

Μαθηματική Μοντελοποίηση Ι (χειμερινό εξάμηνο 2010/2011)

3. Φυλλάδιο ασκήσεων ΙΙΙ

3.1. **Άσκηση.** Θεωρούμε ένα μοντέλο τύπου Volta-Volterra στο οποίο εισάγουμε την λογιστική ανάπτυξη, οπότε μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right).\end{aligned}$$

Ορίστε κανονικές μεταβλητές για τους πληθυσμούς N_1, N_2 και για τον χρόνο t και γράψτε την εξίσωση στις νέες μεταβλητές.

3.2. **Άσκηση.** Θεωρήστε το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \quad \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2.$$

Κληρώστε 4 αριθμούς από το -10 έως το 10 και θεωρήστε ότι οι αριθμοί που κληρώθηκαν δίνουν τις τιμές των a, b, c, d . Βρείτε το είδος και την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για το γραμμικό σύστημα που κληρώσατε. Σχεδιάστε με όσο καλύτερη ακρίβεια μπορείτε το διάγραμμα φάσεων.

3.3. **Άσκηση.** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων για τον αναρμονικό ταλαντωτή

$$\ddot{x} = -x + \epsilon x^3, \quad \epsilon > 0.$$

Μπορείτε είτε να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή είτε να σχεδιάσετε το διάγραμμα με βάση την μελέτη των σημείων ισορροπίας. (Χρησιμοποιήστε ένα συγκεκριμένο ϵ της επιλογής σας, π.χ., $\epsilon = 0.01$.)

3.4. **Άσκηση.** Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς x_1, x_2 δύο ειδών τα οποία ανταγωνίζονται για το ίδιο είδος τροφής:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - ax_2) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_2(1 - x_2 - bx_1)\end{aligned}$$

όπου για τις σταθερές ισχύει $a, b, \rho > 0$.

(α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (μελετήστε όλες τις δυνατές τιμές των παραμέτρων, αλλά υποθέστε $a \neq 1, b \neq 1$).

(β) Βρείτε το είδος και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας.