

1. ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στις ακόλουθες σελίδες δίνονται σύντομες σημειώσεις για το μάθημα "Μαθηματική Μοντελοποίηση Ι" του τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Οι σημειώσεις είναι ιδιαίτερα σύντομες για θέματα τα οποία καλύπτονται επαρκώς από την υπάρχουσα βιβλιογραφία στα ελληνικά και κάπως πιο εκταταμένες για θέματα τα οποία δεν καλύπτονται επαρκώς στην βιβλιογραφία. Σημειώνουμε επίσης ότι η ύλη του μαθήματος καθορίζεται από τις παραδώσεις στην αίθουσα διδασκαλίας κατά την διάρκεια του εξαμήνου και δεν συμπίπτει απολύτως με το περιεχόμενο των σημειώσεων.

Εκτός αρκετών παραδειγμάτων δίνονται και πολλές ασκήσεις (οι περισσότερες άλυτες) ο βαθμός δυσκολίας των οποίων είναι από εύκολες έως ιδιαίτερα περίπλοκες. Αυτές, ανάλογα με τον βαθμό δυσκολίας τους, μπορούν να χρησιμεύσουν για εξάσκηση, ως μικρές εργασίες για κάποιους φοιτητές, είτε ως αφορμή για συζήτηση διαφόρων θεμάτων. Δεν αναμένεται η λύση όλων των ασκήσεων οι οποίες περιέχονται στις σημειώσεις, από τους φοιτητές οι οποίοι θα παρακολουθήσουν το μάθημα.

1.1. Περιεχόμενα μαθήματος.

1. Βασικές έννοιες θεωρητικής μηχανικής
 - Νόμοι του Νεύτωνα
 - Μηχανική συστήματος σωματίων
 - Μοντελοποίηση μηχανικών συστημάτων
2. Εξισώσεις Lagrange
 - Θεωρία μεταβολών
 - Συστήματα σε δυναμικό: αρμονικός ταλαντωτής, εκκρεμές
 - Νόμοι διατήρησης
3. Κίνηση φορτίου σε μαγνητικό πεδίο
 - Ένα φορτίο σε μαγνητικό πεδίο
 - Ζεύγος φορτίων σε μαγνητικό πεδίο
 - Μοντέλα για δίνες σε ρευστά και για μαγνητικές δίνες
4. Στερεά υλικά
 - Μοντέλα για κρυστάλλους
 - Αλυσίδες μαζών συζευγμένες με ελατήρια
5. Δυναμικά συστήματα
 - Γραμμικά συστήματα εξισώσεων
 - Μη γραμμικά συστήματα εξισώσεων
 - Μελέτη ευστάθειας
 - Πληθυσμιακά μοντέλα από την Βιολογία

2. ΣΗΜΕΙΑΚΑ ΣΩΜΑΤΙΑ

2.1. **Διανύσματα.** Στην μηχανική υποθέτουμε πολλές φορές ότι τα σωματάρια δεν έχουν μέγεθος και παριστάνουμε την θέση τους με ένα σημείο. Η θέση λοιπόν ενός σημειακού σωματίου δίνεται από ένα διάνυσμα \mathbf{r} το οποίο παριστάνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}},$$

όπου $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και x, y, z είναι οι συντεταγμένες του σωματίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Παράδειγμα. Έστω θέση σωματίου επάνω στον οριζόντιο άξονα

$$(2.1) \quad \mathbf{r} = at\hat{\mathbf{i}},$$

όπου a είναι μία σταθερά. Αν υποθεθεί ότι η μεταβλητή t παριστάνει τον χρόνο, τότε η παραπάνω εξίσωση δίνει την θέση σημειακού σωματίου το οποίο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. \square

Ταχύτητα λέγεται η χρονική παράγωγος της θέσης, δηλαδή το διάνυσμα

$$\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Στην περίπτωση του παραπάνω σωματίου έχουμε $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \Rightarrow \mathbf{v} = a\hat{\mathbf{i}}$, το οποίο είναι ένα σταθερό διάνυσμα.

Παράδειγμα. Έστω το διάνυσμα θέσης σωματίου

$$(2.2) \quad \mathbf{r} = at\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}gt^2\hat{\mathbf{j}},$$

ώστε η ταχύτητά του είναι

$$\mathbf{v} = a\hat{\mathbf{i}} - gt\hat{\mathbf{j}}. \square$$

Παράδειγμα. (κυκλική κίνηση) Έστω το διάνυσμα θέσης σωματίου σε κυκλική κίνηση (όπως στο σχήμα)

$$(2.3) \quad \mathbf{r} = a\sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + a\cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}.$$

Πραγματικά το σωματάριο αυτό βρίσκεται πάντα επάνω σε κύκλο ακτίνας $|\mathbf{r}| = \sqrt{a^2\sin^2(\omega t) + a^2\cos^2(\omega t)} = a$. Η ταχύτητά του είναι

$$\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega a\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} - \omega a\sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}.$$

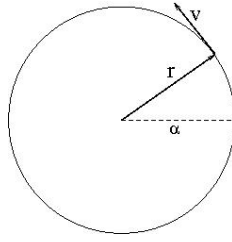
Παρατηρούμε ότι $|\mathbf{v}| = \omega a$ είναι σταθερό διάνυσμα. Επίσης $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$, δηλαδή το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης. \square

Παράδειγμα. (κυκλοειδής κίνηση) Έστω το διάνυσμα θέσης σωματίου

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_1 = a\omega t\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{r}_2 = a\sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + a\cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}.$$



ΣΧΗΜΑ 1. Σωματίο σε κυκλική κίνηση.

Η ταχύτητά του είναι

$$\mathbf{v} = \frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt} = \omega\alpha[1 + \cos(\omega t)]\hat{\mathbf{i}} - \omega\alpha \sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}. \square$$

2.2. Πολικές συντεταγμένες. Είναι πολύ συχνά ευκολότερο να περιγράψουμε την θέση ή την κίνηση ενός σωματίου σε πολικές συντεταγμένες (παρά στις συνήθεις καρτεσιανές). Θεωρούμε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta$. Η θέση σωματίου δίνεται από το διάνυσμα

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r.$$

Τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις δύο διευθύνσεις είναι

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}.$$

Η ταχύτητα του σωματίου είναι

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{e}}_r + r \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt},$$

όπου έχουμε

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Θέτουμε $d\theta/dt := \dot{\theta}$ και $dr/dt := \dot{r}$ και γράφουμε τελικά

$$(2.4) \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Παράδειγμα. Αν γράψουμε $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r = r(\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}})$, παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα (2.3), οι πολικές συντεταγμένες είναι $r = \alpha$, $\theta = \omega t$. Ωστε $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$ και άρα έχουμε ταχύτητα

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = \alpha\omega \hat{\mathbf{e}}_\theta. \square$$

3. ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

1ος νόμος του Νεύτωνα. Σώμα στο οποίο δεν επιδρούν δυνάμεις κινείται σε ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα. \square

Παρατήρηση. Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε ένα σώμα το οποίο βρίσκεται σε ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Είναι προφανές ότι ένας περιστρεφόμενος παρατηρητής δεν

θα βλέπει το ίδιο σώμα να βρίσκεται σε ευθύγραμμη κίνηση. Άρα με τον 1ο νόμο του Νεύτωνα εισάγεται η έννοια ενός *αδρανειακού συστήματος αναφοράς* ως προς το οποίο γίνονται οι παρατηρήσεις.

Προχωρούμε τώρα να μελετήσουμε αλληλεπίδραση δύο σωμάτων. Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν το πείραμα δείχνει ότι έχουμε μεταβολή των ταχυτήτων τους σε αντίθετες κατευθύνσεις:

$$\frac{dv_1}{dt} = -c \frac{dv_2}{dt},$$

όπου c είναι μία σταθερά. Γράφουμε αυτή την σχέση ως

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -m_2 \frac{dv_2}{dt} \Rightarrow \frac{d(m_1 v_1)}{dt} = -\frac{d(m_2 v_2)}{dt}.$$

Οι m_1, m_2 είναι σταθερές, λέγονται μάζες των σωμάτων και δεν εξαρτώνται από το ζευγάρι των σωμάτων που μελετάμε.

Η παραπάνω σχέση δίνει αφορμή να ορίσουμε την *γραμμική ορμή*

$$(3.1) \quad \mathbf{p} := m\mathbf{v}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι μεταβολή της ορμής ενός σώματος προκαλείται από την επίδραση άλλου σώματος. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ότι το κάθε σώμα ασκεί στο άλλο μία *δύναμη*.

2ος νόμος του Νεύτωνα. Λέμε ότι σε σώμα του οποίου αλλάζει η κινητική κατάσταση (δηλαδή, του οποίου αλλάζει η ορμή) ασκείται δύναμη η οποία είναι ίση με

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \square$$

3ος νόμος του Νεύτωνα. Οι δυνάμεις μεταξύ δύο σωμάτων είναι ίσες και αντίθετες:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

και τις ονομάζουμε *δράση* και *αντίδραση*. \square

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι μεταβολές της ορμής για ένα ζευγάρι σωμάτων είναι αντίθετες, ώστε γράφουμε

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const.}$$

Η σχέση αυτή είναι βέβαια η ίδια με εκείνη που γράψαμε πριν τον 2ο νόμο.

Εδώ έχουμε ουσιαστικά εισάγει μία ακόμα βασική έννοια, εκείνη της *επιτάχυνσης*

$$(3.2) \quad \mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Η δύναμη είναι ανάλογη της επιτάχυνσης με βάση τον 2ο νόμο:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Στα παραδείγματα που δώσαμε παραπάνω έχουμε, για το παράδειγμα (2.1),

$$\mathbf{r} = at\hat{\mathbf{i}} \Rightarrow \mathbf{v} = a\hat{\mathbf{i}} \Rightarrow \mathbf{a} = 0.$$

Αυτό το αποτέλεσμα περιγράφει τον 1ο νόμο του Νεύτωνα. Για το παράδειγμα (2.2)

$$\mathbf{r} = at\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}gt^2\hat{\mathbf{j}} \Rightarrow \mathbf{v} = a\hat{\mathbf{i}} - gt\hat{\mathbf{j}} \Rightarrow \mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}}.$$

Για το παράδειγμα (2.3)

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \alpha [\sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}] \\ \Rightarrow \mathbf{v} &= \omega\alpha [\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} - \sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}] \\ \Rightarrow \mathbf{a} &= -\omega^2\alpha [\sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}] = -\omega^2\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Άσκηση. Γράψτε τη γενική μορφή του διανύσματος της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες.

