεια της κίνησης.

Συμπερασματικά, η Εξ. (4.2.11) δείχνει ότι το ζεύγος δινών δεν κινείται κατά τον άξονα x (δηλ., κατά την διεύθυνση της γραμμής που τις συνδέει) και άρα είναι δυνατόν να κινούνται μόνο κατά την κατεύθυνση y (δηλ., κάθετα στην γραμμή που τις συνδέει).

Γιά να βρούμε την ταχύτητα κίνησης του ζεύγους εργαζόμαστε ως εξής. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα είναι $v = \dot{y}_1 = \dot{y}_2$ (αφού $y_1 = y_2$). Οπότε από την δεύτερη Εξ. (4.2.1) έχουμε

$$\dot{y}_2 = Q_1 \frac{x_1 - x_2}{\ell^2} \Rightarrow v = \frac{I_x}{\ell_0^2} \Rightarrow v = \frac{1}{I_x} \quad \text{ή} \quad v = \pm \frac{1}{\ell_0}.$$

Η ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της (σταθερής) απόστασης μεταξύ των δινών και είναι θετική ή αρνητική (προς τον θετικό ή αρνητικό άξονα y αντίστοιχα) αναλόγως με το πρόσημο της ποσότητας $I_x = x_1 - x_2$.

Άσκηση. Έστω δίνες με $Q_1 = -Q_2 = 1$ οι οποίες βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $(x_1, y_1) = (1, 0)$ και $(x_2, y_2) = (-1, 0)$. Λύστε τις εξισώσεις κίνησης και έτσι βρείτε την τροχιά τους.

4.3 Ηλεκτρικό φορτίο σε μαγνητικό πεδίο

4.3.1 Εξισώσεις Newton

Θα θεωρήσουμε ένα σωματίο μάζας m φορτισμένο με ηλεκτρικό φορτίο q το οποίο κινείται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} . Το σωματίο υπόκειται σε μία δύναμη Lorentz η οποία εξαρτάται και από την ταχύτητά του \mathbf{v} :

$$\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Θα θεωρήσουμε στα παρακάτω την περίπτωση ενός σταθερού ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$. Ας περιοριστούμε επίσης στην περίπτωση που το φορτίο κινείται σε έναν *διδιάστατο χώρο*, δηλαδή στο επίπεδο (x, y) . Σύμφωνα με το νόμο του Newton οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_L \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} &= qB \dot{y} \\ m \ddot{y} &= -qB \dot{x}. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Η γενική λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι η

$$x = x_0 + R \sin(\omega_c t + \delta), \quad y = y_0 + R \cos(\omega_c t + \delta),$$

όπου

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

λέγεται *συχνότητα κυκλότρου*, ενώ R, δ, x_0 και y_0 είναι αυθαίρετες σταθερές. Η λύση των εξισώσεων περιγράφει κυκλική κίνηση με συχνότητα ω_c και ακτίνα R ενώ δ είναι μία φάση.

4.3.2 Εξισώσεις Lagrange

Οι εξισώσεις κίνησης (4.3.1) προκύπτουν ως οι εξισώσεις Euler-Lagrange εάν θεωρήσουμε την Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2} (xy - yx). \quad (4.3.2)$$

Γιά να γράψουμε τις εξισώσεις Lagrange υπολογίζουμε πρώτα τις ποσότητες

$$p_x := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{qB}{2} y, \quad p_y := \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{qB}{2} x,$$

ώστε έχουμε τις δύο εξισώσεις Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} - \frac{qB}{2} \dot{y} = \frac{qB}{2} \dot{y} \Rightarrow m\ddot{x} = qB \dot{y} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} + \frac{qB}{2} \dot{x} = -\frac{qB}{2} \dot{x} \Rightarrow m\ddot{y} = -qB \dot{x} \end{aligned}$$

και συμπίπτουν με τις εξισώσεις του Νεύτωνα που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Η σύγκριση της Lagrangian (4.3.2) για ένα ηλεκτρικό φορτίο και αυτής για μία δίνη (4.2.3) δείχνει ότι έχουν ένα σημαντικό κοινό μέρος, όμως στην περίπτωση του φορτίου εμφανίζεται και ένας δευτέρου βαθμού στις ταχύτητες. Για την περίπτωση δίνης ο αριθμός Q βρίσκεται στην θέση του (qB) , δηλαδή έχει ρόλο ανάλογο του μαγνητικού πεδίου.

4.3.3 Νόμοι διατήρησης

Οι δύο εξισώσεις της κίνησης γράφονται και ως

$$\ddot{x} - \omega_c \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + \omega_c \dot{x} = 0. \quad (4.3.3)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι οι Εξ. (4.3.1) μπορούν εύκολα να ολοκληρωθούν μία φορά και να γραφούν ως

$$\frac{d}{dt} (\dot{x} - \omega_c y) = 0, \quad \frac{d}{dt} (\dot{y} + \omega_c x) = 0,$$

δηλαδή βρίσκουμε ότι οι ποσότητες στις παρενθέσεις είναι διατηρήσιμες ποσότητες της κίνησης. Θα γράψουμε αυτές τις διατηρήσιμες ποσότητες στην μορφή

$$R_x := x + \frac{\dot{y}}{\omega_c}, \quad R_y := y - \frac{\dot{x}}{\omega_c}. \quad (4.3.4)$$

Αυτές οι ποσότητες είναι χρήσιμες για την περιγραφή της κίνησης επειδή ακριβώς είναι διατηρήσιμες ποσότητες και το διάνυσμα (R_x, R_y) λέγεται *οδηγός της κίνησης* (guiding center), διότι δίνει περίπου την θέση του σωματίου.

Βλέπουμε ότι οι διατηρήσιμες ποσότητες (4.1.1) τις οποίες είδαμε στην περίπτωση δινών είναι παρόμοιες με τις (4.3.4) για την περίπτωση του ηλεκτρικού φορτίου σε μαγνητικό πεδίο. Οι διαφορές μεταξύ τους είναι ότι οι τελευταίες περιέχουν και χρονικές παραγωγούς της θέσης ενώ οι πρώτες δεν περιέχουν τέτοιες. Επίσης, τον ρόλο του γινομένου του φορτίου με το μαγνητικό πεδίο qB στις Εξ. (4.3.4) παίζει, στην περίπτωση των δινών, η ισχύς της δίνης Γ . Η μαθηματική λοιπόν περιγραφή του ηλεκτρικού φορτίου σε μαγνητικό πεδίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο για την περιγραφή της δυναμικής των δινών. Μία τέτοια περιγραφή θα έδινε κάπως πιο περίπλοκα αποτελέσματα από αυτά που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για την δυναμική δινών.

Ενέργεια. Τέλος, δημειώνουμε ότι επειδή το σύστημα περιγράφεται από Lagrangian έχει ενέργεια η οποία είναι διατηρήσιμη:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \\ &= \dot{x} \left(m\dot{x} - \frac{qB}{2} y \right) + \dot{y} \left(m\dot{y} + \frac{qB}{2} x \right) - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{qB}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) \Rightarrow \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίο έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{y}_0 := \dot{y}(t=0) = 0$ και βρίσκεται στο σημείο $x_0 := x(t=0)$, $y_0 := y(t=0)$. Ζητάται να βρούμε την τροχιά του.

Θα λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μόνο τις διατηρήσιμες ποσότητες. Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι διατηρήσιμες ποσότητες έχουν τις τιμές

$$\mathcal{E} = 0, \quad R_x = x_0, \quad R_y = y_0.$$

Επειδή η ενέργεια \mathcal{E} διατηρείται στον χρόνο έχουμε ότι για κάθε t

$$\mathcal{E} = 0 \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0, \dot{y} = 0.$$

Επίσης $R_x = x$, $R_y = y$ διατηρούνται και άρα η λύση είναι απλή $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ για κάθε t . \square

Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίο έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{y}_0 := \dot{y}(t=0) = \omega_c$ και βρίσκεται στο σημείο $x_0 := x(t=0) = 1$, $y_0 := y(t=0) = 0$. Ζητάται να βρούμε την τροχιά του.

Βρίσκουμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) = \frac{1}{2} m \omega_c^2 \\ R_x &= x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega_c} = 2, \quad R_y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega_c} = 0. \end{aligned}$$

Από τη διατήρηση του οδηγού της κίνησης προκύπτει

$$x + \frac{\dot{y}}{\omega_c} = 2 \Rightarrow \dot{y} = \omega_c(2 - x), \quad y - \frac{\dot{x}}{\omega_c} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \omega_c y.$$

Από την διατήρηση της ενέργειας \mathcal{E} και με χρήση των σχέσεων που μόλις βρήκαμε έχουμε

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega_c^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 1.$$

Άρα το σωματίο κάνει κυκλική κίνηση μοναδιαίας ακτίνας και με κέντρο τον οδηγό της κίνησης $(R_x, R_y) = (2, 0)$. Αυτό το παράδειγμα παρέχει μία αιτιολογία για το όνομα 'οδηγός της κίνησης' το οποίο δόθηκε στο διάνυσμα (R_x, R_y) . \square

Άσκηση. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίο έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t = 0)$, $\dot{y}_0 := \dot{y}(t = 0)$ και βρίσκεται στο σημείο $x_0 := x(t = 0)$, $y_0 := y(t = 0)$. Βρείτε την τροχιά του με την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στα προηγούμενα παραδείγματα. [Υπόδειξη: Υπολογίστε την ποσότητα $(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2$.]

Κατασκευάστε αριθμητικό κώδικα στον οποίο θα δίνονται οι αρχικές συνθήκες και θα παράγεται η τροχιά.

Άσκηση. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για ένα φορτίο σε μαγνητικό πεδίο σε αδιάστατη μορφή. Ακολούθως γράψτε τους νόμους διατήρησης επίσης σε αδιάστατη μορφή.

Βιβλιογραφία: [12], σελ. 259-264

4.4 Ηλεκτρικό φορτίο σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

Θεωρούμε ένα σωματίο μάζας m φορτισμένο με ηλεκτρικό φορτίο q το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ και ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} . Το ηλεκτρικό πεδίο παράγεται από κάποιο δυναμικό $\Phi(x, y)$ τέτοιο ώστε $\mathbf{E} = -\nabla\Phi(x, y)$. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος λόγω του ηλεκτρικού πεδίου είναι της μορφής $V = q\Phi(x, y)$, άρα η Lagrangian είναι

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) - q\Phi(x, y). \quad (4.4.1)$$

Παρατηρήστε ότι η επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου μοντελοποιείται πλήρως από ένα δυναμικό $[\Phi(x, y)]$ ενώ ο όρος στην Lagrangian για το μαγνητικό πεδίο είναι αρκετά διαφορετικός αφού περιέχει τις ταχύτητες (\dot{x}, \dot{y}) .

Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} - q\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} - q\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Η δύναμη που ασκείται σε φορτίο q λόγω του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} = -q\nabla\Phi(x, y)$ και εμφανίζεται στο δεξιό μέλος των εξισώσεων.

4.4.1 Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Θα μελετήσουμε την περίπτωση ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E} = E\hat{x}$. Η δυναμική ενέργεια φορτίου q σε αυτό το πεδίο είναι $V = -qEx$. Όστε οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\dot{x} - qBy) &= qE \Rightarrow \frac{dR_y}{dt} = -\frac{E}{B} \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y} + qBx) &= 0 \Rightarrow \frac{dR_x}{dt} = 0.\end{aligned}$$

Οι λύσεις αυτών των εξισώσεων βρίσκονται εύκολα και είναι

$$R_x = R_x^{(0)}, \quad R_y = -\frac{E}{B}t + R_y^{(0)},$$

όπου (R_x, R_y) είναι ο οδηγός της κίνησης και $R_x^{(0)}, R_y^{(0)}$ είναι σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες και δίνουν τον οδηγό της κίνησης στον χρόνο $t = 0$. Σημειώστε ότι ενώ το R_x είναι διατηρήσιμη ποσότητα (όπως και στην περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου όπου είχαμε μόνο μαγνητικό πεδίο), το R_y δεν είναι πλέον διατηρήσιμη ποσότητα. Βλέπουμε ότι ο οδηγός της κίνησης κάνει ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση προς την κατεύθυνση y . Ο οδηγός της κίνησης δεν συμπίπτει με την θέση του σωματίου. Όμως, ειδικά για μεγάλο B , είναι εύλογο να υποθέσει κανείς ότι η θέση του σωματίου είναι κοντά στον οδηγό της κίνησης. Συμπερασματικά, η λύση που βρήκαμε υποδεικνύει ότι η κίνηση του σωματίου είναι περιορισμένη προς την κατεύθυνση x (αφού το R_x είναι σταθερό στον χρόνο), ενώ το σωματίο κινείται προς την κατεύθυνση y .

Εδώ πρέπει να σημειώσει κανείς το παράδοξο της κίνησης του φορτίου κάθετα ακριβώς στην διεύθυνση της ηλεκτρικής δύναμης (δηλαδή κατά την κατεύθυνση y). Σύμφωνα με όσα είμασταν συνηθισμένοι να σκεφτόμαστε, με βάση τους νόμους του Νεύτωνα, η επιτάχυνση είναι κατά την κατεύθυνση της δύναμης και άρα και η κίνηση θα περιμέναμε να ήταν προς την ίδια κατεύθυνση. Στο πρόβλημα όμως αυτού του κεφαλαίου το μαγνητικό πεδίο φαίνεται να έχει τελείως ανατρέψει αυτή τη λογική.

Τελικά σημειώνουμε ότι η *ενέργεια* του σωματίου βρίσκεται με την συνήθη μέθοδο

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y) \Rightarrow \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - qEx.\end{aligned}\tag{4.4.3}$$

Άσκηση. (α) Βρείτε την τροχιά του σωματίου [$x = x(t)$, $y = y(t)$] χρησιμοποιώντας τις παραπάνω λύσεις.

(β) Βρείτε αριθμητικά και σχεδιάστε την τροχιά του σωματίου για κάποιες συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες της επιλογής σας.

(γ) Βρείτε μια ειδική λύση (για κατάλληλες αρχικές συνθήκες) η οποία περιγράφει ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση του σωματίου.

4.4.2 Δυνάμεις τριβής

Γιά να μελετήσουμε την επίδραση δυνάμεων τριβής στο σύστημα πρέπει να προσθέσουμε έναν κατάλληλο όρο στις Εξ. (4.4.2). Αυτός μπορεί να έχει την μορφή $-\alpha\dot{x}$ για την πρώτη εξίσωση και $-\alpha\dot{y}$ για την δεύτερη, όπου α είναι μία θετική σταθερά που ονομάζεται σταθερά τριβής. Γράφουμε τις νέες εξισώσεις ως εξής

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} + qE - \alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} - \alpha\dot{y}. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Άσκηση. Οι δυνάμεις τριβής θα πρέπει (εκ του ορισμού τους) να μειώνουν την ενέργεια ενός κινούμενου σωματίου. Δείξτε ότι η ενέργεια (4.4.3) του συστήματος μειώνεται με τον χρόνο όταν ισχύουν οι Εξ. (4.4.4).

Λύση. Παίρνουμε την χρονική παράγωγο της ενέργειας

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} - qE\dot{x}.$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \dot{x}(qB\dot{y} + qE - \alpha\dot{x}) + \dot{y}(-qB\dot{x} - \alpha\dot{y}) - qE\dot{x} = -\alpha(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

ώστε βρίσκουμε ότι $\mathcal{E}/dt < 0$ όταν κινείται το σωματίο (όταν $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$). Άρα λοιπόν η ενέργεια θα μειώνεται ώσπου να ακινητοποιηθεί το φορτίο. \square

Μπορούμε να γράψουμε τις Εξ. (4.4.4) και ως εξής:

$$\dot{R}_x = -\frac{\alpha}{qB}\dot{y}, \quad \dot{R}_y = -\frac{E}{B} + \frac{\alpha}{qB}\dot{x}.$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων θα μπορούσε να λυθεί, όμως εδώ θα περιορισθούμε στην συμπεριφορά του συστήματος για μεγάλους χρόνους. Στην τελική κατάσταση ($t \rightarrow \infty$) θα υποθέσουμε ότι έχουμε $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$ και άρα έχουμε για τα \dot{x}, \dot{y} τις εξής αλγεβρικές εξισώσεις

$$\dot{y} - \alpha/(qB)\dot{x} = -E/B, \quad \dot{x} + \alpha/(qB)\dot{y} = 0$$

και άρα

$$\dot{y} = \frac{-(qE)(qB)}{(qB)^2 + \alpha^2}, \quad \dot{x} = \frac{\alpha(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}.$$

Αυτές οι εξισώσεις δίνουν την κίνηση του σωματίου.

Γιά λόγους ομοιομορφίας με τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων θα μελετήσουμε τον οδηγό της κίνησης. Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα για τα \dot{x}, \dot{y} στις εξισώσεις κίνησης για να βρούμε τελικά

$$\dot{R}_x = \frac{\alpha(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}, \quad \dot{R}_y = \frac{-(qB)(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}.$$

Αυτές οι εκφράσεις συμπίπτουν με τις παραπάνω για τα \dot{x}, \dot{y} .

Αν θεωρήσουμε τώρα ως ταχύτητα του σωματίου το διάνυσμα $\mathbf{V} = (\dot{R}_x, \dot{R}_y)$ παρατηρούμε ότι το σωματίο κινείται υπό γωνία δ ως προς τον άξονα x , όπου

$$\tan \delta = \frac{\dot{R}_y}{\dot{R}_x} = -\frac{qB}{\alpha}.$$

Για σταθερά τριβής $\alpha \rightarrow 0$ βρίσκουμε $\delta = \pi/2$, δηλαδή κίνηση κατά τον άξονα y όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο. Όταν όμως έχουμε τριβή ($\alpha \neq 0$) τότε το σωματίο κινείται υπό γωνία $0 < \delta < \pi/2$.

Άσκηση. Βρείτε αριθμητικά και σχεδιάστε την τροχιά του σωματίου για κάποιες συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες της επιλογής σας και για μία σταθερά τριβής $\alpha > 0$.

Άσκηση. Μελετήστε εκτενέστερα το σύστημα των εξισώσεων (4.4.4).

4.5 Κίνηση ζεύγους φορτίων σε μαγνητικό πεδίο

Για να περιγράψουμε περισσότερα από ένα φορτισμένα σωματίδια τα οποία βρίσκονται σε μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{z}$ θα πρέπει να γενικεύσουμε την Lagrangian (4.4.1). Εδώ θεωρούμε δύο σωματίδια με ίδια μάζα m , φορτία q_1, q_2 και διανύσματα θέσης $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ αντιστοίχως. Μπορούμε να γράψουμε την εξής Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{B}{2} [q_1(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) + q_2(x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2)] - V(x_1, y_1, x_2, y_2).$$

Η ίδια έκφραση γράφεται και ως εξής

$$L = \frac{1}{2} m \sum_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \frac{B}{2} \sum_i q_i (x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) - V(x_i, y_i) \quad (4.5.1)$$

όπου ο δείκτης i παίρνει τις τιμές $i = 1, 2$. Στα επόμενα θα θεωρήσουμε δυναμική ενέργεια $V(x_i, y_i)$ που περιγράφει αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο φορτίων και είναι της μορφής

$$V = V(\ell), \quad \ell := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

όπου ℓ είναι η απόσταση μεταξύ των δύο φορτίων.

Αφού έχουμε τέσσερις μεταβλητές μπορούμε να γράψουμε τέσσερις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}_1 - q_1 B y_1) = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}_2 - q_2 B y_2) = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y_1} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}_1 + q_1 B x_1) = -\frac{\partial V}{\partial y_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y_2} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}_2 + q_2 B x_2) = -\frac{\partial V}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι για τα δυναμικά αλληλεπίδρασης που θεωρούμε εδώ ισχύει

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = V'(\ell) \frac{\partial \ell}{\partial x_1} = V'(\ell) \frac{x_1 - x_2}{\ell}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = V'(\ell) \frac{\partial \ell}{\partial x_2} = V'(\ell) \frac{x_2 - x_1}{\ell},$$

άρα έχουμε $\partial V/\partial x_1 = -\partial V/\partial x_2$ και επίσης ισχύει $\partial V/\partial y_1 = -\partial V/\partial y_2$. Αν προσθέσουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις και τις δύο πρώτες βρίσκουμε τις εξής δύο σχέσεις

$$\frac{d}{dt} \left(x_1 + x_2 + \frac{y_1}{\omega_1} + \frac{y_2}{\omega_2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(y_1 + y_2 - \frac{\dot{x}_1}{\omega_1} - \frac{\dot{x}_2}{\omega_2} \right) = 0, \quad \omega_i := \frac{q_i B}{m}.$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον οδηγό της κίνησης (R_x, R_y) για ένα ζεύγος φορτίων ως

$$R_x := \frac{1}{2} (x_1 + x_2) + \frac{y_1}{2\omega_1} + \frac{y_2}{2\omega_2}, \quad R_y := \frac{1}{2} (y_1 + y_2) - \frac{\dot{x}_1}{2\omega_1} - \frac{\dot{x}_2}{2\omega_2}$$

και οι παραπάνω εξισώσεις αποδεικνύουν ότι αυτές οι δύο ποσότητες είναι διατηρήσιμες.

Τέλος μπορούμε να βρούμε την ενέργεια του συστήματος

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \sum_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + V(x_i, y_i)$$

η οποία είναι επίσης διατηρήσιμη ποσότητα.

Άσκηση. Μελετήστε αναλυτικά το σύστημα των εξισώσεων για ζεύγος φορτίων σε σταθερό μαγνητικό πεδίο (επιλέξτε $V = \ln(\ell)$). Λύστε αριθμητικά τις εξισώσεις για δεδομένες αρχικές συνθήκες.

Άσκηση. Θεωρήστε την Lagrangian (4.5.1) και επαναλάβετε τα βήματα του προηγούμενου κεφαλαίου (για τις δίνες) για να βρείτε τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Άσκηση. Γενικεύστε την Lagrangian (4.5.1) για να περιγράψετε ένα σύστημα N φορτίων σε μαγνητικό πεδίο. [Υπόδειξη: αρκεί να επεκτείνετε το άθροισμα στον πρώτο όρο στα $i = 1, \dots, N$. Το δυναμικό μπορεί να δίνεται από ένα άθροισμα από όρους της μορφής $V(\ell_{ij})$ όπου ij είναι όλα τα δυνατά ζευγάρια φορτίων.] Βρείτε τις διατηρήσιμες ποσότητες για αυτό το σύστημα.

Κεφάλαιο 5

Μοντέλα από την Βιολογία και δυναμικά συστήματα

5.1 Διάγραμμα φάσεων για εξισώσεις 2ης τάξης

5.1.1 Το απλό εκκρεμές

Η εξίσωση κίνησης για το απλό εκκρεμές είναι

$$m\ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0, \quad (5.1.1)$$

όπου m, g, ℓ είναι σταθερές. Παρατηρούμε ότι

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta}$$

και γράφουμε την εξίσωση (5.1.1) ως

$$m\ell^2 \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} + mg\ell \sin \theta = 0.$$

Έτσι, ενώ είχαμε εξίσωση για την μεταβλητή θ με τον χρόνο t , τώρα έχουμε περάσει σε μία εξίσωση για το $\dot{\theta}$ ως συνάρτηση του θ . Ολοκληρώνουμε την τελευταία εξίσωση

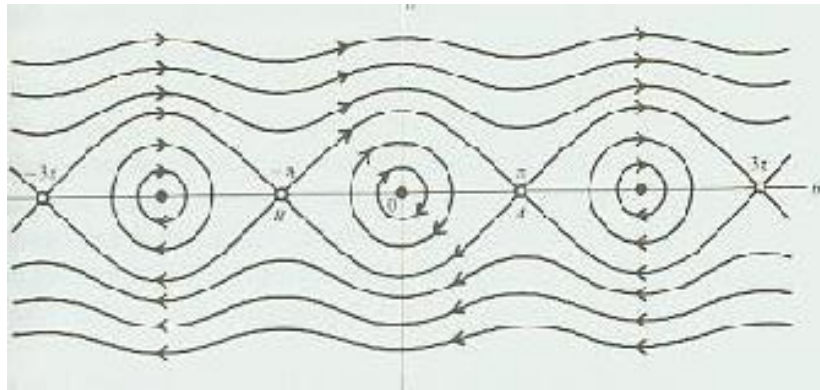
$$m\ell^2 \int \dot{\theta} d\dot{\theta} + mg\ell \int \sin \theta d\theta = 0$$

και βρίσκουμε

$$\frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta = C, \quad (5.1.2)$$

το οποίο είναι ολοκλήρωμα της κίνησης (είναι το ολοκλήρωμα της ενέργειας). Εάν υποθέσουμε κάποιες αρχικές συνθήκες $\theta(t=0), \dot{\theta}(t=0)$ τότε μπορούμε να τις αντικαταστήσουμε στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης και έτσι να βρούμε την σταθερά C . Είναι προφανές ότι για κάθε ζευγάρι αρχικών συνθηκών θα βρούμε, εν γένει, διαφορετική σταθερά C , δηλαδή, κάθε τιμή της C αντιστοιχεί σε διαφορετική λύση του προβλήματος.

Γιά την εξίσωση (5.1.1) δεν μπορεί να δωθεί η λύση σε κλειστή μορφή. Όμως, με την βοήθεια του ολοκληρώματος (5.1.2) μπορούμε να δώσουμε ένα διάγραμμα της κίνησης του συστήματος στον χώρο των καταστάσεων του. Η κάθε κατάσταση του συστήματος καθορίζεται από τις τιμές των δύο μεταβλητών θ και $\dot{\theta}$. Ο χώρος των δύο αυτών μεταβλητών [δηλαδή, το επίπεδο $(\theta, \dot{\theta})$] λέγεται χώρος των φάσεων. Η Εξ. (5.1.2) ορίζει καμπύλες στον χώρο των φάσεων.



Σχήμα 5.1: Διάγραμμα φάσεων για το απλό εκκρεμές. (Από το βιβλίο [8].)

Παρατηρούμε ότι η Εξ. (5.1.2) δίνει $C \geq -mgl \cos \theta$ και άρα έχουμε $C \geq -mgl$. Έτσι η διερεύνηση του διαγράμματος φάσεων μπορεί να περιορισθεί στις αποδεκτές τιμές του C . Για την κατανόηση του διαγράμματος φάσεων του απλού εκκρεμούς, στο Σχήμα 2.3, θα εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις.

Σημεία ισορροπίας

Θεωρούμε $C = -mgl$, οπότε η εξίσωση (5.1.2) ικανοποιείται μόνο για $\dot{\theta} = 0$, και $\theta = 0, \pm 2\pi, \dots$. Αυτές οι τιμές παριστάνονται με μεμονωμένα σημεία στο διάγραμμα φάσεων, ενώ οι αντίστοιχες λύσεις των εξισώσεων (5.1.1) είναι $\theta(t) = 0, \pm 2\pi, \dots$.

Εξετάζουμε επίσης την περίπτωση $C = mgl$. Η εξίσωση (5.1.2) ικανοποιείται για $\dot{\theta} = 0$, και $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$. Επιπλέον η εξίσωση κίνησης (5.1.1) δίνει $\ddot{\theta} = 0$ για αυτές τις τιμές του θ , συνεπώς έχουμε λύσεις $\theta(t) = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$. Άρα αυτά είναι σημεία ισορροπίας.

Τα σημεία του χώρου φάσεων $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0), (0, \pm 2\pi), \dots$ και $(\theta, \dot{\theta}) = (0, \pm\pi), \dots$ λέγονται σημεία ισορροπίας και αντιστοιχούν σε θέσεις όπου το εκκρεμές παραμένει ακίνητο.

Περιοδική κίνηση

Γιά $C \approx -mgl$ (αλλά $C > -mgl$) μπορούμε να γράψουμε $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ ώστε η (5.1.2) γράφεται

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = C \Rightarrow \dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\theta^2 = C',$$

όπου C' είναι μία νέα σταθερά. Η τελευταία εξίσωση δίνει μία οικογένεια ελλείψεων στο διάγραμμα φάσεων, οι οποίες περιβάλλουν το σημείο ισορροπίας $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$. Γιά $C' = 0$

βρίσκουμε το σημείο ισορροπίας ($\theta = 0 = \dot{\theta}$) και για κάθε $C' > 0$ έχουμε μία έλλειψη.

Σαγματικά σημεία

Γιά $C \approx mgl$ βρισκόμαστε κοντά στα σημεία ισορροπίας ($\pm\pi, 0$). Μπορούμε να γράψουμε για $\theta \approx \pi$ την προσέγγιση $\cos \theta \approx \cos \pi - (\cos \theta)'_{\theta=\pi}(\theta - \pi) + (\cos \theta)''_{\theta=\pi}(\theta - \pi)^2/2 = -1 + (\theta - \pi)^2/2$ ώστε η (5.1.2) γράφεται

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl \left(-1 + \frac{(\theta - \pi)^2}{2} \right) = C \Rightarrow \dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell}(\theta - \pi)^2 = C',$$

όπου C' είναι μία νέα σταθερά. Αν ορίσουμε $\theta_1 := \theta - \pi$ τότε για καμπύλες κοντά στο σημείο ($\pm\pi, 0$) έχουμε την εξίσωση

$$\dot{\theta}_1^2 - \frac{g}{\ell}\theta_1^2 = C'$$

η οποία περιγράφει μία οικογένεια υπερβολών στο διάγραμμα φάσεων, οι οποίες περιβάλλουν το σημείο ισορροπίας $\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$. Όμοιο αποτέλεσμα έχουμε και για το σημείο $\theta = -\pi, \dot{\theta} = 0$. Τα σημεία ($\pm\pi, 0$) που βρίσκονται ανάμεσα στις υπερβολές λέγονται σαγματικά σημεία και θα μελετηθούν αναλυτικότερα στη συνέχεια.

Περιστροφική κίνηση

Έστω $C > mgl$, οπότε η (5.1.2) δίνει $\dot{\theta}^2 > 0$ (δηλ. $\dot{\theta} \neq 0$). Αυτό σημαίνει ότι το θ είναι μία μονότονη συνάρτηση του χρόνου. Για $\dot{\theta} > 0$ παίρνουμε μη-κλειστές καμπύλες με φορά από αρνητικά θ προς θετικά, ενώ για $\dot{\theta} < 0$ παίρνουμε αντίστοιχες καμπύλες με αντίθετη φορά. Οι καμπύλες αυτές αντιστοιχούν σε συνεχή περιστροφική κίνηση του εκκρεμούς.

Σε αυτή την υποενότητα είδαμε λοιπόν τα ακόλουθα:

- ο Κάθε ζευγάρι $(\theta, \dot{\theta})$ είναι μία κατάσταση του συστήματος και καθορίζει την χρονική του εξέλιξη μέσω του προβλήματος αρχικών τιμών. Αυτή η εξέλιξη περιμένουμε να περιγράφεται εν γένει με μία συνεχή καμπύλη στο διάγραμμα φάσεων.
- ο Ο χρόνος t δεν εμφανίζεται στο διάγραμμα φάσεων αλλά η χρονική εξέλιξη υποδηλώνεται από τα βελόνια στις φασικές καμπύλες.
- ο Σημαντικά σημεία του διαγράμματος φάσεων είναι τα *σημεία ισορροπίας* τα οποία παριστάνουν λύσεις $\theta = \text{const.}$ της εξίσωσης κίνησης.
- ο Οι τροχιές γύρω από σημείο ισορροπίας μπορεί να είναι κλειστές καμπύλες, οπότε ονομάζουμε το σημείο ισορροπίας *ευσταθές*. Γενικότερα, αν μία μικρή διαταραχή από το σημείο ισορροπίας δεν οδηγεί (μέσω κάποιων φασικών καμπυλών) μακριά από αυτό τότε ονομάζουμε το σημείο ισορροπίας *ευσταθές*.
- ο Εάν μία μικρή διαταραχή από το σημείο ισορροπίας οδηγεί (μέσω κάποιων φασικών καμπυλών) μακριά από αυτό τότε ονομάζουμε το σημείο ισορροπίας *ασταθές*.

5.1.2 Εξισώσεις 2ης τάξης ως σύστημα εξισώσεων 1ης τάξης

Γενικεύουμε την περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος και υποθέτουμε την εξίσωση 2ης τάξης

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

η οποία περιγράφει, π.χ., την κίνηση ενός μηχανικού συστήματος. Η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται από τις τιμές των x, \dot{x} . Για να λύσουμε την εξίσωση (το πρόβλημα αρχικών τιμών) χρειαζόμαστε τις τιμές των μεταβλητών σε κάποια χρονική στιγμή $[x(t_0), \dot{x}(t_0)]$. Αυτό δίνει την αφορμή να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση σε μία νέα μορφή όπου τα x και \dot{x} θα εμφανίζονται σαν ανεξάρτητες μεταβλητές. Δίνουμε ένα νέο όνομα στο \dot{x}

$$\dot{x} = y$$

και η αρχική εξίσωση γράφεται

$$\dot{y} = f(x, y).$$

Οι δύο τελευταίες αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων 1ης τάξης το οποίο είναι ισοδύναμο με την αρχική εξίσωση 2ης τάξης.

Το διάγραμμα φάσεων του συστήματος των εξισώσεων βρίσκεται στο επίπεδο (x, y) . Η κίνηση του συστήματος ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f(x, y)}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}. \quad (5.1.3)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί κατ' αρχήν να δώσει λύσεις $y = y(x)$ οι οποίες ορίζουν τις καμπύλες του διαγράμματος φάσεων στο επίπεδο (x, y) .

Παράδειγμα: Βρείτε το διάγραμμα φάσεων για την εξίσωση $\ddot{x} + a \sin x = 0$. Αυτή είναι η εξίσωση για το απλό εκκρεμές. Γράφουμε

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -a \sin x.$$

Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται αν θέσουμε $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ και λύσουμε το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει:

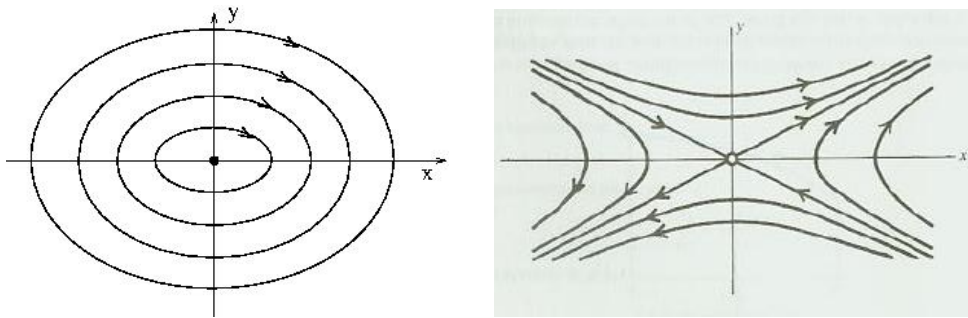
$$y = 0 \quad -a \sin x = 0.$$

Οι λύσεις είναι $y = 0, x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Παρατηρήστε ότι όλα τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται στον άξονα x .

Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων δίνονται από την

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a \sin x}{y} \Rightarrow \int y dy = -a \int \sin x dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 - a \cos x = C.$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου C παίρνουμε μία καμπύλη στο διάγραμμα φάσεων (Σχήμα 5.1). \square



Σχήμα 5.2: Αριστερά: Διάγραμμα φάσεων για ένα κέντρο στην αρχή των αξόνων. Δεξιά: Διάγραμμα φάσεων για ένα σαγματικό σημείο στην αρχή των αξόνων. (Δεξιά: από το βιβλίο [8].)

Παράδειγμα: Βρείτε το διάγραμμα φάσεων για την εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Αυτή είναι η εξίσωση για τον αρμονικό ταλαντωτή. Γράφουμε

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x.$$

Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας το οποίο βρίσκεται αν θέσουμε $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$. Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων δίνονται από την

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y} \Rightarrow \int y dy + \int \omega^2 x dx = 0 \Rightarrow y^2 + \omega^2 x^2 = C.$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου C παίρνουμε μία καμπύλη, η οποία είναι έλλειψη. Οι ελλείψεις περιβάλλουν το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ (Σχήμα 5.2). \square

Παράδειγμα: Βρείτε το διάγραμμα φάσεων για την εξίσωση $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$. Γράφουμε

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \omega^2 x.$$

Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας το οποίο βρίσκεται αν θέσουμε $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$. Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων δίνονται από την

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{y} \Rightarrow \int y dy - \int \omega^2 x dx = 0 \Rightarrow y^2 - \omega^2 x^2 = C.$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου $C \neq 0$ παίρνουμε μία καμπύλη, η οποία είναι υπερβολή, στο διάγραμμα φάσεων (Σχήμα 5.2). Για $C = 0$ παίρνουμε ευθείες ($y = \pm \omega x$) που παριστάνουν φασικές καμπύλες οι οποίες τέμνονται στο σημείο ισορροπίας $(0, 0)$. \square

Βιβλιογραφία: [8, 9]

5.2 Πληθυσμιακά μοντέλα

5.2.1 Βασικά πληθυσμιακά μοντέλα

Υποθέτουμε ένα βιολογικό είδος. Θα θέλαμε να μελετήσουμε την ανάπτυξη του πληθυσμού του $N = N(t)$. Στην απλούστερη περίπτωση μπορούμε να γράψουμε ένα μοντέλο που λαμβάνει υπ' όψιν γεννήσεις και θανάτους με αντίστοιχους σταθερούς ρυθμούς αύξησης και μείωσης του πληθυσμού

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN, \quad b, d > 0.$$

Το μοντέλο δίνει αύξηση (λόγω γεννήσεων) και μείωση (λόγω θανάτων) ανάλογες του πληθυσμού και αγνοεί άλλα φαινόμενα, π.χ., μετανάστευση κλπ. Η λύση της εξίσωσης είναι

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t}, \quad N_0 = N(t=0).$$

Αν $b > d$ ο πληθυσμός αυξάνει. Θεωρούμε ως πίο φυσιολογικό για ένα είδος την αύξηση του πληθυσμού του οπότε θα γράφουμε συνήθως

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (5.2.1)$$

όπου $r > 0$ μία θετική σταθερά.

Παρατηρούμε όμως αμέσως ότι το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να ισχύει για μεγάλο N διότι τότε ο πληθυσμός αυξάνει απεριόριστα. Διορθώνουμε το μοντέλο ως εξής

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (5.2.2)$$

και αυτό το ονομάζουμε *λογιστικό μοντέλο*. Για $N \ll K$ το μοντέλο αυτό δίνει παρόμοια αποτελέσματα με το προηγούμενο, άρα r είναι πραγματικά ο ρυθμός ανάπτυξης του πληθυσμού όταν το N είναι μικρό. Όσο το N γίνεται μεγαλύτερο βλέπουμε ότι ο ρυθμός αύξησης μειώνεται λόγω της παρουσίας του παράγοντα $(1 - N/K)$ και για $N \sim K$ ο νέος νόμος είναι σημαντικά διαφορετικός από τον προηγούμενο. Για $N > K$ ο ρυθμός αύξησης γίνεται αρνητικός, έχουμε δηλαδή μείωση του πληθυσμού. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι το K είναι το μέγεθος του πληθυσμού πάνω από το οποίο σταματάει η αύξηση του είδους διότι ενδεχομένως αυτός επιβαρύνει υπέρμετρα το περιβάλλον ή για άλλους λόγους. Η λύση της εξίσωσης είναι

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)} \rightarrow K \quad (\text{όταν } t \rightarrow \infty).$$

Τα μοντέλα που περιγράφηκαν εδώ είναι σχετικά απλά και θα μας παράσχουν μία πρώτη επαφή με το αντικείμενο. Είναι πάντως συνήθως ανεπαρκή για να περιγράψουν πραγματικά συστήματα, αλλά μπορούν να βελτιωθούν και να γίνουν πίο ρεαλιστικά.

Άσκηση. Κανονικοποιήστε κατάλληλα την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή (t και N) και γράψτε την Εξ. (5.2.2) σε κανονική μορφή. Επίσης γράψτε την λύση της κανονικής μορφής και συνδέστε την με την λύση που δώθηκε παραπάνω.

5.2.2 Μοντέλο κυνηγού-θηράματος (Lotka-Volterra)

Σε μία λίμνη ζουν δύο είδη ψαριών: το Α, το οποίο ζει τρώγοντας χόρτα (τα οποία υποθέτουμε ότι υπάρχουν σε αφθονία) και το Β (κυνηγός) το οποίο τρέφεται τρώγοντας το Α (θήραμα). Χρειαζόμαστε ένα μοντέλο για την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο ειδών.

