Μαθηματική Μοντελοποίηση Ι [ΤΕΜ281]
Εξετάσεις, 1 Σεπτεμβρίου 2011 [διάρκεια: 2 ώρες]

Θέμα 1. (40 = 20+10+10 μονάδες) Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς x, y, z των υγειών, αρρώστων και άνοσων ατόμων αντίστοιχα, κατά τη διάρκεια μιας επιδημίας:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -xy + \mu \\ \dot{y} &= xy - y \\ \dot{z} &= y - \mu \end{aligned}$$

όπου μ είναι θετική σταθερά. Μπορούμε να δείξουμε ότι ο συνολικός πληθυσμός $x + y + z$ παραμένει σταθερός (δεδομένο).
(α) Βρείτε το σημείο ισορροπίας του συστήματος. Βρείτε το είδος και την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. Εξετάστε όλες τις δυνατές τιμές $\mu > 0$. (Περιοριστείτε στο επίπεδο (x, y).)
(β) Σχεδιάστε (με σύντομη εξήγηση) στο διάγραμμα φάσης τις φασικές καμπύλες γύρω από το σημείο ισορροπίας γιά $\mu = 6$. (Περιοριστείτε στο επίπεδο (x, y).)
(γ) (i) Ποιός όρος των εξισώσεων μοντελοποιεί μεταβολή του πληθυσμού των υγειών λόγω συναντήσεών τους με αρρώστους;
(ii) Ποιός όρος των εξισώσεων μοντελοποιεί την ανάρρωση των αρρώστων;

(α) Στο σημείο ισορροπίας μηδενίζονται οι χρονικές παράγωγοι:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \Rightarrow xy = \mu \\ \dot{y} &= 0 \Rightarrow y(x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Γιά $y = 0$ ικανοποιείται η 2η εξίσωση αλλά όχι η πρώτη (αφού $\mu > 0$). Γιά $x = 1$ ικανοποιείται η 2η εξίσωση και η 1η δίνει $y = \mu$. Ώστε βρίσκουμε το μοναδικό σημείο

$$(x^*, y^*) = (1, \mu).$$

Γιά να μελετήσουμε την ευστάθεια γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας. Θέτουμε $f_1(x, y) := -xy + \mu,\ f_2(x, y) := xy - y$. Ο πίνακας των γραμμικοποιημένων εξισώσεων είναι

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} -y & -x \\ y & x - 1 \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} -\mu & -1 \\ \mu & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας έχει ιδιοτιμές λ όπου

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -1 \\ \mu & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\mu + \lambda) + \mu = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \mu\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2}$$

Παρατηρούμε ότι $\mu > 4 \Rightarrow \mu^2 - 4\mu > 0$ και $0 < \mu < 4 \Rightarrow \mu^2 - 4\mu < 0$. Άρα

- Αν $0 < \mu < 4 \Rightarrow \mu^2 - 4\mu < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2}$ μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος, άρα έχουμε ευσταθή σπείρα.
- Αν $\mu > 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} < 0$ (πραγματικές), διότι $\mu^2 - 4\mu < \mu$, άρα έχουμε ευσταθή κόμβο.
- Αν $\mu = 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\mu/2 = -2 < 0$, άρα έχουμε ευσταθή κόμβο.

(γ) (i) Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της 1ης εξίσωσης. (ii) Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος της 2ης εξίσωσης.

Επίσης, (iii) γεννήσεις δίνει ο 2ος όρος στο δεξιό μέλος της 1ης εξ. (iv) ανάρρωση ασθενών δίνει ο 2ος όρος στο δεξιό μέλος της 2ης εξ. και ο 1ος όρος στο δεξιό μέλος της 3ης εξ.

Θέμα 2. (35 = 10+10+15 μονάδες) Έστω σώμα μάζας m το οποίο εξαρτάται από ράβδο μήκους ℓ η οποία μπορεί να κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο (απλό εκκρεμές).
(α) Βρείτε και γράψτε την Λαγκρανζιανή.
(β) Βρείτε και γράψτε την εξίσωση κίνησης.
(γ) Θεωρήστε τώρα ότι το σώμα δέχεται δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητάς του $\boldsymbol{f} = -\lambda\,\boldsymbol{v}$. Γράψτε την εξίσωση κίνησής του.
[Υπενθυμίζεται ότι η γενικευμένη δύναμη Q που αντιστοιχεί σε μία γενικευμένη συντεταγμένη q είναι $Q = \boldsymbol{f}\cdot(\partial\boldsymbol{r}/\partial q)$.]