Λύση:

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

4. ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Θεωρούμε σωματίο το οποίο διανύει μία απόσταση από την θέση \mathbf{r}_0 στην θέση \mathbf{r} . Ολοκληρώνουμε την εξίσωση του Νεύτωνα ως εξής

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r}.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα γράφεται ως (αφού $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^t m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2.\end{aligned}$$

Στις παραπάνω σχέσεις θεωρήσαμε ότι το σωματίο είναι στην θέση \mathbf{r} την χρονική στιγμή t και έχει ταχύτητα \mathbf{v} και ότι είναι στην θέση \mathbf{r}_0 την χρονική στιγμή t_0 και έχει ταχύτητα \mathbf{v}_0 .

Έχουμε το αποτέλεσμα

$$(4.1) \quad \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = T - T_0, \quad T := \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2,$$

όπου T λέγεται κινητική ενέργεια του σωματίου.

Θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου υπάρχει πραγματική συνάρτηση $V(\mathbf{r})$ τέτοια ώστε η δύναμη μπορεί να γραφεί ως

$$(4.2) \quad \mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}).$$

Τότε

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r}).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r}) = T - T_0 \Rightarrow V(\mathbf{r}) + T = V(\mathbf{r}_0) + T_0.$$

Ορίζουμε την διατηρήσιμη ποσότητα

$$(4.3) \quad E := \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}),$$

η οποία ονομάζεται ενέργεια.

Έχουμε λοιπόν την εξίσωση $E = E_0$ όπου $E_0 = V(\mathbf{r}_0) + T_0$ είναι μία σταθερά. Αυτή είναι μία εξίσωση πρώτης τάξεως και, στην περίπτωση κίνησης σε μία διάσταση, λύνεται ως εξής

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = E &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} \\ &\Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Έστω ένα παραβολικό (αρμονικό) δυναμικό

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2.$$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω σχέση και παίρνουμε

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - \frac{1}{2} k x^2]}} = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m} \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}}} \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) &= \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}} = \pm \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{\frac{k}{2E}} dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E} x^2}} \end{aligned}$$

Για την απλοποίηση των επόμενων υπολογισμών θα χρησιμοποιήσουμε τις μεταβλητές

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad \bar{x} = \sqrt{\frac{k}{2E}} x.$$

Όστε τώρα έχουμε

$$\bar{t} - \bar{t}_0 = \pm \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}} = \pm [-\arccos(\bar{x})]_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} = \pm [\arccos(\bar{x}_0) - \arccos(\bar{x})].$$

Θέτουμε την γωνία $\theta_0 := \arccos(\bar{x}_0) = \arccos(\sqrt{k/(2E)} x_0)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{t} - \bar{t}_0 &= \pm [\theta_0 - \arccos(\bar{x})] \Rightarrow \\ \arccos(\bar{x}) &= \pm (\bar{t} - \bar{t}_0) + \theta_0 \Rightarrow \\ \bar{x} &= \cos[\pm (\bar{t} - \bar{t}_0) + \theta_0]. \end{aligned}$$

Επιστρέφουμε τελικά στις αρχικές μεταβλητές στις οποίες η λύση έχει την έκφραση

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \left[\pm \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) + \theta_0 \right]. \square$$

5. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

5.1. **Σταθερό δυναμικό.** Αν υποθέσουμε την δυναμική ενέργεια

$$V(x) = \text{const.}$$

τότε εύκολα υπολογίζουμε την δύναμη $F = -dV/dx = 0$. Η εξίσωση του Νεύτωνα είναι $m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{const.}$ και εκφράζει ουσιαστικά τον 1ο νόμο του Νεύτωνα.

5.2. **Γραμμικό δυναμικό.** Αν υποθέσουμε την δυναμική ενέργεια

$$V(x) = -cx, \quad c : \text{const.}$$

τότε εύκολα υπολογίζουμε την δύναμη $F = -dV/dx = c$. Ο νόμος του Νεύτωνα είναι $m\ddot{x} = c$.

Παράδειγμα. Έστω $c = mg$ όπου m η μάζα σώματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Τότε το δυναμικό $V = mgx$ είναι το βαρυτικό δυναμικό και η εξίσωση σώματος σε βαρυτικό δυναμικό γράφεται και λύνεται ως εξής

$$m\ddot{x} = -mg \Rightarrow \ddot{x} = -g \Rightarrow \dot{x} = -gt + \alpha \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \alpha t + \beta,$$

όπου α, β είναι σταθερές.

5.3. **Αρμονικός ταλαντωτής.** Θα μελετήσουμε και πάλι το παραβολικό δυναμικό του παραδείγματος του προηγούμενου κεφαλαίου, θα ακολουθήσουμε όμως άλλη μέθοδο. Αφού γνωρίζουμε το δυναμικό μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη:

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow F = -\frac{dV}{dx} = -kx.$$

Ωστε η εξίσωση του Νεύτωνα γίνεται

$$(5.1) \quad m\ddot{x} + kx = 0.$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε την γενική λύση της εξίσωσης η οποία δίνει την θέση του σωματίου x σαν συνάρτηση του χρόνου t . Πρόκειται για μια γραμμική εξίσωση και για να βρούμε λύσεις δοκιμάζουμε την συνάρτηση

$$x(t) = C e^{i\omega t},$$

όπου το C είναι μιγαδική σταθερά. Αντικατάσταση της συνάρτησης στην εξίσωση δίνει

$$m\omega^2 x + kx = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Ας θεωρήσουμε $\omega = \sqrt{k/m}$ και $C = A e^{i\phi_0}$ όπου A και ϕ_0 είναι πραγματικές σταθερές. Η γενική λύση γράφεται

$$x(t) = A e^{i\omega t + \phi_0},$$

όπου οι A και ϕ_0 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Μία σημαντική παρατήρηση είναι ότι η λύση που βρήκαμε είναι μιγαδική και άρα δεν μπορεί να περιγράψει την θέση ενός σωματίου. Όμως, επειδή η αρχική διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, ξέρουμε ότι και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της λύσης είναι λύσεις της εξίσωσης. Άρα η πραγματική λύση μπορεί να γραφεί ως

$$(5.2) \quad x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0).$$

Η λύση αυτή περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές (A, ϕ_0) και άρα είναι η γενική λύση της εξίσωσης δεύτερης τάξης (5.1).

Η λύση (5.2) περιγράφει μία περιοδική κίνηση η οποία είναι *αρμονική ταλάντωση* με πλάτος (δηλ., μέγιστη απόκλιση από το κέντρο $x = 0$ της ταλάντωσης) ίσο με A και συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$.

Άσκηση. Έστω ένα σώμα το οποίο βρίσκεται σε δυναμικό $V = 1/2kx^2$. Δίδεται ότι η θέση του σωματίου κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x(t = 0) = 0$ και η ταχύτητά του είναι $v(t = 0) = 1$. Βρείτε την θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου.

Λύση: Το σύστημα ικανοποιεί την Εξ. (5.1) με γενική λύση την (5.2). Με τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) \Rightarrow x(t = 0) = A \cos \phi_0 \Rightarrow A \cos \phi_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2},$$

όπου έχουμε εξαιρέσει την τετριμμένη περίπτωση $A = 0$. Επίσης

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \dot{x}(t = 0) = -\omega A \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\omega A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{\omega}.$$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$x(t) = -\frac{1}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

η οποία γράφεται και ως

$$x(t) = -\frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \Rightarrow x(t) = -\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

Άσκηση. Δείξτε ότι η γενική πραγματική λύση γράφεται στην μορφή

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

όπου A, B είναι πραγματικές σταθερές.

Λύση: Χρησιμοποιούμε την σχέση

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

ώστε

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) = A[\cos(\omega t) \cos \phi_0 + \sin(\omega t) \sin \phi_0] = A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t),$$

όπου θέσαμε $A' := A \cos \phi_0$, $B' := A \sin \phi_0$.

Άσκηση. Ένα σωματίο μάζας m βρίσκεται σε παραβολικό δυναμικό $V(x) = 1/2kx^2$. Γράψτε την θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου όταν σε χρόνο $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = 1$ και έχει ταχύτητα $v = 0$. Ποιά είναι η ενέργειά του;

Άσκηση. Ένα σωματίο μάζας m βρίσκεται σε παραβολικό δυναμικό $V(x) = 1/2kx^2$. Η θέση του δίνεται από την $x = x_{\max} \cos(\omega t + \phi_0)$, όπου $\omega = \sqrt{k/m}$. Αν οι σταθερές x_{\max}, ϕ_0 είναι γνωστές, βρείτε την ενέργειά του η οποία δίνεται από την Εξ. (4.3).

5.4. Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση. Θεωρούμε έναν αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος συναντά κάποια αντίσταση κατά την κίνησή του (π.χ., τριβή, αντίσταση του αέρα, κλπ). Μία τέτοια διαδικασία παριστάνεται από έναν επιπλέον όρο στο δεξιό μέλος της εξίσωσης του Νεύτωνα (5.1) της μορφής $-c\dot{x}$ όπου c είναι μία σταθερά. Αυτός ο όρος παριστάνει δύναμη που μειώνει την επιτάχυνση όταν $c > 0$. Γράφουμε λοιπόν την εξίσωση κίνησης

$$(5.3) \quad m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι της μορφής $x = Ce^{qt}$, την οποία αντικαθιστούμε στην εξίσωση για να βρούμε την συνθήκη

$$mq^2 + cq + k = 0 \Rightarrow q = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.$$

Βλέπουμε ότι το q έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Στην περίπτωση σχετικά μικρής απόσβεσης, όπου $c^2 < 4mk$, γράφουμε

$$q = -\alpha \pm i\omega, \quad \alpha := \frac{c}{2m}, \quad \omega := \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m},$$

η λύση γράφεται

$$x(t) = Ce^{-\alpha t} e^{i\omega t}$$

και παριστάνει ταλάντωση με μειούμενο πλάτος.

Αν υποθέσουμε ότι η ενέργεια του ταλαντωτή είναι η

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2,$$

τότε αυτή θα μειώνεται καθώς το πλάτος της ταλάντωσης θα μειώνεται. Μπορούμε να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ως εξής

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = -c\dot{x}^2 < 0$$

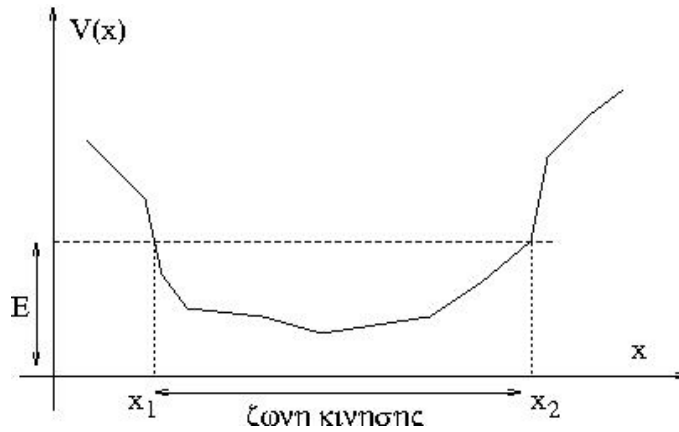
και βρίσκουμε ότι είναι αρνητικός.

5.5. Γενικά δυναμικά. Ας υποθέσουμε ένα δυναμικό το οποίο έχει ένα τοπικό ελάχιστο όπως φαίνεται στο σχήμα. Γιά να καταλάβουμε ποιοτικά την κίνηση σωματίου γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο

$$(5.4) \quad v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]},$$

όπου E είναι η σταθερά που δίνει την ενέργεια του σωματίου. Ας υποθέσουμε ότι E είναι μεγαλύτερη από το ελάχιστο του $V(x)$ και ότι έχουμε δύο σημεία x_1, x_2 εκατέρωθεν της θέσης του ελαχίστου για τα οποία ισχύει $E = V(x_1)$ και $E = V(x_2)$. Πρέπει να είναι σαφές ότι η κίνηση είναι δυνατή μόνο στο διάστημα $x_1 \leq x \leq x_2$ όπου $E > V(x)$, δηλ., η υπόριζος ποσότητα στην Εξ. (5.4) είναι μη αρνητική. Στα άκρα του διαστήματος η Εξ. (5.4) δίνει $v(x_1) = 0$, $v(x_2) = 0$ και, με βάση το σχήμα, βλέπουμε ότι η ταχύτητα ενός σωματίου που κινείται μέσα σε αυτό το δυναμικό αλλάζει πρόσημο κάθε φορά που αυτό φθάνει στα σημεία x_1 ή x_2 . Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ένα σωματίο θα παλινδρομεί μεταξύ των x_1 και x_2 .

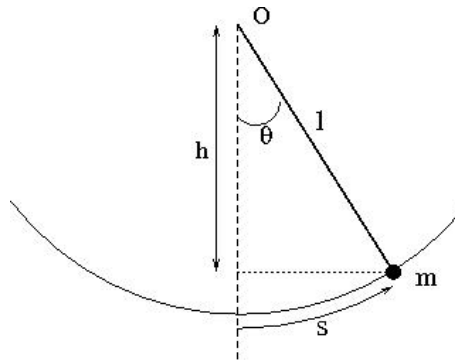
Παρατηρούμε επίσης ότι η ταχύτητα v είναι συνάρτηση της θέσης $v = v(x)$ και μόνο. Αυτή η παρατήρηση σε συνδυασμό με την Εξ. (5.4) (ή ακριβέστερα την (4.4)) δείχνει ότι η χρονική διάρκεια της κίνησης από το x_1 στο x_2 και πάλι στο x_1 είναι σταθερή και άρα μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι η κίνηση ενός σωματίου μέσα σε ένα τυχαίο δυναμικό, σαν αυτό του σχήματος, είναι περιοδική.



ΣΧΗΜΑ 2. Ένα δυναμικό το οποίο παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

5.6. **Απλό εκκρεμές.** Υποθέτουμε ότι μία σημειακή μάζα m εξαρτάται από σημείο O μέσω μιάς αβαρούς ράβδου με μήκος l όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Η δυναμική ενέργεια αυτού του συστήματος είναι $V = -mgh$ όπου το h θεωρείται θετικό όταν η μάζα είναι χαμηλότερα του σημείου O . Το σημείο αναφοράς γι' αυτή την δυναμική ενέργεια είναι το O , όπου $h = 0$ και άρα $V = 0$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι $h = l \cos \theta$, όπου θ είναι η γωνιά σε πολικές συντεταγμένες. Έστω βρίσκουμε δυναμική ενέργεια

$$(5.5) \quad V(\theta) = -mgl \cos \theta.$$



ΣΧΗΜΑ 3. Το απλό εκκρεμές.

Γιά να γράψουμε την εξίσωση κίνησης θα πρέπει να υπολογίσουμε τον όρο $m\ddot{s}$, όπου s είναι η απόσταση που έχει διανύσει η μάζα από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του. Ισχύει $s = \ell\theta \Rightarrow \dot{s} = \ell\dot{\theta}$. Από αυτήν προκύπτει η εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{s} = -\frac{dV}{ds} \Rightarrow m\ell\ddot{\theta} = -\frac{1}{\ell} \frac{dV}{d\theta} \Rightarrow m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

Μία απλή λύση που μπορούμε να βρούμε είναι η $\theta(t) = 0$ πράγμα που σημαίνει ότι η κατακόρυφη θέση $\theta = 0$ είναι μία θέση ισορροπίας του εκκρεμούς. Γενικά, η παραπάνω εξίσωση είναι μη γραμμική και η γενική λύση της είναι περίπλοκη.

Μπορούμε όμως να μελετήσουμε μία προσέγγισή της στην περίπτωση που το εκκρεμές δεν αποκλίνει πολύ από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του, δηλαδή για $\theta \ll 1$. Η προσέγγιση μπορεί να γίνει με τους ακόλουθους δύο τρόπους.

Ο πρώτος τρόπος είναι να κάνουμε την προσέγγιση στην εξίσωση κίνησης. Γράφουμε την προσέγγιση

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \theta \ll 1,$$

την οποία αντικαθιστούμε στην εξίσωση κίνησης. Βρίσκουμε

$$(5.6) \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

της οποίας η λύση είναι, όπως έχουμε δει σε προηγούμενες παραγράφους,

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi_0), \quad \omega := \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Δηλαδή έχουμε περιοδική κίνηση με συχνότητα ω και περίοδο $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

Ο δεύτερος τρόπος είναι να γράψουμε μία προσέγγιση για την δυναμική ενέργεια. Έχουμε

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \theta \ll 1,$$

την οποία αντικαθιστούμε στην δυναμική ενέργεια. Βρίσκουμε

$$V(\theta) = \frac{1}{2} mgl \theta^2 - mgl.$$

Ο σταθερός όρος στην δυναμική ενέργεια $-mgl$ δίνει μηδενική δύναμη, όπως έχουμε δει παραπάνω και άρα δεν θα επηρεαστεί η εξίσωση κίνησης αν τον παραλήψουμε. Γράφουμε τελικά για το προσεγγιστικό δυναμικό

$$V(\theta) = \frac{1}{2} mgl \theta^2.$$

Η εξίσωση κίνησης προκύπτει τώρα ως εξής

$$m\ell\ddot{\theta} = -\frac{1}{\ell} \frac{dV}{d\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0,$$

και συμπίπτει με αυτή που βρήκαμε με τον πρώτο τρόπο.

Παρατήρηση. Μπορούμε να έχουμε μία εκτίμηση της συχνότητας της κίνησης πριν καν λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης. Παρατηρούμε ότι οι φυσικές σταθερές και οι αντίστοιχες διαστάσεις τους είναι m : [μάζα], g : [μήκος]/[χρόνος]², ℓ : [μήκος]. Ο μόνος συνδυασμός τους που δίνει διαστάσεις [χρόνος] είναι ο $\sqrt{\ell/g}$. Είναι λοιπόν σαφές ότι αυτή η τελευταία σταθερά θα είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος του συστήματος (στην προκειμένη περίπτωση σχετίζεται με την περίοδο της ταλάντωσης).

Γιά να γίνει πιό σαφής η αξία αυτής της παρατήρησης, θα μπορούσε κανείς να ορίσει μιά νέα μεταβλητή \bar{t} για τον χρόνο από την σχέση

$$t := \bar{t} \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Με την βοήθεια αυτής η Εξ. (5.6) γράφεται

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{t}^2} + \theta = 0$$

όπου δεν εμφανίζεται καμμία φυσική σταθερά.