Έστω $x(t)$ ο πληθυσμός του είδους Α και $y(t)$ ο πληθυσμός του Β. Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός του Α αυξάνει με έναν απλό νόμο όταν αυτό αφήνεται ελεύθερο από εξωτερικές επιδράσεις. Σε χρόνο δt έχουμε αύξηση δx κατά

$$ax \delta t, \quad a > 0$$

όπου έχει ληφθεί υπ' όψιν ένας σταθερός αριθμός γεννήσεων και θανάτων όπως ακριβώς στο μοντέλο (5.2.1).

Υποθέτουμε τώρα ότι ο ρυθμός μείωσης του Α είναι ανάλογος των συναντήσεων μεταξύ Α και Β:

$$-cxy \delta t, \quad c > 0$$

διότι τα Α τρώγονται από τα Β.

Άρα έχουμε συνολική μεταβολή

$$\delta x = ax \delta t - cxy \delta t$$

το οποίο σε διαφορική μορφή γράφεται

$$\dot{x} = ax - cxy. \quad (5.2.3)$$

Τώρα υποθέτουμε ότι (απουσία του είδους Α, δηλ., της τροφής) για το Β έχουμε περισσότερους θανάτους από ότι γεννήσεις, άρα μία μεταβολή, εξ αυτών των λόγων, δy της μορφής

$$-by \delta t, \quad b > 0.$$

Αλλά επίσης μπορούμε να υποθέσουμε αύξηση του πληθυσμού του Β, λόγω εύρεσης τροφής, ανάλογη με τις συναντήσεις μεταξύ Α και Β:

$$dxy \delta t, \quad d > 0.$$

Τελικά έχουμε

$$\dot{y} = -by + dxy. \quad (5.2.4)$$

Έχουμε να μελετήσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων πρώτης τάξης (5.2.3), (5.2.4). Σημειώνουμε ότι υπάρχει ο περιορισμός $x \geq 0$, $y \geq 0$ (οι πληθυσμοί πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί).

Σημεία ισορροπίας. Το πρώτο βήμα για την μελέτη του συστήματος είναι να βρούμε τα σημεία ισορροπίας του, δηλαδή εκείνα τα σημεία για τα οποία έχουμε $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$:

$$ax - cxy = 0, \quad -by + dxy = 0.$$

Οι λύσεις των εξισώσεων δίνουν τα δύο σημεία

$$(0, 0) \quad (b/d, a/c). \quad (5.2.5)$$

Το πρώτο σημείο μας λέει απλώς ότι εάν αρχικώς δεν έχουμε κανένα Α και κανένα Β τότε κανένα είδος δεν πρόκειται να δημιουργηθεί. Το δεύτερο σημείο ισορροπίας παριστάνει μια κατάσταση του συστήματος στην οποία οι πληθυσμοί των δύο ειδών παραμένουν αμετάβλητοι στον χρόνο. (Δείτε τα δύο σημεία ισορροπίας στο διάγραμμα φάσεων στο σχήμα (5.3).)

Φασικές καμπύλες. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τις καμπύλες του διαγράμματος φάσεων. Αυτές ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-b + cx)y}{(a - cy)x},$$

η οποία μπορεί να λυθεί αν διαχωρίσουμε τα x και y :

$$\int \frac{a - cy}{y} dy = \int \frac{-b + dx}{x} dx,$$

και παίρνουμε λύση

$$(cy - a \ln y) + (dx - b \ln x) = C. \quad (5.2.6)$$

Το C είναι μία αυθαίρετη σταθερά, η οποία παίζει τον ρόλο της παραμέτρου της οικογένειας καμπυλών του διαγράμματος φάσεων.

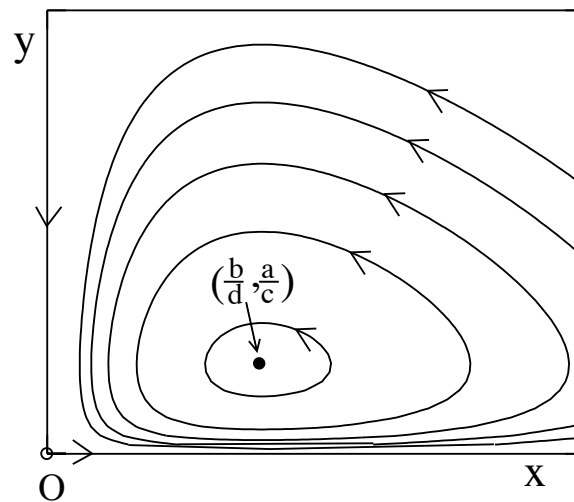
Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (5.2.6) είναι της μορφής $f(x) + g(y)$, όπου $f(x) = dx - b \ln x$ και $g(y) = cy - a \ln y$. Έχω ελάχιστο της $f(x)$ και, αντίστοιχως, της $g(y)$ για

$$\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{b}{x} - d = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{d}, \quad \frac{dg}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{a}{y} - c = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{c}. \quad (5.2.7)$$

Η συνάρτηση $f(x) + g(y)$ έχει ελάχιστο στο σημείο όπου $d[f(x) + g(y)]/dx = 0 \Rightarrow df(x)/dx = 0$ και $d[f(x) + g(y)]/dy = 0 \Rightarrow dg(y)/dy = 0$, δηλαδή στο σημείο (5.2.7).

Γύρω από το σημείο ισορροπίας (5.2.7) οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων είναι κλειστές καμπύλες. Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε το διάγραμμα φάσεων. Κάθε καμπύλη έχει μια κατεύθυνση η οποία δείχνει την αλλαγή της κατάστασης με την ροή του χρόνου. Την κατεύθυνση μπορούμε να την βρούμε, π.χ., υπολογίζοντας το πρόσημο του \dot{x} σε ένα σημείο $x = b/d, y > a/c$. Αν βρούμε την κατεύθυνση σε ένα σημείο όλες οι άλλες κατευθύνσεις προκύπτουν από ιδιότητες συνέχειας.

Εφ' όσον οι καμπύλες είναι κλειστές οι πληθυσμοί $x(t)$, $y(t)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Η χρονική στιγμή που ο πληθυσμός Β είναι μέγιστος είναι περίπου ένα τέταρτο της περιόδου μετά από την στιγμή που ο πληθυσμός Α ήταν στο μέγιστο. Όταν το Β τρώει το Α ο πληθυσμός του αυξάνει και αυτός του Α μειώνεται. Αυτό έχει σαν συνέπεια να μειωθεί αργότερα το Β. Ακολούθως αυξάνεται το Α διότι δεν υπάρχει πολύ από το Β για να το φάει και ο κύκλος ξαναρχίζει. Τέτοιες συμπεριφορές έχουν παρατηρηθεί σε βιολογικά συστήματα.



Σχήμα 5.3: Το διάγραμμα φάσεων του μοντέλου Lotka-Volterra. Όλες οι καμπύλες είναι κλειστές, παρ' ότι ορισμένες βγαίνουν εκτός του πλαισίου. (Στο παράδειγμα του σχήματος έχουμε χρησιμοποιήσει $a = 1, b = 2, c = 1, d = 1$ οπότε τα σημεία ισορροπίας είναι τα $(0, 0), (2, 1)$. Έχουμε σχεδιάσει τις καμπύλες της Εξ. (5.2.6) για $C = 1.7, 2.2, 2.7, 3.2, 3.7$.)

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι, αναλόγως των αρχικών συνθηκών, κάθε σύστημα κινείται για πάντα πάνω σε μία από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος φάσεων. Μόνο εάν υποθέσουμε ότι υπάρξει κάποια ξαφνική αλλαγή στις συνθήκες του περιβάλλοντος, π.χ., έλλειψη φυτικής τροφής κάποια χρονιά, τότε το σύστημα θα μεταβεί σε κάποια άλλη από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος φάσεων (αυτό βέβαια δεν περιγράφεται από το παρόν μοντέλο). Σε κάθε περίπτωση το σύστημα παραμένει εγκλωβισμένο σε μία από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μειονέκτημα του μοντέλου. Σε πολλά βιολογικά συστήματα θα περίμενε κανείς ότι το σύστημα θα είχε μια συγκεκριμένη κατάσταση ισορροπίας (πιθανόν μία περιοδική κατάσταση) στην οποία θα επανέρχονταν μετά από κάθε προσωρινή διαταραχή των εξωτερικών συνθηκών. Η συμπεριφορά του παρόντος μοντέλου πάντως είναι χαρακτηριστική για όλα τα συστήματα τα οποία έχουν ένα πρώτο ολοκλήρωμα της μορφής (5.1.3).

5.2.3 Μοντέλα ανταγωνισμού δύο ειδών

Μία άλλη κατηγορία προβλημάτων είναι αυτά που αναφέρονται σε δύο είδη τα οποία ανταγωνίζονται για το ίδιο είδος τροφής. Τα μοντέλα που τα περιγράφουν είναι, κατά ένα μέρος, παρόμοια με το Lotka-Volterra. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ένα μοντέλο τύπου Lotka-Volterra με μία όμως σημαντική προσθήκη. Θα εισάγουμε την λεγόμενη λογιστική ανάπτυξη για

κάθε ένα από τα δύο είδη. Οπότε έχουμε το μοντέλο

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right),\end{aligned}\quad (5.2.8)$$

όπου r_1, r_2 δίνουν τους ρυθμούς αύξησης των πληθυσμών για μικρά N_1, N_2 , οι K_1, K_2 είναι οι αριθμοί για τους οποίους έχουν κορεσμό των αντίστοιχων πληθυσμών και b_{12}, b_{21} είναι συντελεστές που μετρούν την επίδραση του ανταγωνισμού στους N_1 και N_2 αντίστοιχα.

Μοντέλα τύπου Lotka-Volterra, σαν και το παραπάνω, τα οποία περιλαμβάνουν την λογιστική ανάπτυξη θεωρούνται ότι δίνουν αποτελέσματα πιο κοντά στην πραγματικότητα.

Άσκηση. Ορίστε κανονικές μεταβλητές για τους πληθυσμούς N_1, N_2 και για τον χρόνο t και γράψτε την εξίσωση στις νέες μεταβλητές.

5.2.4 Μοντέλο επιδημιών

Θεωρούμε την εξάπλωση επιδημίας σε έναν σταθερό πληθυσμό. Σε δεδομένη στιγμή t έχουμε

$x(t)$: οι υγιείς οι οποίοι δεν έχουν αρρωστήσει και άρα είναι δυνατόν να αρρωστήσουν.

$y(t)$: οι άρρωστοι.

