Μαθηματική Μοντελοποίηση Ι [ΤΕΜ281]
Εξετάσεις, 18 Ιανουαρίου 2010

Θέμα 1. (35 = 10+5+10+10 μονάδες) Θεωρούμε δίνη με συντεταγμένες θέσης (x, y), γιά την οποία δίνεται η Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\,(x\dot{y} - y\dot{x}) - V(x),$$

όπου $V(x)$ παριστάνει ένα δυναμικό που επιδρά στη δίνη.
(α) Βρείτε και γράψτε τις εξισώσεις κίνησης.
(β) Βρείτε την ενέργεια (η οποία είναι διατηρήσιμη ποσότητα).
(γ) Βρείτε άλλη μία διατηρήσιμη ποσότητα (δώστε απόδειξη).
(δ) Έστω ότι την στιγμή $t = 0$ η θέση της δίνης είναι $(x, y) = (0, 0)$ και η ταχύτητά της $(\dot{x}, \dot{y}) = (1, 1)$. Εάν σε άλλη στιγμή t παρατηρήσουμε θέση $(x, y) = (0, 1)$ βρείτε τότε την ταχύτητα $(\dot{x}, \dot{y})$.

(α) Κανονικές ορμές

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \frac{1}{2}\,y, \qquad p_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + \frac{1}{2}\,x,$$

Εξ. Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow \ddot{x} - \frac{1}{2}\,\dot{y} = \frac{1}{2}\,\dot{y} - \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \ddot{x} - \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \ddot{y} + \dot{x} = 0
\end{aligned}$$

(β) Ενέργεια:

$$\begin{aligned}
E &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \\
&= \dot{x}\left(\dot{x} - \frac{1}{2}\,y\right) + \dot{y}\left(\dot{y} + \frac{1}{2}\,x\right) - \frac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\,(x\dot{y} - y\dot{x}) + V(x) \Rightarrow \\
E &= \frac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x).
\end{aligned}$$

(γ) Από 2η εξ. Lagrange:

$$\ddot{y} + \dot{x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\,(\dot{y} + x) = 0 \Rightarrow I_x \equiv \dot{y} + x = \text{σταθ.}$$

(δ)

$$I_x(t) = I_x(t = 0) \Rightarrow \dot{y} + x = 1 \Rightarrow \dot{y} = 1.$$

$$E(t) = E(t = 0) \Rightarrow \frac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x) = 1 + V(0) \Rightarrow \frac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + 1) + V(0) = 1 + V(0) \Rightarrow \dot{x}^2 = 1.$$

Θέμα 2. (30 μονάδες = 5+10+15) Έστω ότι σε ένα πανεπιστήμιο δραστηριοποιείται η φοιτητική παράταξη Α. Ένα ποσοστό (έστω r) των οπαδών της δραστηριοποιείται έντονα και πείθουν ο καθένας ένα νέο φοιτητή κάθε χρόνο να ενταχθεί στην παράταξη. Επίσης λαμβάνουμε υπόψιν ότι ένα ποσοστό (έστω s) των οπαδών αποφοιτά κάθε χρόνο.
(α) Γράψτε ένα μοντέλο γιά τον αριθμό των οπαδών της παράταξης σαν συνάρτηση του χρόνου.

Ακολούθως, θεωρούμε ότι από τον συνολικό αριθμό των φοιτητών του πανεπιστημίου Φ μόνο ένα ποσοστό (έστω p) είναι δυνατόν να πεισθεί από την παράταξη Α ενώ οι υπόλοιποι είναι εξαιρετικά δύσκολο να γίνουν οπαδοί της (γιά ιδεολογικούς και άλλους λόγους).
(β) Γράψτε ένα νέο μοντέλο γιά τον αριθμό των οπαδών της παράταξης εισάγοντας τη λογιστική ανάπτυξη (logistic growth) ώστε να λάβετε υπόψιν την παραπάνω παρατήρηση (θεωρήστε $r > s$).
(γ) Ορίστε αδιάστατες (κανονικές) μεταβλητές και γράψτε την κανονική μορφή της εξίσωσης (του (β)) στις νέες μεταβλητές.

(α) Έστω N ο αριθμός των φοιτητών της παράταξης Α. Έχουμε

$$\frac{dN}{dt} = (r - s)N.$$

(β) Θέτουμε $\alpha := r - s$ και έχουμε $r > s \Rightarrow \alpha > 0$. Σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο (α) θα έδινε $N(t) \to \infty$ γιά $t \to \infty$. Αν εισάγουμε την λογιστική ανάπτυξη έχουμε το μοντέλο

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

όπου $K := p\Phi$. Βλέπουμε ότι $N(t) \to K$ γιά $t \to \infty$.
(γ) Ορίζουμε κανονικές μεταβλητές

$$n := \frac{N}{K}, \qquad \tau := \alpha t$$

αντικαθιστούμε στην εξίσωση του (β) και έχουμε

$$\frac{dn}{d\tau} = n(1 - n)$$

την κανονική μορφή της εξίσωσης.