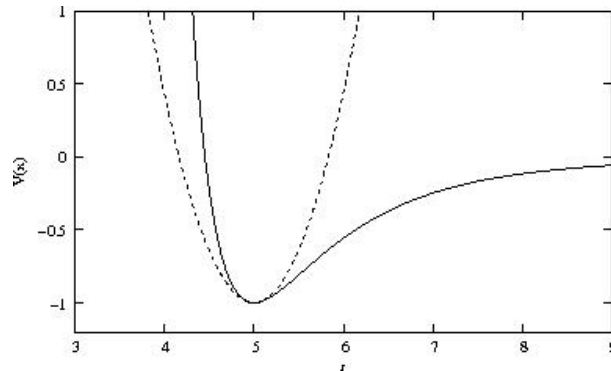
Άσκηση. Βρείτε όλα τα σημεία ισορροπίας του εκκρεμούς. Κάνετε για όλα τα σημεία την αρμονική προσέγγιση χρησιμοποιώντας την μέθοδο που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Άσκηση. Σχεδιάστε το δυναμικό (5.5). (α) Τι είδους κίνηση κάνει ένα σωματίο με ενέργεια $-mgl < E < mgl$; Είναι η περίοδος της κίνησης μεγαλύτερη ή μικρότερη από $2\pi\sqrt{\ell/g}$; (β) Τι κίνηση κάνει ένα σωματίο με ενέργεια $|E| > mgl$; (γ) Τι κίνηση κάνει ένα σωματίο με ενέργεια $E = mgl$; [Δώστε κατ' αρχήν ποιοτικές απαντήσεις στα ερωτήματα. Η πλήρης ποσοτική μελέτη του προβλήματος είναι σχετικά περίπλοκη.] \square

5.7. Δυναμικό χημικού δεσμού. Ο χημικός δεσμός μεταξύ δύο ατόμων προκύπτει από την αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Μπορούμε να περιγράψουμε τέτοιες αλληλεπιδράσεις με την βοήθεια δυναμικών και ένα εμπειρικό τέτοιο δυναμικό είναι το λεγόμενο δυναμικό Lennard-Jones

$$V(r) = D \left(\frac{R}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R}{r} \right)^6.$$

Αυτή η μορφή δυναμικού (η οποία παριστάνεται στο σχήμα με την συνεχή γραμμή) περιγράφει δεσμούς Van der Waals μεταξύ των ατόμων, δηλαδή αλληλεπιδράσεις διπόλου-διπόλου. Η απόσταση μεταξύ των ατόμων είναι r , ενώ D και R_0 είναι εμπειρικές σταθερές.



ΣΧΗΜΑ 4. Το δυναμικό Lennard Jones (για $D = 1, R_0 = 5$) παριστάνεται με την συνεχή γραμμή. Ένα παραβολικό δυναμικό παριστάνεται με την διακεκομμένη γραμμή.

Γιά να σχεδιάσουμε το γράφημα της V παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι

$$\begin{aligned} V(r) &\rightarrow \infty, & \text{as } r &\rightarrow 0 \\ V(r) &\rightarrow 0, & \text{as } r &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Γιά να αποκτήσουμε πληρέστερη εικόνα του γραφήματος της V πρέπει να βρούμε τις παραγώγους της:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{12}{r} \left[\left(\frac{R}{r} \right)^6 - D \left(\frac{R}{r} \right)^{12} \right],$$

ώστε το δυναμικό έχει ακρότατο στο σημείο

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow D \left(\frac{R}{r} \right)^6 = 1 \Rightarrow r = D^{1/6} R := r_0.$$

Με υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου βρίσκουμε ότι

$$\frac{d^2V}{dr^2}(r = r_0) = \frac{72}{R^2 D^{4/3}}$$

και άρα έχουμε ελάχιστο. Συμπεραίνουμε ότι τα άτομα, σε κατάσταση ισορροπίας, βρίσκονται σε απόσταση μεταξύ τους $r = r_0$, αφού εκεί η δύναμη μεταξύ τους $F = -dV/dr$ μηδενίζεται.

Αν και η γενική περιγραφή της δυναμικής των ατόμων είναι συνήθως περίπλοκη, μπορούμε όμως να την περιγράψουμε σχετικά απλά όταν αυτά βρίσκονται κοντά στην θέση ισορροπίας τους. Προσεγγίζουμε το δυναμικό με το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο $r = r_0$:

$$V \approx V_0 + \frac{dV}{dr}|_{r=r_0}(r - r_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dr^2}|_{r=r_0}(r - r_0)^2 = V_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dr^2}|_{r=r_0}(r - r_0)^2,$$

όπου $V_0 = V(r = r_0)$ είναι μία σταθερά. Η $d^2V/dr^2(r = r_0)$ είναι επίσης μία σταθερά την οποία θα ονομάσουμε k . Τότε το σύστημά μας περιγράφεται από το δυναμικό

$$V(r) = \frac{1}{2} kq^2,$$

όπου θέσαμε την σταθερά $k := d^2V/dr^2(r = r_0)$ και την απόκλιση από την θέση ισορροπίας $q := r - r_0$. Επίσης, παραλείψαμε την σταθερά V_0 η οποία δεν θα επηρεάσει τις εξισώσεις κίνησης. Η παραβολική αυτή προσέγγιστική μορφή του δυναμικού γύρω από το ελάχιστο $r = r_0$ παριστάνεται στο σχήμα με την διακεκομμένη γραμμή.

6. ΕΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE

6.1. Γενικευμένες συντεταγμένες. Η θέση κάθε σωματίου στον χώρο μπορεί να περιγραφεί από τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες. Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα N σωματίων, τότε αυτό περιγράφεται γενικά από $3N$ συντεταγμένες οι οποίες θα μπορούσαν να είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σωματίων. Σε πολλές όμως περιπτώσεις αυτές δεν είναι οι πιό κατάλληλες μεταβλητές για την περιγραφή του συστήματος, ενώ υπάρχουν κάποιες άλλες μεταβλητές οι οποίες περιγράφουν με απλούστερο τρόπο το συγκεκριμένο σύστημα. Μία κατηγορία συστημάτων όπου αυτό συμβαίνει συχνά είναι για κινήσεις οι οποίες υπόκεινται σε δεσμούς και τότε είναι δυνατόν να χρειάζονται λιγότερες από $3N$ μεταβλητές για να περιγράψουν το σύστημα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ένα σωματίο το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται πάνω σε μία σφαίρα. Τότε δεν είναι αναγκαίες τρεις μεταβλητές (π.χ., οι τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες) για να περιγράψουν την κίνηση, αλλά, π.χ., μόνο οι δύο γωνίες σφαιρικών συντεταγμένων αρκούν. Επίσης, η θέση ενός σωματίου το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται επάνω σε κύκλο δεδομένης ακτίνας ℓ (π.χ., το απλό εκκρεμές) περιγράφεται από μία μόνο μεταβλητή, η οποία είναι μία γωνία θ .

Για να περιγράψουμε γενικότερα συστήματα με μεταβλητές οι οποίες είναι ενδεχομένως κατάλληλες για το συγκεκριμένο κάθε φορά σύστημα εισάγουμε την έννοια των *γενικευμένων συντεταγμένων*. Για ένα σύστημα N σωματίων ορίζουμε τις n μεταβλητές q_i έτσι ώστε να περιγράψουν πλήρως το σύστημα. Τότε οι καρτεσιανές συντεταγμένες δίνονται από σχέσεις της μορφής

$$(6.1) \quad x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, 3N.$$

Σαν παράδειγμα μετασχηματισμού της μορφής (6.1) σκεφθείτε ότι οι q_i μπορεί να είναι οι πολικές συντεταγμένες r, θ . Περιμένουμε ότι γενικά θα ισχύει $n \leq 3N$.

6.2. Εξισώσεις Lagrange. Ο σκοπός μας τώρα είναι να γράψουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα για γενικευμένες συντεταγμένες. Στα βήματα που ακολουθούν είναι αναγκαίο ο αναγνώστης να κατανοήσει τις έννοιες και την χρήση της μερικής και ολικής παραγώγου. Ένα βασικό σημείο είναι ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες x_i καθώς και οι γενικευμένες συντεταγμένες q_k είναι συναρτήσεις του χρόνου. Δηλαδή, η λύση του συστήματος είναι τελικά της μορφής $x_i = x_i(t)$ είτε $q_k = q_k(t)$. Χρησιμοποιούμε τις (6.1) και τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης για να γράψουμε τις χρονικές παραγώγους των συντεταγμένων:

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k},$$

Στην παραπάνω σχέση και στις επόμενες αυτής της παραγράφου θεωρούμε πάντα ότι οι δείκτες παίρνουν τις τιμές $i = 1, \dots, 3N$ και $k = 1, \dots, n$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω με \dot{x}_i και παραγωγίζουμε με τον τελεστή d/dt :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial q_k}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε με την μάζα m_i του κάθε σωματίου και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης και χρησιμοποιούμε την εξίσωση του Νεύτωνα $m_i \ddot{x}_i = F_i$ για να βρούμε

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right).$$

Τελικά αθροίζουμε στον δείκτη i και βρίσκουμε

$$(6.2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k},$$

όπου T είναι η κινητική ενέργεια.

Είναι τώρα σημαντικό να καταλάβουμε την έννοια του πρώτου όρου στο δεξιό μέλος. Για τον σκοπό αυτό γράφουμε το έργο της δύναμης

$$\sum_i F_i dx_i = \sum_i F_i \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k = \sum_k \left(\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) dq_k.$$

Ονομάζουμε την

$$(6.3) \quad Q_k := \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

γενικευμένη δύναμη, ώστε το έργο γράφεται $\sum_i F_i dx_i = \sum_k Q_k dq_k$.

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις παράγονται από δυναμικό, δηλ., $F_i = -\partial V / \partial x_i$, έχουμε

$$(6.4) \quad Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_i -\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης.

Παράδειγμα. Ο απλούστερος τρόπος να περιγράψουμε το απλό εκκρεμές είναι να χρησιμοποιήσουμε μία γωνία θ η οποία περιγράφει την απόκλιση του εκκρεμούς από την κατακόρυφο. Άρα το απλό εκκρεμές περιγράφεται από μία γενικευμένη συντεταγμένη, την γωνία θ . Η δυναμική του ενέργεια έχουμε δει ότι γράφεται ως $V = -mgl \cos \theta$. Άρα η γενικευμένη δύναμη είναι

$$Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta. \square$$

Αντικαθιστώντας την (6.4) στην (6.2) βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης για τις γενικευμένες συντεταγμένες q_k

$$(6.5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Οι εξισώσεις παίρνουν μία πιό συμπαγή μορφή εάν ορίσουμε την συνάρτηση

$$(6.6) \quad L := T - V$$

η οποία ονομάζεται Lagrangian (Λαγκρανζιανή) του συστήματος και αφού παρατηρήσουμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},$$

δεδομένου ότι συνήθως υποθέτουμε $V = V(q_k)$. Οι εξισώσεις κίνησης τότε γράφονται

$$(6.7) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n$$

και ονομάζονται εξισώσεις Lagrange. Παρατηρήστε ότι ένα μηχανικό σύστημα που ορίζεται από n γενικευμένες συντεταγμένες περιγράφεται από ένα σύστημα n εξισώσεων Lagrange.

Παράδειγμα. Έστω ο αρμονικός ταλαντωτής με κινητική και δυναμική ενέργεια

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} k x^2.$$

Εδώ έχουμε μία συντεταγμένη, την x .

Η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2.$$

Υπολογίζουμε

$$\frac{dL}{d\dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{dL}{dx} = -kx$$

και άρα η εξίσωση Lagrange γράφεται

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) = \frac{dL}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0. \square$$

Παράδειγμα. Έστω το απλό εκκρεμές με κινητική και δυναμική ενέργεια

$$T = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2, \quad V = -mgl \cos \theta,$$

οπότε η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta.$$

Και για αυτό το πρόβλημα έχουμε μία γενικευμένη συντεταγμένη, την γωνία θ .

Υπολογίζουμε

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta}, \quad \frac{dL}{d\theta} = -mgl \sin \theta$$

και άρα η εξίσωση Lagrange γράφεται

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) = \frac{dL}{d\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\ell^2 \dot{\theta}) = -mgl \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \square$$

Παράδειγμα. Έστω ένα σωματίο το οποίο κινείται σε δύο διαστάσεις και βρίσκεται σε κεντρικό δυναμικό, δηλαδή, όταν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , το δυναμικό γράφεται $V = V(r)$. Η κινητική του ενέργεια σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

και άρα η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r).$$

Έχουμε δύο γενικευμένες συντεταγμένες r, θ και άρα δύο εξισώσεις Lagrange. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}, & \frac{dL}{dt} &= 0\end{aligned}$$

και άρα οι εξισώσεις Lagrange είναι οι

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \square\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι στο σύστημα ασκούνται δυνάμεις και ορισμένες μόνο από αυτές παράγονται από δυναμικό $V(q_1, \dots, q_n)$, δηλ.,

$$Q_k = Q'_k - \frac{\partial V}{\partial q_k},$$

όπου Q_k είναι οι συνολικές δυνάμεις και Q'_k είναι το μέρος των δυνάμεων οι οποίες δεν παράγονται από το δυναμικό V . Τότε ξεκινάμε από την (6.2), όπου οι Q_k είναι όπως στην (6.3) και αντικαθιστούμε την παραπάνω μορφή των γενικευμένων δυνάμεων. Ορίζουμε την Λαγκρανζιανή $L = T - V$ και οι εξισώσεις γράφονται ως

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Οι Q'_k δίνονται από εξίσωση ανάλογη της (6.3):

$$Q'_k := \sum_i F'_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

όπου F'_i είναι τώρα οι δυνάμεις που δεν δίνονται από το δυναμικό.

Άσκηση. Έστω αρμονικός ταλαντωτής σε μία διάσταση στον οποίο ασκείται μία επιπλέον δύναμη τριβής $f = -c\dot{x}$, όπου c μία σταθερά. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Lagrange.

Λύση: Η Λαγκρανζιανή είναι (όπου αγνοείται η δύναμη τριβής)

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2.$$

Στις εξισώσεις Lagrange πρέπει να λάβουμε επιπλέον υπ' όψιν τη δύναμη τριβής. Αυτή είναι ίση με την γενικευμένη δύναμη $Q_x = f$, η οποία θα προστεθεί στο δεξιό μέλος της εξίσωσης. Η πλήρης εξ. Lagrange είναι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} + Q_x \Rightarrow m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = 0. \square$$

Άσκηση. Έστω ένα σωματίο το οποίο βρίσκεται σε δυναμικό $V = V(r)$, όπου (r, θ) είναι πολικές συντεταγμένες. Μία επιπλέον δύναμη τριβής $\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v}$ (η οποία δεν περιέχεται στο

δυναμικό) ασκείται σε αυτό το σώματιο, όπου λ είναι μία σταθερά και \mathbf{v} είναι η ταχύτητά του. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησής του.

Λύση: Χρειάζεται να βρούμε τις γενικευμένες δυνάμεις που προκύπτουν από την δύναμη τριβής για να γράψουμε τις εξισώσεις Lagrange. Εφαρμόζουμε την (6.3) η οποία εδώ γράφεται ως εξής

$$Q_r = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \quad Q_\theta = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta},$$

όπου $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r$. Έχουμε $\partial \mathbf{r} / \partial r = \hat{\mathbf{e}}_r$ και επίσης, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $\hat{\mathbf{e}}_r = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$, βρίσκουμε $\partial \mathbf{r} / \partial \theta = r \hat{\mathbf{e}}_\theta$. Άρα έχουμε τις γενικευμένες δυνάμεις

$$Q_r = \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r, \quad Q_\theta = r \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Η δύναμη τριβής σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v} = -\lambda (\dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta)$$

και άρα έχουμε

$$Q_r = -\lambda \dot{r}, \quad Q_\theta = -\lambda r^2 \dot{\theta}.$$

Αυτές οι γενικευμένες δυνάμεις πρέπει να προστεθούν στο δεύτερο μέλος των εξισώσεων Lagrange (τις οποίες έχουμε βρει σε προηγούμενο παράδειγμα). Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial r} + Q_r \Rightarrow m \ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr} - \lambda \dot{r} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} + Q_\theta \Rightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = -\lambda r^2 \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η 2η εξίσωση μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = -\frac{\lambda}{m} (m r^2 \dot{\theta})$$

ώστε αν θέσουμε

$$J := m r^2 \dot{\theta},$$

αυτή γράφεται και λύνεται ως εξής

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{\lambda}{m} J \Rightarrow J(t) = J_0 e^{-\frac{\lambda}{m} t}.$$

Η ποσότητα J λέγεται *στροφορμή* του σώματιοι. Η σταθερά της ολοκλήρωσης J_0 είναι η στροφορμή την χρονική στιγμή $t = 0$, δηλ., $J(t = 0) = J_0$. Βλέπουμε ότι η στροφορμή μειώνεται με τον χρόνο λόγω της δύναμης τριβής. \square

Βιβλιογραφία. Μπορείτε να μελετήσετε για τις εξισώσεις Lagrange στα βιβλία [1, 2, 3].

7. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

7.1. Αρχή του Hamilton. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε μία πίο γενική αιτιολόγηση για τις εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος σωμάτων, δηλαδή θα εξάγουμε τις εξισώσεις Lagrange από μία γενική αρχή. Ας υποθέσουμε ένα σύστημα που περιγράφεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_1, \dots, q_n . Σε κάθε χρονική στιγμή η κατάσταση του συστήματος δίνεται από τις τιμές των συντεταγμένων. Άρα η εξέλιξη του στον χρόνο μπορεί να περιγραφεί σαν κίνηση στον n -διάστατο χώρο των συντεταγμένων.

Η κίνηση ενός συστήματος σωμάτων μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια μίας πραγματικής συνάρτησης η οποία παίζει το ρόλο ενός γενικευμένου δυναμικού. Η συνάρτηση αυτή είναι η Λαγκρανζιανή L . Η αρχή του Hamilton βασίζεται στο ολοκλήρωμα της L στον χρόνο, από μία αρχική στιγμή t_1 σε μία τελική στιγμή t_2 :

$$(7.1) \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt.$$

Η αρχή αυτή λέει ότι από όλες τις πιθανές κινήσεις στον χώρο το σώμα επιλέγει να κινηθεί σε αυτήν για την οποία το I έχει ελάχιστη τιμή.

Σύμφωνα με όσα ξέρουμε για ελάχιστα συναρτήσεων, η παράγωγος μίας συνάρτησης σε ένα ελάχιστο, μηδενίζεται. Άρα η αρχή του Hamilton διατυπώνεται και ως

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt = 0,$$

όπου το σύμβολο δI δηλώνει την μεταβολή του I .

7.2. Εξισώσεις Euler-Lagrange. Θα εξετάσουμε μεθόδους για να υπολογίσουμε την μεταβολή μίας συνάρτησης της μορφής του I και θα βρούμε την συνθήκη ώστε η μεταβολή της να μηδενίζεται.

Γιά να απλοποιήσουμε το πρόβλημα, υποθέτουμε μόνο μία συνάρτηση $y = y(x)$ (μίας μεταβλητής x) και ενδιαφερόμαστε για το ολοκλήρωμα

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x) dx,$$

όπου $y_x := dy/dx$. Η ποσότητα $J[y]$ ονομάζεται *συναρτησιακό* διότι δεν είναι μία συνηθισμένη συνάρτηση, αλλά η τιμή της εξαρτάται από την πλήρη μορφή μίας συνάρτησης $y(x)$. Άρα, ένα συναρτησιακό ορίζεται πάνω σε ένα σύνολο συναρτήσεων (και όχι σε μία περιοχή στον χώρο των συντεταγμένων).

Παράδειγμα. Ποιό είναι το μήκος καμπύλης $y = y(x)$ η οποία περνάει από τα σημεία $(x_1, y(x_1))$ και $(x_2, y(x_2))$;

Το ζητούμενο μήκος δίνεται από το ακόλουθο συναρτησιακό

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x^2} dx. \square$$

Το θεμελιώδες πρόβλημα του λογισμού μεταβολών είναι να βρεθεί το ελάχιστο του ολοκλήρωματος $J[y]$ όπου οι τιμές $x_1, x_2, y(x_1), y(x_2)$ είναι δεδομένες. Θα μελετήσουμε αυτό το πρόβλημα για συναρτήσεις $f(y, y_x, x)$ οι οποίες είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες ως προς όλες τις μεταβλητές y, y_x, x και επίσης η δεύτερη παράγωγος y_{xx} είναι συνεχής.

Θα χρειαστούμε την έννοια της *γειτονιάς συνάρτησης* $f(x, \dots)$ η οποία ορίζεται ως εξής. Έστω $h > 0$, τότε μία συνάρτηση $f_1(x, \dots)$ είναι στην γειτονιά (h) της συνάρτησης f αν ισχύει $|f - f_1| < h$ σε όλο το διάστημα ορισμού τους.

Υποθέτουμε τώρα μία συνάρτηση $\eta(x)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και με $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$. Εισάγουμε την παράμετρο ϵ , θέτουμε $y(x) = y(x, \epsilon = 0) = y(x, 0)$ και γράφουμε τις

συναρτήσεις στην γειτονιά της $y(x)$ ως

$$y(x, \epsilon) = y(x, 0) + \epsilon \eta(x).$$

Η μεταβολή της συνάρτησης y συμβολίζεται με δy και είναι στην περίπτωση αυτή $\delta y = \epsilon \eta(x)$. Το συναρτησιακό J γίνεται τώρα συνάρτηση του ϵ και γράφεται

$$J(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \epsilon), y_x(x, \epsilon), x] dx.$$

Από τον λογισμό πραγματικών συναρτήσεων ξέρουμε ότι απαραίτητη συνθήκη για να έχουμε ελάχιστο του $J(\epsilon)$ είναι η $(dJ/d\epsilon)_{\epsilon=0} = 0$. Ας υπολογίσουμε το

$$(7.2) \quad \frac{dJ}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \epsilon} \right) dx$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος, με κατά παράγοντες ολοκλήρωση, γίνεται

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \epsilon} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \epsilon} dx = \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \frac{\partial y}{\partial \epsilon} dx.$$

Έχουμε $\partial y / \partial \epsilon = \eta(x)$ και άρα $\partial y / \partial \epsilon = 0$ στα άκρα του διαστήματος $x = x_1, x = x_2$. Άρα έχουμε

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \epsilon} dx.$$

και η συνθήκη για να έχουμε ακρότατο είναι $dJ/d\epsilon = 0$.

Στο σημείο αυτό χρειαζόμαστε το *Θεμελιώδες λήμμα του Λογισμού Μεταβολών*: Αν $\phi(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση και

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \phi(x) dx = 0$$

ισχύει για κάθε συνάρτηση $\eta(x)$ η οποία είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και μηδενίζεται στα όρια, τότε έχουμε $\phi(x) = 0$.

Σύντομη απόδειξη. Έστω $\phi(x) \neq 0$, π.χ., $\phi(x = \xi) > 0$. Τότε υπάρχει γειτονιά G του x ($\xi_0 < x < \xi_1$) όπου $\phi(x) > 0$. Τώρα εκλέγω $\eta(x) = (x - \xi_0)^4 (x - \xi_1)^4$ στο G και $\eta(x) = 0$ εκτός του G . Στην περίπτωση αυτή θα έχω $\int_{x_1}^{x_2} \eta \phi dx > 0$, το οποίο όμως αντιβαίνει στην υπόθεση. \square

Εισάγουμε τον συμβολισμό

$$\delta y := \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} d\epsilon, \quad \delta J := \left(\frac{dJ}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} d\epsilon.$$

Τότε η (7.2) γράφεται

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \right] \delta y dx.$$

Η συνθήκη $\delta J = 0$ με την βοήθεια του προηγούμενου λήμματος δίνει την ακόλουθη αναγκαία συνθήκη για να έχει ακρότατο το J :

$$(7.3) \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0.$$

Η διαφορική εξίσωση που βρήκαμε λέγεται εξίσωση Euler-Lagrange.

Παράδειγμα. Βρείτε την καμπύλη $y = y(x)$ η οποία συνδέει δύο σημεία $(x_1, y(x_1))$ και $(x_2, y(x_2))$ και έχει το ελάχιστο μήκος.

Έχουμε δει σε προηγούμενο παράδειγμα ότι το μήκος της καμπύλης δίνεται από το συναρτησιακό

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x^2} dx.$$

Γιά να βρούμε ακρότατα για το J πρέπει να βρούμε τις $y(x)$ για τις οποίες $\delta J = 0$, δηλαδή αρκεί να λύσουμε την εξίσωση Euler-Lagrange (7.3). Έχουμε

$$f = \sqrt{1 + y_x^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_x} = \frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}},$$

ώστε η εξίσωση (7.3) γράφεται

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} = c \Rightarrow y_x = a \Rightarrow y = ax + b,$$

όπου a, b, c είναι σταθερές (και μάλιστα $c = a/\sqrt{1 + a^2}$). Άρα η ζητούμενη καμπύλη είναι μία ευθεία. Τα a, b πρέπει να προσδιορισθούν έτσι ώστε η ευθεία να περνάει από τα δεδομένα σημεία. \square

7.3. Ολοκλήρωμα δράσης. Το ολοκλήρωμα (7.1), του οποίου η ολοκληρωταία ποσότητα είναι η Λαγκρανζιανή και η ολοκλήρωση είναι στον χρόνο, λέγεται ολοκλήρωμα δράσης. Το I είναι ένα συναρτησιακό της μορφής που μελετήσαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο όπου τον ρόλο του x παίζει ο χρόνος t . Πρέπει όμως να προσέξουμε ότι το I εξαρτάται από n συναρτήσεις q_i (και όχι από μία μόνο συνάρτηση y όπως το $J[y]$).

Η γενίκευση του αποτελέσματος (7.3) για συναρτησιακό το οποίο εξαρτάται από n συναρτήσεις $J = J(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ είναι σχετικά απλή και αφήνεται σαν άσκηση.

Άσκηση. Βρείτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το ολοκλήρωμα δράσης

$$I = \int f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt. \square$$

Από την συνθήκη $\delta J = 0$ προκύπτουν οι εξής n εξισώσεις Lagrange

$$(7.4) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Αυτές συμπίπτουν με τις Εξ. (6.7).

7.4. Ανακεφαλαίωση των εξισώσεων Lagrange. Θα συνοψίσουμε τις μορφές των εξισώσεων Lagrange τις οποίες έχουμε δει μέχρι τώρα.

Γιά ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται από n μεταβλητές q_1, \dots, q_n και στο οποίο ασκούνται οι γενικευμένες δυνάμεις Q_k έχουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$(7.5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

όπου στο αριστερό μέλος είναι κινητικοί όροι και στο δεξιό μέλος οι δυνάμεις. Οι Q_k δίνονται από την Εξ. (6.3).

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις παράγονται από δυναμικό $V(q_1, \dots, q_n)$ ορίζουμε την Λαγκρανζιανή και έχουμε την συνήθη μορφή των εξισώσεων

$$(7.6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ας υποθέσουμε ότι στο σύστημα ασκούνται δυνάμεις και ορισμένες μόνο από αυτές παράγονται από δυναμικό $V(q_1, \dots, q_n)$, δηλ.,

$$Q_k = Q'_k - \frac{\partial V}{\partial q_k},$$

όπου Q_k είναι οι συνολικές δυνάμεις και Q'_k είναι το μέρος των δυνάμεων οι οποίες δεν παράγονται από το δυναμικό V . Τότε ορίζουμε την Λαγκρανζιανή $L = T - V$ και γράφουμε τις εξισώσεις ως

$$(7.7) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Αυτή την εξίσωση έχουμε χρησιμοποιήσει σε προηγούμενα παραδείγματα όπου έπρεπε να λάβουμε υπ' όψιν δυνάμεις τριβής.

8. ΝΟΜΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ

8.1. Ενέργεια. Οι εξισώσεις Lagrange είναι σε μορφή η οποία υποδεικνύει την ύπαρξη ποσοτήτων οι οποίες διατηρούνται κατά την διάρκεια της κίνησης. Για να βρούμε τέτοιες ποσότητες θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η ολική παράγωγος τους στον χρόνο μηδενίζεται.

Ο βασικότερος νόμος διατήρησης παράγεται ως εξής. Γράφουμε το ολικό διαφορικό της Λαγκρανζιανής

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right] + \frac{\partial L}{\partial t},$$

και χρησιμοποιούμε τις Εξ. Lagrange (6.7)

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right] + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \\ &\frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

Προκύπτει άμεσα ότι, στην περίπτωση $\partial L / \partial t = 0$, η ποσότητα

$$(8.1) \quad H := \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$$

είναι διατηρήσιμη και λέγεται ενέργεια του συστήματος.

Παράδειγμα. Έστω ένα μονοδιάστατο σύστημα με Λαγκρανζιανή $L = 1/2 m \dot{x}^2 - V(x)$. Η ενέργειά του είναι

$$H = \frac{dL}{dx} \dot{x} - L = (m\dot{x})\dot{x} - \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right] = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x).$$

Η ενέργεια H διατηρείται αφού $\partial L/\partial t = 0$. \square

Παράδειγμα. Έστω ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες και έχει Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r, \theta).$$

Γιά να υπολογίσουμε την ενέργεια έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

και άρα

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \left[\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r, \theta) \right] \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m\dot{r}^2 - \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta}^2 + V(r, \theta) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r, \theta). \square \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες οι οποίες ορίζονται από τις

$$x_i = x_i(q_k).$$

Έχουμε

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Θα υποθέσουμε στα επόμενα την περίπτωση που $\partial L/\partial t = 0$, οπότε η κινητική ενέργεια γράφεται

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

όπου τα a_{jk} ορίζονται από την παραπάνω σχέση και ισχύει $a_{jk} = a_{kj}$.

Η κινητική ενέργεια είναι μία ομογενής συνάρτηση δευτέρου βαθμού. Το θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις λέει

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \dots = 2T.$$

Θεωρούμε επίσης ότι η δυναμική ενέργεια είναι $V = V(q_k)$, οπότε

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T.$$

Βρίσκουμε τελικά

$$H = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T - (T - V) = T + V.$$

8.2. Γενικευμένη ορμή. Η μορφή των εξισώσεων Lagrange υποδεικνύει τις εξής σημαντικές ποσότητες

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

οι οποίες ονομάζονται *γενικευμένες ορμές*. Αν γράψουμε τις εξισώσεις Lagrange στην μορφή

$$(8.2) \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

βλέπουμε ότι η μεταβολή μιάς γενικευμένης ορμής ισούται με ποσότητα η οποία είναι, στις συνήθεις περιπτώσεις, ίση με μία γενικευμένη δύναμη - έτσι δικαιολογείται και το όνομά τους. Για κάθε γενικευμένη συντεταγμένη q_k υπάρχει η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή q_k . Άλλος όρος που χρησιμοποιείται για τις ποσότητες p_k είναι *κανονική ορμή*.

Παράδειγμα. Έστω ένα μονοδιάστατο πρόβλημα με $T = 1/2 m \dot{x}^2$ και $L = T - V(x)$. Έχουμε την γενικευμένη ορμή

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x},$$

η οποία συμπίπτει με την συνήθη ορμή. \square

Παράδειγμα. Έστω ένα σωματίο που βρίσκεται σε κεντρικό δυναμικό (σε δύο διαστάσεις) και περιγράφεται από πολικές συντεταγμένες. Έχουμε

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad L = T - V(r),$$

ώστε οι δύο γενικευμένες ορμές είναι

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}.$$

Η p_r μοιάζει με συνήθη ορμή, ενώ η p_θ έχει μία ασυνήθιστη μορφή και ονομάζεται *στροφορμή* καθώς είναι ανάλογη (μέσω του $\dot{\theta}$) με τον ρυθμό περιστροφής του σωματίου. \square

Η σημαντικότερη ιδιότητα των γενικευμένων ορμών προκύπτει από τις εξισώσεις (8.2). Βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(p_k) = 0 \Rightarrow p_k = \text{const.}$$

Δηλαδή, έχουμε τον εξής γενικό κανόνα: στην περίπτωση που κάποια συντεταγμένη q_k (για συγκεκριμένο k) δεν περιέχεται στην Λαγκρανζιανή, τότε η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή p_k είναι διατηρήσιμη ποσότητα.

Σημειώνουμε τέλος ότι, με τον συμβολισμό που εισαγάγαμε για τις γενικευμένες ορμές, η ενέργεια (8.1) ενός συστήματος γράφεται

$$H = \dot{q}_k p_k - L.$$

Παράδειγμα. Στην περίπτωση του κεντρικού δυναμικού που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, η Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

δεν περιέχει την συντεταγμένη θ , δηλ., $\partial L/\partial\theta = 0$. Άρα η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ (η στροφορμή) είναι διατηρήσιμη ποσότητα. Αυτό σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα ενός σωματίου είναι αντιστόφως ανάλογη της ακτινικής του συντεταγμένης $\dot{\theta} = p_\theta/(mr^2)$.
□

9. ΦΟΡΤΙΟ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

9.1. **Εξισώσεις Newton.** Θα θεωρήσουμε ένα σωματίο μάζας m φορτισμένο με ηλεκτρικό φορτίο q το οποίο κινείται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} . Το σωματίο υπόκειται σε μία δύναμη Lorentz η οποία εξαρτάται και από την ταχύτητά του \mathbf{v} :

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Θα θεωρήσουμε στα παρακάτω την περίπτωση ενός σταθερού ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Ας περιοριστούμε επίσης στην περίπτωση που το φορτίο κινείται σε έναν *διδιάστατο χώρο*, δηλαδή στο επίπεδο (x, y) . Συμφωνα με τον νόμο του Newton οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$(9.1) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x}. \end{aligned}$$

Η γενική λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι η

$$x = x_0 + R \sin(\omega_c t + \delta), \quad y = y_0 + R \cos(\omega_c t + \delta),$$

όπου

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

λέγεται *συχνότητα κυκλότρου*, ενώ R, δ, x_0 και y_0 είναι αυθαίρετες σταθερές. Η λύση των εξισώσεων περιγράφει κυκλική κίνηση με συχνότητα ω_c και ακτίνα R ενώ δ είναι μία φάση.

9.2. **Εξισώσεις Lagrange.** Οι εξισώσεις κίνησης (9.1) προκύπτουν ως οι εξισώσεις Euler-Lagrange εάν θεωρήσουμε την Lagrangian

$$(9.2) \quad L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Γιά να γράψουμε τις εξισώσεις Lagrange υπολογίζουμε πρώτα τις ποσότητες

$$p_x := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{qB}{2} y, \quad p_y := \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{qB}{2} x,$$

ώστε έχουμε τις δύο εξισώσεις Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} - qB\dot{y} = qB\dot{y} \Rightarrow m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = -qB\dot{x} \end{aligned}$$

και συμπίπτουν με τις εξισώσεις του Νεύτωνα που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Οι δύο εξισώσεις της κίνησης γράφονται και ως

$$(9.3) \quad \ddot{x} - \omega_c \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + \omega_c \dot{x} = 0.$$

9.3. **Νόμοι διατήρησης.** Παρατηρούμε ότι οι Εξ. (9.3) μπορούν να γραφούν ως

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} - \omega_c y) = 0, \quad \frac{d}{dt}(\dot{y} + \omega_c x) = 0,$$

δηλαδή βρίσκουμε ότι οι ποσότητες στις παρενθέσεις είναι διατηρήσιμες ποσότητες της κίνησης. Θα γράψουμε αυτές τις διατηρήσιμες ποσότητες στην μορφή

$$(9.4) \quad R_x := x + \frac{\dot{y}}{\omega_c}, \quad R_y := y - \frac{\dot{x}}{\omega_c}.$$

Αυτές οι ποσότητες είναι χρήσιμες για την περιγραφή της κίνησης επειδή ακριβώς είναι διατηρήσιμες ποσότητες και το διάνυσμα (R_x, R_y) λέγεται *οδηγός* της κίνησης (guiding center), διότι δίνει περίπου την θέση του σωματίου.

Επειδή το σύστημα περιγράφεται από Lagrangian έχει ενέργεια η οποία είναι διατηρήσιμη:

$$\begin{aligned} W &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \\ &= \dot{x} \left(m\dot{x} - \frac{qB}{2} y \right) + \dot{y} \left(m\dot{y} + \frac{qB}{2} x \right) - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{qB}{2} (xy - y\dot{x}) \Rightarrow \\ (9.5) \quad W &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίο έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{y}_0 := \dot{y}(t=0) = 0$ και βρίσκεται στο σημείο $x_0 := x(t=0)$, $y_0 := y(t=0)$. Ζητάται να βρούμε την τροχιά του.

Θα λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μόνο τις διατηρήσιμες ποσότητες. Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι διατηρήσιμες ποσότητες έχουν τις τιμές

$$W = 0, \quad R_x = x_0, \quad R_y = y_0.$$

Επειδή η ενέργεια W διατηρείται στον χρόνο έχουμε ότι για κάθε t

$$W = 0 \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0, \dot{y} = 0.$$

Επίσης $R_x = x$, $R_y = y$ διατηρούνται και άρα η λύση είναι απλή $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ για κάθε t . \square

Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίο έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{y}_0 := \dot{y}(t=0) = \omega_c$ και βρίσκεται στο σημείο $x_0 := x(t=0) = 1$, $y_0 := y(t=0) = 0$. Ζητάται να βρούμε την τροχιά του.

Βρίσκουμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) = \frac{1}{2} m \omega_c^2 \\ R_x &= x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega_c} = 2, \quad R_y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega_c} = 0. \end{aligned}$$

Από την διατήρηση του οδηγού της κίνησης προκύπτει

$$x + \frac{\dot{y}}{\omega_c} = 2 \Rightarrow \dot{y} = \omega_c(2 - x), \quad y - \frac{\dot{x}}{\omega_c} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \omega_c y.$$

Από την διατήρηση της ενέργειας W και με χρήση των σχέσεων που μόλις βρήκαμε έχουμε

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega_c^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 1.$$

Άρα το σωματίο κάνει κυκλική κίνηση μοναδιαίας ακτίνας και με κέντρο τον οδηγό της κίνησης $(R_x, R_y) = (2, 0)$. Αυτό το παράδειγμα παρέχει μία αιτιολογία για το όνομα 'οδηγός της κίνησης' το οποίο δόθηκε στο διάνυσμα (R_x, R_y) . \square

Άσκηση. Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίο έχει αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 := \dot{x}(t=0)$, $\dot{y}_0 := \dot{y}(t=0)$ και βρίσκεται στο σημείο $x_0 := x(t=0)$, $y_0 := y(t=0)$. Βρείτε την τροχιά του με την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στα προηγούμενα παραδείγματα.

[Υπόδειξη: Υπολογίστε την ποσότητα $(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2$.]

Κατασκευάστε αριθμητικό κώδικα στον οποίο θα δίνονται τα δεδομένα και θα παράγεται η τροχιά.

10. ΦΟΡΤΙΟ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Θεωρούμε ένα σωματίο μάζας m φορτισμένο με ηλεκτρικό φορτίο q το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B} = B\hat{z}$ και ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} . Η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου είναι της μορφής $V = q\Phi(x, y)$, όπου το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την $\mathbf{E} = -\nabla\Phi(x, y)$. Άρα η Lagrangian είναι

$$(10.1) \quad L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) - q\Phi(x, y).$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$(10.2) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} - q\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} - q\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Η δύναμη που ασκείται σε φορτίο q λόγω του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} = -q\nabla\Phi(x, y)$ και εμφανίζεται στο δεξιό μέλος των εξισώσεων.

10.1. Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Θα μελετήσουμε την περίπτωση ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E} = E\hat{x}$. Η δυναμική ενέργεια φορτίου q σε αυτό το πεδίο είναι $V = -qEx$. Ωστε οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m\dot{x} - qBy) &= qE \Rightarrow \frac{dR_y}{dt} = -\frac{E}{B} \\ \frac{d}{dt} (m\dot{y} + qBx) &= 0 \Rightarrow \frac{dR_x}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Οι λύσεις αυτών των εξισώσεων βρίσκονται εύκολα και είναι

$$R_x = R_x^{(0)}, \quad R_y = -\frac{E}{B}t + R_y^{(0)},$$

όπου $R_x^{(0)}, R_y^{(0)}$ είναι σταθερές που δίνουν τον οδηγό της κίνησης στον χρόνο $t = 0$. Σημειώστε ότι τα (R_x, R_y) δεν είναι πλέον διατηρήσιμες ποσότητες. Βλέπουμε ότι ο οδηγός της κίνησης κάνει ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση προς την κατεύθυνση y . Εκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις μπορεί να υποθέσει κανείς ότι το σωματίο ακολουθεί περίπου τον οδηγό της κίνησης. Άρα η λύση αυτή υποδεικνύει ότι η κίνηση του σωματίου είναι περιορισμένη προς την κατεύθυνση x (αφού το R_x είναι σταθερό στον χρόνο), ενώ το σωματίο κινείται προς την κατεύθυνση y .