$z(t)$: αυτοί που έχουν αναρρώσει και άρα έχουν ανοσία.

Υποθέτουμε τώρα ένα σταθερό ρυθμό επαφών μεταξύ των υγείων και των αρρώστων εκ των οποίων ένα ποσοστό οδηγεί στην μετάδοση της ασθένειας. Άρα σε χρόνο δt έχω

$$\delta x = -\beta xy \delta t$$

νέους αρρώστους.

Υποθέτω επίσης ότι οι άρρωστοι αναρρώνουν με ρυθμό γ , άρα

$$\delta y = \beta xy \delta t - \gamma y \delta t.$$

Η αύξηση του πληθυσμού αυτών με ανοσία είναι

$$\delta z = \gamma y \delta t.$$

Σε διαφορική μορφή οι παραπάνω σχέσεις δίνουν το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta xy \\ \dot{y} &= \beta xy - \gamma y \\ \dot{z} &= \gamma y.\end{aligned}\quad (5.2.9)$$

Γιά το σύστημα αυτό βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = 0 \Rightarrow x + y + z = N,$$

ώστε λέμε ότι έχουμε ένα ολοκλήρωμα των εξισώσεων, που εδώ εκφράζει το γεγονός ότι ο συνολικός πληθυσμός N είναι σταθερός. Παρατηρούμε ότι η τρίτη εξίσωση του συστήματος προκύπτει από τις δύο πρώτες αν χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα.

Γιά το διάγραμμα φάσεων στο επίπεδο (x, y) έχουμε

(α) Σημεία ισορροπίας: Θέτουμε $\dot{x} = 0 = \dot{y} \Rightarrow$ και βρίσκουμε

$$xy = 0, \quad (\beta x - \gamma)y = 0 \Rightarrow y = 0, \quad x > 0, \quad (5.2.10)$$

δηλαδή όλα τα σημεία του άξονα x (για $x > 0$) είναι σημεία ισορροπίας.

(β) Οι εξίσωση των καμπυλών του διαγράμματος φάσεων:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta xy - \gamma y}{-\beta xy} = -1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{x}\right) dx \Rightarrow y = \frac{\gamma}{\beta} \ln x - x + C \quad (5.2.11)$$

όπου το C είναι μία σταθερά (η παράμετρος της οικογένειας των καμπυλών). Επειδή τώρα

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{\gamma}{\beta},$$

ο αριθμός των αρρώστων y είναι μέγιστος (για μία συγκεκριμένη καμπύλη) όταν ο αριθμός των υγιών είναι $x = \gamma/\beta$.

Βιβλιογραφία: [8, 11, 10]

5.3 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

5.3.1 Συστήματα δύο εξισώσεων 1ης τάξης

Έχουμε δει πώς στην μηχανική μια εξίσωση δεύτερης τάξης μπορεί να γραφεί σαν δύο εξισώσεις πρώτης τάξης. Συστήματα εξισώσεων πρώτης τάξης, προκύπτουν επίσης σαν μοντέλα συστημάτων στην μηχανική, στην βιολογία και αλλού. Τα συστήματα αυτά είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, y) \\ \dot{y} &= Y(x, y). \end{aligned}$$

Αυτά που μας ενδιαφέρει να ξέρουμε σε τέτοια συστήματα είναι

(α) Τα σημεία ισορροπίας, δηλαδή τα σημεία στα οποία

$$X(x, y) = 0, \quad Y(x, y) = 0.$$

(β) Το διάγραμμα φάσεων, οι καμπύλες του οποίου δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}.$$

(γ) Οι λύσεις του συστήματος

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Η μελέτη του συστήματος μπορεί να είναι περίπλοκη αναλόγως της μορφής των συναρτήσεων $X(x, y)$ και $Y(x, y)$.

5.3.2 Γραμμικά συστήματα με δύο μεταβλητές

Η μελέτη συστημάτων εξισώσεων αρχίζει από τα πιο απλά συστήματα που είναι τα γραμμικά. Εάν έχουμε μία μεταβλητή και ο ρυθμός αύξησής της είναι ανάλογος της τιμής της, τότε η δυναμική της περιγράφεται από την γραμμική εξίσωση

$$\dot{x} = ax \Rightarrow x(t) = ce^{at},$$

το οποίο έχουμε δει ότι είναι ένα απλό μοντέλο για αύξηση πληθυσμού.

Ένα γραμμικό σύστημα με δύο μεταβλητές έχει την γενική μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Το σημείο ισορροπίας βρίσκεται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

εκτός εάν η ορίζουσα των συντελεστών στις παραπάνω εξισώσεις είναι μηδέν.

Βρίσκουμε λύσεις των Εξ. (5.3.1) δοκιμάζοντας την μορφή

$$x = r e^{\lambda t}, \quad y = s e^{\lambda t}, \quad (5.3.2)$$

όπου r, s, λ είναι σταθερές. Αντικατάσταση στις (5.3.1) δίνει τις

$$(a - \lambda)r + bs = 0, \quad cr + (d - \lambda)s = 0. \quad (5.3.3)$$

Θεωρούμε ως αγνώστους τους r, s και ζητάμε να μηδενίζεται η ορίζουσα του συστήματος, ώστε εξάγουμε την συνθήκη για το λ

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0,$$

η οποία λέγεται *χαρακτηριστική εξίσωση* του συστήματος και στην περίπτωση μας έχει δύο λύσεις λ_1, λ_2 . Για κάθε τιμή του λ οι εξισώσεις (5.3.3) δίνουν τη σχέση μεταξύ r και s .

Η γενική λύση είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων που βρήκαμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= r_1 e^{\lambda_1 t} + r_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= s_1 e^{\lambda_1 t} + s_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Θα επαναλάβουμε τώρα την παραπάνω διαδικασία σε μια διαφορετική γλώσσα. Το γραμμικό σύστημα (5.3.1) γράφεται στην μορφή

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (5.3.4)$$

Αντικατάσταση της (5.3.2) δίνει το πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\lambda \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix},$$

άρα ακριβώς λ είναι οι (δύο) ιδιοτιμές του πίνακα 2×2 του συστήματος και οι λύσεις για τα (r, s) είναι τα ιδιοδιανύσματα του.

5.3.3 Πραγματικές ιδιοτιμές

Ας δούμε πρώτα την περίπτωση που οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικές (δηλαδή, ο πίνακας του συστήματος έχει πραγματικές ιδιοτιμές).

Παράδειγμα. (σάγμα) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - 3y \\ \dot{y} &= 2y \end{aligned}$$

Βρίσκουμε λύσεις δοκιμάζοντας την μορφή

$$x = r e^{\lambda t}, \quad y = s e^{\lambda t}.$$

Αντικαθιστούμε στο σύστημα εξισώσεων και βρίσκουμε

$$(\lambda + 1)r + 3s = 0, \quad (\lambda - 2)s = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Για $\lambda = -1$ βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $(r, s) = (1, 0)$ και για $\lambda = 2$ βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $(r, s) = (1, -1)$.

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ y(t) &= -c_2 e^{2t} \end{aligned}$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθερές.

Σχεδίαση διαγράμματος φάσεων. Για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα φάσης [στο επίπεδο (x, y)] παρατηρούμε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα $[(1, 0)$ και $(1, -1)]$ μένουν αναλλοίωτες από τις εξισώσεις κίνησης. Για να το δούμε αυτό υποθέτουμε ότι για κάποια χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε $[x(t=0), y(t=0)] = r(1, 0)$ το οποίο είναι το πρώτο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα του συστήματος. Η λύση του συστήματος βρίσκεται αν θέσουμε στην γενική λύση $c_2 = 0$ και $c_1 = r$, οπότε βρίσκουμε $[x(t), y(t)] = r(1, 0)e^{-t}$, άρα η λύση παραμένει επάνω στο ιδιοδιάνυσμα. Επίσης παρατηρήστε ότι η λύση πλησιάζει την αρχή των αξόνων (το σημείο ισορροπίας). Ομοίως για $[x(t=0), y(t=0)] = r(1, -1)$, θέτουμε $c_1 = 0$ και $c_2 = r$ στην γενική λύση και έχουμε $[x(t), y(t)] = r(1, -1)e^{2t}$, δηλαδή η λύση παραμένει στο ιδιοδιάνυσμα, αλλά απομακρύνεται από το σημείο ισορροπίας.

Συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες $r(1, 0)$ και $r(1, -1)$ είναι δύο φασικές καμπύλες. Η φορά της κίνησης είναι προς την αρχή των αξόνων για την ευθεία $r(1, 0)$ (διότι $\lambda = -1 < 0$ και άρα το x μειώνεται εκθετικά) ενώ για την κίνηση στην ευθεία $r(-1, 1)$ έχουμε απομάκρυνση από την αρχή των αξόνων (διότι $\lambda = 2 > 0$ και άρα τα (x, y) αυξάνονται εκθετικά). Όλες οι υπόλοιπες καμπύλες του διαγράμματος σχεδιάζονται εάν σκεφτούμε ότι πρέπει να υπάρχει συνέχεια με τις δύο ευθείες που προαναφέρθηκαν.

Ένα σημείο ισορροπίας με δύο πραγματικές ετερόσημες ιδιοτιμές λέγεται *σαγματικό σημείο* και είναι ένα ασταθές σημείο ισορροπίας.

Παράδειγμα. (κόμβος) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= 3x - 4y\end{aligned}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

με λύσεις $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(2, 3)$, $(1, 1)$.

Η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned}x(t) &= 2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}, \\ y(t) &= 3c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}.\end{aligned}$$

Σχεδίαση διαγράμματος φάσεων. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}}{3c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}}$$

από όπου βρίσκουμε

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{2}{3}, \quad t \rightarrow \infty \quad \text{και} \quad \frac{x(t)}{y(t)} = 1, \quad t \rightarrow -\infty.$$

Συμπεραίνουμε ότι όλες οι φασικές καμπύλες είναι παράλληλες με το ιδιοδιάνυσμα $(2, 3)$ της μεγαλύτερης (κατ' απόλυτη τιμή) ιδιοτιμής μιά μεγάλους χρόνους ($t \rightarrow \infty$), ενώ είναι παράλληλες με το ιδιοδιάνυσμα $(2, 3)$ της μικρότερης (κατ' απόλυτη τιμή) ιδιοτιμής μιά μικρούς χρόνους ($t \rightarrow -\infty$).