(α) Ας περιγράψουμε την θέση του σώματος με μία γωνία θ (γενικευμένη συντεταγμένη) η οποία καθορίζει πλήρως την θέση του επάνω στον κύκλο. Η απόσταση που διανύει από την θέση ισορροπίας (κατακόρυφο) είνα ι $s = \ell\theta$. Η ταχύτητα είναι $\dot{s} = \ell\dot{\theta}$ και σε διανυσματική μορφή:

$$\boldsymbol{v} = \ell\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta.$$

Η κατακόρυφη απόσταση (προσημασμένη) από το σημείο εξάρτησης είναι $h = -\ell\cos\theta$. Άρα η κινητική και η δυναμική ενέργεια είναι

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\,\dot{\theta}^2, \qquad V = mgh = -mg\ell\,\cos\theta,$$

οπότε η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\,\dot{\theta}^2 + mg\ell\,\cos\theta.$$

(β) Υπολογίζουμε

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}, \qquad \frac{dL}{d\theta} = -mg\ell\,\sin\theta.$$

Η εξίσωση Lagrange γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \frac{dL}{d\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) = -mg\ell\,\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\sin\theta = 0.\Box$$

(γ) Ταχύτητα $\boldsymbol{v} = \ell\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, δύναμη $\boldsymbol{f} = -\lambda\ell\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$.
Επίσης, $\boldsymbol{r} = \ell\,\hat{\boldsymbol{e}}_r = \ell(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{i}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{j}})$, άρα $\partial\boldsymbol{r}/\partial\theta = \ell\,(-\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{i}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{j}}) = \ell\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$.
Η γενικευμένη δύναμη είναι

$$Q_\theta = (-\lambda\ell\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta)\cdot(\ell\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta) = -\lambda\ell^2\dot{\theta}.$$

Έχουμε τώρα την εξίσωση κίνησης

$$\frac{d}{dt}(m\ell^2\,\dot{\theta}) = -mg\ell\,\sin\theta - \lambda\ell^2\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\sin\theta + \frac{\lambda}{m}\,\dot{\theta} = 0.$$

Θέμα 3. (15 μονάδες) Έστω N ο πληθυσμός ενός είδους, ο οποίος υποθέτουμε ότι ακολουθεί τη λογιστική ανάπτυξη:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

όπου r, K θετικές σταθερές. Ορίστε κανονικές (αδιάστατες) μεταβλητές και γράψτε την εξίσωση σε κανονική μορφή (όπου δεν περιέχονται οι r, K).

Αφού ο πληθυσμός ισορροπίας (γιά $t \to \infty$) είναι $N = K$ η εξίσωση απλοποιείται αν ορίσουμε τη νέα μεταβλητή

$$n \equiv \frac{N}{K}$$

ώστε

$$\frac{dn}{dt} = r\, n\, (1-n)\,.$$

Βλέπουμε επίσης ότι αν ορίσουμε ως νέα χρονική μεταβλητή την

$$\tau = rt$$

παίρνουμε την κανονική μορφή

$$\frac{dn}{d\tau} = n\, (1-n)\,.$$

Θέμα 4. (15 μονάδες) Έστω δύο δίνες με ίσα φορτία $Q > 0$ των οποίων οι θέσεις παριστάνονται με (x_1, y_1), (x_2, y_2). Θεωρείται γνωστό ότι οι εξισώσεις κίνησης γιά την πρώτη δίνη είναι

$$\dot{y}_1 = Q\, \frac{x_2 - x_1}{\ell^2}$$
$$\dot{x}_1 = Q\, \frac{y_1 - y_2}{\ell^2}$$

όπου ℓ είναι η απόσταση μεταξύ τους. Επίσης θεωρούνται γνωστοί οι νόμοι διατήρησης $\ell = \ell_0,\ x_1 + x_2 = I_x,\ y_1 + y_2 = I_y$, όπου ℓ_0 θετική σταθερά, ενώ οι σταθερές I_x, I_y μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα.
Γράψτε και λύστε εξισώσεις γιά τις x_1, y_1 και περιγράψτε με λεπτομέρεια τι κίνηση κάνει η δίνη με θέση (x_1, y_1).

Επιλέγουμε τις τιμές γιά τις σταθερές $I_x = 0, I_y = 0$, άρα έχουμε

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 \qquad y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -y_1.$$

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις οι οποίες γίνονται

$$\dot{y}_1 = Q\, \frac{x_2 - x_1}{\ell^2} \Rightarrow \dot{y}_1 = -\frac{2Q}{\ell_0^2}\, x_1$$
$$\dot{x}_1 = Q\, \frac{y_1 - y_2}{\ell^2} \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{2Q}{\ell_0^2}\, y_1.$$

Παίρνοντας την χρονική παράγωγο της πρώτης και χρησιμοποιώντας την δεύτερη βρίσκουμε

$$\ddot{y}_1 = -\frac{2Q}{\ell_0^2} \dot{x}_1 \Rightarrow \ddot{y}_1 + \frac{4Q^2}{\ell_0^4} y_1 = 0.$$

Μία ανάλογη εξίσωση μπορούμε να εξάγουμε και γιά την x_1. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν περιοδική κίνηση με συχνότητα

$$\omega = \frac{2Q}{\ell_0^2}.$$

Άρα τα φορτία κινούνται σε κυκλική τροχιά με συχνότητα ανάλογη του Q και αντιστόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους αποστάσεως.
