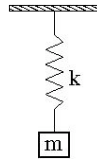


Μαθηματική Μοντελοποίηση I (χειμερινό εξάμηνο 2010/2011)

1. Φυλλάδιο ασκήσεων I

1.1. **Άσκηση.** Έστω ότι ένα σωματίο μάζας m εξαρτάται από ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους ℓ και είναι ελεύθερο να κινείται κατακόρυφα. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η δύναμη του ελατηρίου συν την βαρυτική δύναμη.



- (α) Γράψτε την δύναμη που ασκείται στο σώμα.
- (β) Ποιά είναι η δυναμική ενέργεια που δίνει αυτή την δύναμη;
- (γ) Βρείτε την εξίσωση κίνησης και δώστε τη λύση της.

1.2. **Άσκηση.** Σώμα μάζας m κινείται στον άξονα x σε δυναμική ενέργεια

$$V(x) = -Kx e^{-\alpha x},$$

όπου K, α είναι θετικές σταθερές. Βρείτε την θέση ισορροπίας της μάζας. Επίσης, κάνετε την αρμονική προσέγγιση για κινήσεις κοντά στην θέση ισορροπίας και βρείτε την περίοδο αρμονικών ταλάντωσης γύρω από αυτήν.

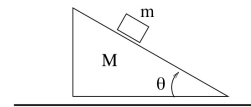
1.3. **Άσκηση.** Θεωρήστε το δυναμικό Lennard-Jones που περιγράφει χημικούς δεσμούς:

$$V(r) = D \left(\frac{R}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R}{r} \right)^6,$$

όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων και D, R είναι σταθερές. Αν η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{r} = -dV/dr$ (δηλαδή μάζα $m = 1$) τότε (α) βρείτε την περίοδο της κίνησης για μικρές αποκλίσεις από την θέση ισορροπίας (κάνετε την αρμονική προσέγγιση), (β) βρείτε την περίοδο της κίνησης σαν συνάρτηση της ενέργειας του συστήματος (χρησιμοποιήστε υπολογιστή).

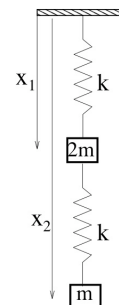
1.4. **Άσκηση.** Σωματίο μάζας m είναι ελεύθερο να ολισθαίνει επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο (βλ. σχήμα). Το κεκλιμένο επίπεδο έχει μάζα M και είναι ελεύθερο να ολισθαίνει επάνω σε επίπεδη οριζόντια βάση.

(α) Γράψτε κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες για το σύστημα, (β) γράψτε την Λαγκρανζιανή του συστήματος, (γ) γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης.



1.5. **Άσκηση.** Σώμα μάζας $2m$ κρέμεται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k και μήκους ισορροπίας ℓ . Από αυτήν τη μάζα κρέμεται δεύτερο ελατήριο της ίδιας σταθεράς (και ίδιου μήκους ισορροπίας) από το οποίο εξαρτάται μια δεύτερη μάζα m . Θεωρήστε μόνο κατακόρυφη κίνηση των μαζών.

(α) Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.
(β) Η επάνω μάζα $2m$ μετακινείται προς τα κάτω κατά απόσταση d από την θέση ισορροπίας της, ενώ η δεύτερη μάζα παραμένει στην αρχική θέση ισορροπίας της. Ακολουθώντας το σύστημα αφήνεται να ταλαντωθεί. Βρείτε την κίνηση των δύο μαζών, δηλ. την θέση τους σαν συνάρτηση του χρόνου.



1.6. **Άσκηση.** Έστω σώμα μάζας m το οποίο κινείται σε κύκλο ακτίνας a .

(α) Θεωρήστε ότι στο σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις και (i) γράψτε την Λαγκρανζιανή, (ii) γράψτε την εξίσωση κίνησης και (iii) βρείτε μία διατηρήσιμη ποσότητα της κίνησης.

(β) Θεωρήστε τώρα ότι το ίδιο σώμα δέχεται δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητάς του $\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v}$. Γράψτε την εξίσωση κίνησής του.