Σχεδιάζουμε τις ευθείες που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές και με βάση την παραπάνω παρατήρηση σχεδιάζουμε και τις υπόλοιπες φασικές καμπύλες.

Ένα σημείο ισορροπίας με δύο πραγματικές ομόσημες ιδιοτιμές λέγεται *κόμβος*. Όταν οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές (όπως σε αυτό το παράδειγμα) έχουμε έναν ευσταθή *κόμβο*.

Γενική θεωρία: Διαγωνοποίηση. Το γραμμικό σύστημα (5.3.1) που μελετάμε μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} := (x_1, x_2),$$

όπου A είναι ο πίνακας 2×2 των συντελεστών (όπως και στην Εξ. (5.3.4)). Γιά την μελέτη αυτού του πίνακα, αλλά και γενικότερα πινάκων $n \times n$, ανακαλούμε ένα σημαντικό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας.

Θεώρημα: Εάν οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ενός πίνακα A διάστασεων $n \times n$ είναι πραγματικές και διάκριτες, τότε οποιοδήποτε σύνολο των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ είναι βάση του \mathbf{R}^n , ο πίνακας $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ είναι αντιστρέψιμος και

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

Για να βρούμε την γενική λύση του γραμμικού συστήματος ορίζουμε ένα νέο διάνυσμα μεταβλητών

$$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x},$$

γιά το οποίο έχουμε

$$\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = P^{-1}A\mathbf{x} = P^{-1}AP\mathbf{y}.$$

Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι

$$\dot{\mathbf{y}} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]\mathbf{y}.$$

Η γενική λύση είναι

$$\mathbf{y}(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]\mathbf{y}(0),$$

όπου $\mathbf{y}(0)$ είναι η αρχικές συνθήκες εκφρασμένες στις μεταβλητές \mathbf{y} . Τελικά, στις αρχικές μεταβλητές έχουμε την γενική λύση

$$\mathbf{x}(t) = P \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}\mathbf{x}(0),$$

όπου $\mathbf{x}(0)$ είναι η αρχικές συνθήκες.

Παρατήρηση: Δεδομένου ότι συνήθως μελετάμε συστήματα δύο εξισώσεων είναι χρήσιμο να θυμηθούμε ότι για έναν 2×2 πίνακα P ο αντίστροφος P^{-1} είναι

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

όπου $\Delta = ad - bc$ η ορίζουσα.

Παράδειγμα. (σαγματικό σημείο) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας είναι

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ και δύο αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= 2y_2 \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$. Η γενική λύση του είναι $y_1(t) = c_1e^{-t}$, $y_2(t) = c_2e^{2t}$ ή σε άλλη μορφή

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \mathbf{y}(0).$$

(Όπου θέσαμε $y_1(0) = c_1$, $y_2(0) = c_2$.)

Τελικά έχουμε

$$\mathbf{x}(t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}(0) \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_1(0)e^{-t} + x_2(0)(e^{-t} - e^{2t}) \\ x_2(t) = x_2(0)e^{2t} \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα φάσης στα επίπεδα (y_1, y_2) και (x_1, x_2) . Έχουμε ένα σαγματικό σημείο.

5.3.4 Μιγαδικές ιδιοτιμές

Ας δούμε τώρα την περίπτωση που οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικές (δηλαδή, ο πίνακας του συστήματος έχει μιγαδικές ιδιοτιμές).

Παράδειγμα. Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_2 \\ \dot{x}_2 &= bx_1 + ax_2 \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - a)^2 + b^2 = 0, \Rightarrow \lambda = a \pm ib.$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(1, \mp i)$. Άρα

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r_1e^{(a+ib)t} + r_2e^{(a-ib)t} = e^{at}[r_1e^{ibt} + r_2e^{-ibt}] \\ x_2(t) &= -ir_1e^{(a+ib)t} + ir_2e^{(a-ib)t} = e^{at}\frac{1}{i}[r_1e^{ibt} - r_2e^{-ibt}] \end{aligned}$$

Εκλέγουμε $r_2^* = r_1 := c_1/2 + ic_2/2$ όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, ώστε να πετύχουμε πραγματική λύση:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{at} 2\operatorname{Re}[r_1 e^{ibt}] = e^{at} [c_1 \cos bt - c_2 \sin bt] \\x_2(t) &= e^{at} 2\operatorname{Im}[r_1 e^{ibt}] = e^{at} [c_1 \sin bt + c_2 \cos bt].\end{aligned}$$

Η λύση αυτή γράφεται και στην μορφή

$$\mathbf{x}(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} \mathbf{x}(0),$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ και $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(t=0)$ είναι οι αρχικές συνθήκες.

Πολικές συνεταγμένες: Ορίζουμε την μιγαδική μεταβλητή $z = x_1 + ix_2$. Ένας σύντομος υπολογισμός δείχνει ότι το σύστημα (5.3.5), γράφεται στην μορφή

$$\dot{z} = (a + ib)z.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την πολική μορφή για την μιγαδική μεταβλητή $z = r(t)e^{i\theta(t)}$, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar \Rightarrow r = r_0 e^{at} \\ \dot{\theta} &= b \Rightarrow \theta = bt + \theta_0.\end{aligned}$$

Αυτή η μορφή της λύσης δείχνει ότι η χρονική εξέλιξη κάθε σημείου στο διάγραμμα φάσης δίνει περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων, ενώ ταυτοχρόνως πλησιάζει (για $a < 0$) ή απομακρύνεται (για $a > 0$) από αυτό. Λέμε ότι η αρχή των αξόνων είναι ένα σπειροειδές σημείο ισοροπίας. Αυτό είναι ευσταθές για $a < 0$ και ασταθές για $a > 0$.

Κέντρο: Στην περίπτωση $a = 0$ έχουμε κλειστές τροχιές και λέμε ότι το σημείο ισοροπίας είναι κέντρο.

Οποιοδήποτε σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2\end{aligned}$$

για τον οποίο έχουμε μιγαδικές ιδιοτιμές έχει ένα σπειροειδές σημείο ισοροπίας. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα: Εάν ένας πραγματικός πίνακας A διαστάσεων $2n \times 2n$ έχει διάκριτες ιδιοτιμές $\lambda_j = a_j + ib_j$ και $\lambda_j^* = a_j - ib_j$ και ιδιοδιανύσματα $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$, $\mathbf{w}_j^* = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j$, τότε $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n\}$ είναι βάση του \mathbf{R}^{2n} , ο πίνακας $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n]$ είναι αντιστρέψιμος και

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}.$$

Έστω εάν ορίσουμε ένα νέο διάνυσμα μεταβλητών $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$, έχουμε

$$\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = P^{-1}A\mathbf{x} = P^{-1}AP\mathbf{y} = \text{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \mathbf{y}.$$

Άρα ισχύει

$$\mathbf{x}(t) = P \text{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}(0).$$

Παράδειγμα. (σπειροειδές σημείο) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = -1 \pm i$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(x_1, x_2) = (1, -2 \pm i)$. Άρα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ τότε βρίσκουμε $\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = P^{-1}A\mathbf{x} = P^{-1}AP\mathbf{y}$. Από το παραπάνω θεώρημα (ή από κατ' ευθείαν υπολογισμό του $P^{-1}AP$) έχω

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}.$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα (με $a = -1, b = 1$) συνάγουμε

$$\mathbf{y}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \mathbf{y}(0)$$

Τελικά

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = Pe^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \mathbf{y}(0) = Pe^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}(0) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t} [x_1(0) \cos t + (2x_1(0) + x_2(0)) \sin t] \\ x_2(t) &= e^{-t} [x_2(0) \cos t - (5x_1(0) + 2x_2(0)) \sin t] \end{aligned}$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα φάσης στο επίπεδο (x_1, x_2) . Έχουμε ένα ευσταθές σπειροειδές σημείο.

Παράδειγμα: (σπειροειδές σημείο) Βρείτε την γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 - 3x_2. \end{aligned}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i,$$

όπου $\lambda_2 = \lambda_1^*$. Για $\lambda = \lambda_1$ και $\lambda = \lambda_2$ βρίσκουμε αντιστοίχως

$$s_1 = (-2 + i)r_1, \quad s_2 = (-2 - i)r_2.$$

Άρα η γενική λύση γράφεται

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r_1 e^{(-1+i)t} + r_2 e^{(-1-i)t}, \\ x_2(t) &= r_1(-2 + i) e^{(-1+i)t} + r_2(-2 - i) e^{(-1-i)t}. \end{aligned}$$

Αν ζητάμε πραγματικές λύσεις τότε πρέπει να θέσουμε $r_2 = r_1^*$ και γράφοντας $r_1 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}ic_2$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}(c_1 \cos t - c_2 \sin t), \\ x_2(t) &= -e^{-t}[(2c_1 + c_2) \cos t + (c_1 - 2c_2) \sin t]. \end{aligned}$$

Σχεδιασμός διαγράμματος φάσεων. Σχεδιάζουμε μία σπείρα στην οποία τα βέλη οδηγούν προς το σημείο ισορροπίας, διότι το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι αρνητικό. Υπάρχουν δύο τέτοιες σπείρες (αριστερόστροφη και δεξιόστροφη). Επιλέγουμε εκείνη που ικανοποιεί τις εξισώσεις, πράγμα που το ελέγχουμε με υπολογισμό των \dot{x}_1, \dot{x}_2 σε ορισμένα σημεία του διαγράμματος φάσεων.

5.3.5 Διάγραμμα σημείων ισορροπίας.

Έστω η γενική μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2. \end{aligned}$$

Θέτουμε $\delta = \det A = ad - bc$ και $\tau = \text{trace} A = a + d$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$$

(α) Γιά $\delta < 0$ έχουμε σαγματικό σημείο.

(β) Γιά $\delta > 0$ και $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ έχουμε κόμβο.

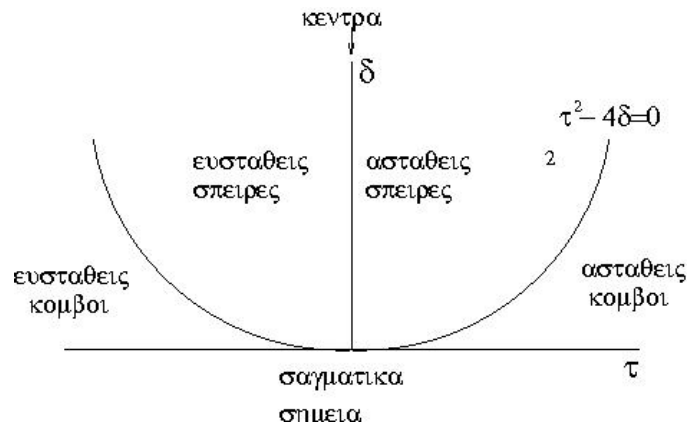
Είναι ευσταθής γιά $\tau < 0$ και ασταθής γιά $\tau > 0$.

(γ) Γιά $\delta > 0$ και $\tau^2 - 4\delta < 0$ έχουμε σπειροειδές σημείο (γιά $\tau \neq 0$).

Είναι ευσταθές γιά $\tau < 0$ και ασταθές γιά $\tau > 0$.

(δ) Γιά $\delta > 0$ και $\tau = 0$ έχουμε κέντρο.

Βιβλιογραφία: [8, 9, 7]



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα σημείων ισορροπίας στο χώρο των παραμέτρων.

5.4 Ευστάθεια σημείων ισορροπίας

Θεώρημα: Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A ενός γραμμικού συστήματος n εξισώσεων έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος τότε: για κάθε αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ ισχύει $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ και επίσης, αν $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$.

Θεώρημα: Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν θετικό πραγματικό μέρος τότε: για κάθε αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ ισχύει $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ και επίσης, αν $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$.

Ορισμός: Έστω $\lambda_j = a_j + ib_j$ οι ιδιοτιμές του πίνακα ενός γραμμικού συστήματος και $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε ονομάζουμε τους χώρους

$$E^s = \text{Span}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \mid a_j < 0\}$$

$$E^u = \text{Span}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \mid a_j > 0\}$$

$$E^c = \text{Span}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \mid a_j = 0\}$$

ευσταθή, ασταθή και κεντρικό υπόχωρο του συστήματος αντίστοιχα.

Παράδειγμα: Για ένα σύστημα δύο εξισώσεων με ένα σαγματικό σημείο ο ευσταθής και ο ασταθής υπόχωρος είναι ο καθένας μία ευθεία.

Παράδειγμα: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ και ιδιοδιανύσματα $\mathbf{w}_{1,2} = [0, 1, 0]^T \pm i[1, 0, 0]^T$ και επίσης $\lambda_3 = 3$ με ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}_3 = [0, 0, 1]^T$. Ο ευσταθής υπόχωρος E^s είναι το επίπεδο (x_1, x_2) και ο ασταθής υπόχωρος E^u είναι ο άξονας x_3 .

Θεώρημα: Οι υπόχωροι E^s, E^u, E^c ενός πίνακα $n \times n$ μένουν αναλλοίωτοι από τις αντίστοιχες εξισώσεις. Επίσης,

$$\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c.$$

Ορισμός: Ένα σημείο ισορροπίας \mathbf{x}_0 λέγεται *ευσταθές* αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε αρχική συνθήκη $\mathbf{x}(t=0) \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ έχουμε $\mathbf{x}(t) \in N_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ για κάθε χρόνο $t > 0$.

Το σημείο ισορροπίας λέγεται *ασταθές* εάν δεν είναι ευσταθές.

Παραδείγματα: Ένα σαγματικό σημείο είναι ασταθές.

Ένας κόμβος μπορεί να είναι ασταθής (για θετικές ιδιοτιμές) ή ευσταθής (για αρνητικές ιδιοτιμές).

Ένα σπειροειδές σημείο μπορεί να είναι ασταθές (ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος) ή ευσταθές (ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος).

Ένα κέντρο είναι ευσταθές.

Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται *ασυμπτωτικά ευσταθές* αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0.$$

Παραδείγματα: Εάν ένα σπειροειδές σημείο είναι ευσταθές τότε είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Ένα κέντρο είναι ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Βιβλιογραφία: [7, 8, 9]

5.5 Μη γραμμικά συστήματα

Έστω το μη γραμμικό σύστημα n εξισώσεων

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (5.5.1)$$

όπου \mathbf{x} είναι το διάνυσμα των n μεταβλητών και \mathbf{f} είναι διάνυσμα n συναρτήσεων. Για παράδειγμα, για ένα σύστημα δύο εξισώσεων έχουμε την μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Θεωρούμε ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος \mathbf{x}_0 και τον ιακωβιανό πίνακα υπολογισμένο στο σημείο ισορροπίας (υποθέτουμε σύστημα δύο εξισώσεων)

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} df_1/dx_1 & df_1/dx_2 \\ df_2/dx_1 & df_2/dx_2 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0}.$$

Θα δούμε ότι το γραμμικό σύστημα

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad (5.5.2)$$

διατηρεί (στην γενική περίπτωση), κοντά στο σημείο ισορροπίας \mathbf{x}_0 την μορφή του διαγράμματος φάσης του μη γραμμικού συστήματος (εκτός ειδικών περιπτώσεων).

Θεώρημα (The stable manifold theorem). Έστω E ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbf{R}^n που περιέχει την αρχή των αξόνων, επίσης $\mathbf{f} \in C^1(E)$, όπου $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ και ότι $D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ έχει k ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και $n - k$ ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος. Τότε υπάρχει μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα S διαστάσεως k η οποία είναι εφαπτόμενη στον ευσταθή υπόχωρο E^s του γραμμικοποιημένου συστήματος (5.5.2) στο σημείο $\mathbf{0}$ τέτοια ώστε για κάθε αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0 \in S$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Επίσης, υπάρχει μία πολλαπλότητα U διαστάσεως $n - k$ εφαπτόμενη στον ασταθή υπόχωρο E^u του γραμμικοποιημένου συστήματος στο σημείο $\mathbf{0}$ τέτοια ώστε για κάθε αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0 \in U$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Οι πολλαπλότητες S και U είναι αναλλοίωτες στις εξισώσεις.

Με βάση το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να πούμε ότι, αν ένα σημείο ισορροπίας έχει όλες τις ιδιοτιμές με μη-μηδενικό πραγματικό μέρος (οπότε λέγεται *υπερβολικό σημείο ισορροπίας*), τότε η συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την συμπεριφορά του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Παράδειγμα: Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων του μη γραμμικού συστήματος

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = 1 - x_1 x_2.$$

Θέτουμε $f_1 = x_1 - x_2$, $f_2 = 1 - x_1 x_2$. Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται ως

$$f_1 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

$$f_2 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1 = x_2.$$

Άρα έχουμε τα σημεία $(-1, -1)$ και $(1, 1)$.

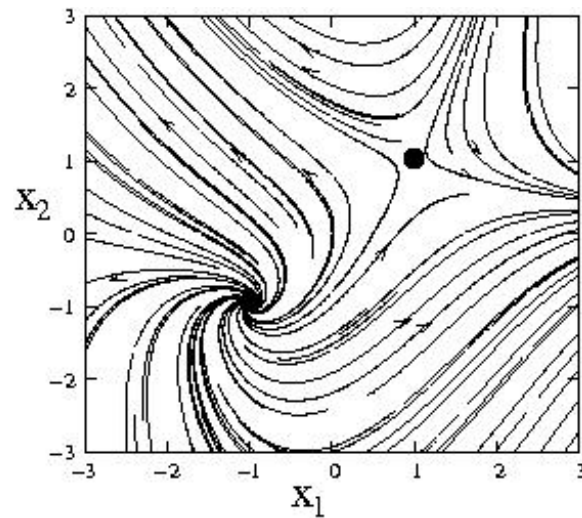
Ο γραμμικοποιημένος πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} df_1/dx_1 & df_1/dx_2 \\ df_2/dx_1 & df_2/dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}.$$

Για το σημείο $(-1, -1)$ ορίζω $\xi_1 = x_1 + 1$, $\xi_2 = x_2 + 1$ και έχουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, άρα το σημείο είναι ένα ασταθές σπειροειδές σημείο. Η φορά περιστροφής της σπείρας μπορεί να βρεθεί ως εξής. Στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα φάσης για το μη γραμμικό πρόβλημα του παραπάνω παραδείγματος. Έχουμε ένα ασταθές σπειροειδές σημείο και ένα σαγματικό σημείο (σημειώνονται μαύρους κύκλους στο σχήμα). Έχει σημειωθεί με βέλη η φορά ορισμένων καμπυλών.

θεωρούμε, π.χ., $x_2 = 0, x_1 > 0$ (δηλ., είμαστε στον θετικό άξονα x_1) και βρίσκουμε $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 > 0$, άρα η κίνηση επάνω στην σπείρα είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογίου.

Για το σημείο $(1, 1)$ ορίζουμε $\xi_1 = x_1 - 1, \xi_2 = x_2 - 1$ και έχουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, άρα το σημείο είναι ένα σαγματικό σημείο. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(1, 1 \mp \sqrt{2})$ και ορίζουν αντίστοιχα τον ασταθή και ευσταθή υπόχωρο.

Βιβλιογραφία: [8, 7, 9]

Βιβλιογραφία

- [1] N. D. Fowkes and J. J. Mahoney, "*An introduction to mathematical modeling*" (John Wiley, 1994).
- [2] J.D. Logan, "*Έφαρμοσμένα Μαθηματικά*" (ΠΕΚ, 1997).
- [3] J.D. Logan, "*Applied Mathematics*" (John Wiley, 1987).
- [4] G.R. Fowles, "*Analytical mechanics*" (CBS College Publishing, 1986).
- [5] H. Goldstein, "*Classical Mechanics*" (Addison Wesley, 1980).
- [6] Ι. Δ. Χατζηδημητρίου, "*Θεωρητική μηχανική*", 3η έκδοση (Γιαχούδη-Γιαννούλη, Θεσσαλονίκη, 2000).
- [7] Lawrence Perko, "*Differential Equations and Dynamical Systems*", Third edition (Springer, New York, 2001).
- [8] D.W. Jordan and P. Smith, "*Nonlinear ordinary differential equations*" (Oxford University Press, 1987).
- [9] Τάσος Μούντης, "*Μη γραμμικές συνήθειες διαφορικές εξισώσεις*" (Εκδοσεις Πνευματικού, 1997).
- [10] J.D. Murray, "*Mathematical Biology*", Vol I (Springer, Berlin Heidelberg, 2002).
- [11] A. Hastings, "*Populations Biology*" (Springer, New York, 1997).
- [12] D. Griffiths, "*Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική*" (ΠΕΚ, 1996).