Θέμα 3. (35 μονάδες = 10+15+10) Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς x των υγειών και y των αρρώστων ατόμων αντίστοιχα, κατά την διάρκεια μιας επιδημίας:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \kappa - \mu\, x - \gamma\, xy \\ \dot{y} &= \gamma\, xy - \nu\, y\end{aligned}$$

όπου κ, γ, μ, ν είναι θετικές σταθερές.
(α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος γιά κάθε τιμή των σταθερών.
(β) Θεωρήστε τις τιμές $\kappa = 40$, $\gamma = 2$, $\mu = 4$, $\nu = 10$ και βρείτε το είδος και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας.
(γ) Ας υποθέσουμε ότι ανακαλύπτεται ένα φάρμακο το οποίο μειώνει τη θνησιμότητα των ασθενών στο μισό (σε σχέση με το (β)). Πού θα βρίσκονται τα νέα σημεία ισορροπίας του συστήματος;

(α) Αυτό είναι μία παραλλαγή του SI μοντέλου, όπου $S := x,\ I := y$.
Γιά να βρούμε τα σημεία ισοροπίας θέτουμε

$$\begin{aligned}\kappa - \mu\, x - \gamma\, xy &= 0 \\ \gamma\, xy - \nu\, y &= 0.\end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται

$$(\gamma\, x - \nu)\, y = 0 \Rightarrow y = 0, \quad y = \nu\gamma.$$

Άν υποθέσουμε $y = 0$ τότε η πρώτη εξίσωση δίνει $x = \kappa/\mu$, άρα έχουμε το σημείο ισορροπίας

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\kappa}{\mu},\ 0\right).$$

Άν υποθέσουμε $x = \nu/\gamma$ τότε η πρώτη εξίσωση δίνει $\kappa - \mu\nu/\gamma - \nu y = 0 \Rightarrow y = \kappa/\nu - \mu/\gamma$, άρα έχουμε το σημείο ισορροπίας

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\nu}{\gamma},\ \frac{\gamma\kappa - \mu\nu}{\gamma\nu}\right).$$

Το δεύτερο σημείο ισορροπίας υπάρχει μόνο όταν $\gamma\kappa - \mu\nu > 0$.
(β) Ας θεωρήσουμε τώρα τις τιμές $\kappa = 40$, $\gamma = 2$, $\mu = 4$, $\nu = 10$. Έχουμε $\gamma\kappa - \mu\nu = 40$, άρα έχουμε δύο σημεία ισορροπίας. Αυτά είναι

$$(x^*, y^*) = (10, 0) \qquad (x^*, y^*) = (5, 2).$$

Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*,y^*)} = \begin{bmatrix} -\mu - \gamma y & -\gamma x \\ \gamma y & \gamma x - \nu \end{bmatrix}_{(x^*,y^*)} = \begin{bmatrix} -4 - 2y & -2x \\ 2y & 2x - 10 \end{bmatrix}_{(x^*,y^*)}$$

Γιά το πρώτο σημείο ισορροπίας έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} -\mu & -\gamma\kappa/\mu \\ 0 & (\gamma\kappa - \mu\nu)/\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda_1 = -\mu = -4$ και $\lambda_2 = (\gamma\kappa - \mu\nu)/\mu = 10$. Άρα το σημείο ισορροπίας είναι σαγματικό και ασταθές.

Γιά το δεύτερο σημείο ισορροπίας έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} -\gamma\kappa/\nu & -\nu \\ (\gamma\kappa - \mu\nu)/\nu & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -10 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές με τον γνωστό τρόπο

$$\begin{vmatrix} -\gamma\kappa/\nu - \lambda & -\nu \\ (\gamma\kappa - \mu\nu)/\nu & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + \frac{\gamma\kappa}{\nu}\lambda + \gamma\kappa - \mu\nu = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\gamma\kappa}{\nu} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma\kappa}{\nu}\right)^2 - 4\,(\gamma\kappa - \mu\nu)}\right] \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -4 \pm 6i.$$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθής σπείρα.

Ξέρουμε ότι γιά (x^*, y^*) (όπου υποθέτουμε το σπειροειδές σημείο ισορροπίας) έχουμε $\dot{x} = 0$. Αν πάρουμε λοιπόν σημείο σε θέση (x^*, y) όπου $y > y^*$ θα έχουμε $\dot{x} = \kappa - \mu\, x^* - \gamma\, x^* y < \kappa - \mu\, x^* - \gamma\, x^* y^* = 0$.
Αυτή η συνθήκη είναι συμβατή με ένα *αριστερόστροφο ευσταθές σπειροειδές σημείο.*

(γ) Ο μόνος όρος που δίνει μείωση των αρρώστων και άρα μπορεί να περιγράφει θανάτους είναι ο $-\nu y$. Παίρνουμε λοιπόν $\kappa = 40$, $\gamma = 2$, $\mu = 4$, $\nu = 5$. Ώστε τα σημεία ισορροπίας είναι

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\kappa}{\mu},\ 0\right) = (10, 0)$$

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\nu}{\gamma},\ \frac{\gamma\kappa - \mu\nu}{\gamma\nu}\right) = \left(\frac{5}{2}, 6\right).$$