Εδώ πρέπει να σημειώσει κανείς το παράδοξο της κίνησης του φορτίου κάθετα ακριβώς στην διεύθυνση της ηλεκτρικής δύναμης (δηλαδή κατά την κατεύθυνση y). Σύμφωνα με όσα είμαστε συνηθισμένοι να σκεφτόμαστε, με βάση τους νόμους του Νεύτωνα, η επιτάχυνση είναι κατά την κατεύθυνση της δύναμης και άρα και η κίνηση θα περιμέναμε να ήταν προς την ίδια κατεύθυνση. Στο πρόβλημα όμως αυτού του κεφαλαίου το μαγνητικό πεδίο φαίνεται να έχει τελείως ανατρέψει αυτή την λογική.

Άσκηση. (α) Βρείτε την τροχιά του σωματίου [$x = x(t)$, $y = y(t)$] χρησιμοποιώντας τις παραπάνω λύσεις.

(β) Βρείτε αριθμητικά και σχεδιάστε την τροχιά του σωματίου για κάποιες συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες της επιλογής σας.

(γ) Βρείτε μια ειδική λύση η οποία περιγράφει ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση του σωματίου.

Η ενέργεια του σωματίου βρίσκεται με την συνήθη μέθοδο

$$\begin{aligned} W &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y) \Rightarrow \\ (10.3) \quad W &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - qEx. \end{aligned}$$

10.2. Επίδραση δυνάμεων τριβής. Για να μελετήσουμε την επίδραση δυνάμεων τριβής στο σύστημα πρέπει να προσθέσουμε έναν κατάλληλο όρο στις Εξ. (10.2). Αυτός μπορεί να έχει την μορφή $-\alpha\dot{x}$ για την πρώτη εξίσωση και $-\alpha\dot{y}$ για την δεύτερη, όπου α είναι μία σταθερά που ονομάζεται σταθερά τριβής. Γράφουμε τις νέες εξισώσεις ως εξής

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} + qE - \alpha\dot{x} \\ (10.4) \quad m\ddot{y} &= -qB\dot{x} - \alpha\dot{y}. \end{aligned}$$

Μπορούμε να γράψουμε τις Εξ. (10.4) και ως εξής:

$$\dot{R}_x = -\frac{\alpha}{qB}\dot{y}, \quad \dot{R}_y = -\frac{E}{B} + \frac{\alpha}{qB}\dot{x}.$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων θα μπορούσε να λυθεί, όμως εδώ θα περιορισθούμε στην συμπεριφορά του συστήματος για μεγάλους χρόνους. Στην τελική κατάσταση ($t \rightarrow \infty$) θα υποθέσουμε ότι έχουμε $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$ και άρα έχουμε για τα \dot{x}, \dot{y} τις εξής αλγεβρικές εξισώσεις

$$\dot{y} - \alpha/(qB)\dot{x} = -E/B, \quad \dot{x} + \alpha/(qB)\dot{y} = 0$$

και άρα

$$\dot{y} = \frac{-(qE)(qB)}{(qB)^2 + \alpha^2}, \quad \dot{x} = \frac{\alpha(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}.$$

Αυτές οι εξισώσεις δίνουν την κίνηση του σωματίου.

Για λόγους ομοιομορφίας με τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων θα μελετήσουμε τον οδηγό της κίνησης. Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα για τα \dot{x}, \dot{y} στις εξισώσεις κίνησης για να βρούμε τελικά

$$\dot{R}_x = \frac{\alpha(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}, \quad \dot{R}_y = \frac{-(qB)(qE)}{(qB)^2 + \alpha^2}.$$

Αυτές οι εκφράσεις συμπίπτουν με τις παραπάνω για τα \dot{x}, \dot{y} .

Αν θεωρήσουμε τώρα ως ταχύτητα του σωματίου το διάνυσμα $\mathbf{V} = (\dot{R}_x, \dot{R}_y)$ παρατηρούμε ότι το σωματίο κινείται υπό γωνία δ ως προς τον άξονα x , όπου

$$\tan \delta = \frac{\dot{R}_y}{\dot{R}_x} = -\frac{qB}{\alpha}.$$

Για σταθερά τριβής $\alpha \rightarrow 0$ βρίσκουμε $\delta = \pi/2$, δηλαδή κίνηση κατά τον άξονα y όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο. Όταν όμως έχουμε τριβή ($\alpha \neq 0$) τότε το σωματίο κινείται υπό γωνία $0 < \delta < \pi/2$.

Άσκηση. Βρείτε αριθμητικά και σχεδιάστε την τροχιά του σωματίου για κάποιες συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες της επιλογής σας και για μία σταθερά τριβής $\alpha \neq 0$.

Άσκηση. Μελετήστε εκτενέστερα το σύστημα των εξισώσεων (10.4).

11. ΚΙΝΗΣΗ ΖΕΥΓΟΣ ΦΟΡΤΙΩΝ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Γιά να περιγράψουμε πάνω από ένα φορτισμένα σωματία τα οποία βρίσκονται σε μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{z}$ θα πρέπει να γενικεύσουμε την Lagrangian (10.1). Εδώ θεωρούμε δύο σωματία με ίδια μάζα m , φορτία q_1, q_2 και διανύσματα θέσης $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ αντιστοίχως. Μπορούμε να γράψουμε την εξής Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{B}{2} [q_1(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) + q_2(x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2)] - V(x_1, y_1, x_2, y_2).$$

Η ίδια έκφραση γράφεται και ως εξής

$$(11.1) \quad L = \frac{1}{2} m \sum_i (\dot{x}_i\dot{x}_i + \dot{y}_i\dot{y}_i) + \frac{B}{2} \sum_i q_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) - V(x_i, y_i)$$

όπου ο δείκτης i παίρνει τις τιμές $i = 1, 2$. Στα επόμενα θα θεωρήσουμε δυναμική ενέργεια $V(x_i, y_i)$ που περιγράφει αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο φορτίων και είναι της μορφής

$$V = V(\ell), \quad \ell := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

όπου ℓ είναι η απόσταση μεταξύ των δύο φορτίων.

Αφού έχουμε τέσσερις μεταβλητές μπορούμε να γράψουμε τέσσερις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}_1 - q_1 B y_1) = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}_2 - q_2 B y_2) = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y_1} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}_1 + q_1 B x_1) = -\frac{\partial V}{\partial y_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y_2} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}_2 + q_2 B x_2) = -\frac{\partial V}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι για τα δυναμικά αλληλεπίδρασης που θεωρούμε εδώ ισχύει $\partial V/\partial x_1 = -\partial V/\partial x_2$ και $\partial V/\partial y_1 = -\partial V/\partial y_2$. Άρα, αν προσθέσουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις

και τις δύο πρώτες βρίσκουμε τις εξής δύο σχέσεις

$$\frac{d}{dt} \left(x_1 + x_2 + \frac{\dot{y}_1}{\omega_1} + \frac{\dot{y}_2}{\omega_2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(y_1 + y_2 - \frac{\dot{x}_1}{\omega_1} - \frac{\dot{x}_2}{\omega_2} \right) = 0, \quad \omega_i := \frac{q_i B}{m}.$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον οδηγό της κίνησης (R_x, R_y) για ένα ζεύγος φορτίων ως

$$R_x := \frac{1}{2} (x_1 + x_2) + \frac{\dot{y}_1}{2\omega_1} + \frac{\dot{y}_2}{2\omega_2}, \quad R_y := \frac{1}{2} (y_1 + y_2) - \frac{\dot{x}_1}{2\omega_1} - \frac{\dot{x}_2}{2\omega_2}$$

και οι παραπάνω εξισώσεις αποδεικνύουν ότι αυτές οι δύο ποσότητες είναι διατηρήσιμες.

Τέλος μπορούμε να βρούμε την ενέργεια του συστήματος

$$W = \frac{1}{2} m \sum_i (\dot{x}_i \dot{x}_i + \dot{y}_i \dot{y}_i) + V(x_i, y_i)$$

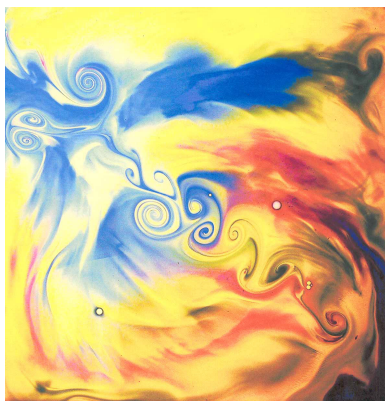
η οποία είναι επίσης διατηρήσιμη ποσότητα.

Άσκηση. Μελετήστε αναλυτικά το σύστημα των εξισώσεων για ζεύγος φορτίων σε σταθερό μαγνητικό πεδίο (επιλέξτε $V = \ln(r)$). Λύστε αριθμητικά τις εξισώσεις για δεδομένες αρχικές συνθήκες.

12. ΔΙΝΕΣ

Το σύστημα που μελετήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους συζητήθηκε μεν στα πλαίσια της θεωρίας της ηλεκτροδυναμικής, μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και για την μοντελοποίηση ενός σημαντικού αριθμού φυσικών συστημάτων τα οποία δεν σχετίζονται με το αρχικό πρόβλημα της ηλεκτροδυναμικής. Την πιο ευρεία εφαρμογή ως μοντέλο βρίσκει μάλλον στην περιγραφή της δυναμικής δινών (ορτίες).

12.1. Συνήθεις δίνες σε ρευστά. Δίνες εμφανίζονται και παίζουν σημαντικό ρόλο σε πάρα πολλά φυσικά συστήματα. Τα πιο γνωστά τέτοια συστήματα είναι τα ρευστά. Στην μηχανική ρευστών είναι γνωστό ότι οι δίνες (fluid vortices) παίζουν κεντρικό ρόλο στην περιγραφή και κατανόηση τόσο την κίνησης των ρευστών όσο και πιο περίπλοκων φαινομένων όπως η τυρβώδης ροή.



ΣΧΗΜΑ 5. Φωτογραφία δινών και ζευγών δινών οι οποίες δημιουργήθηκαν από την κίνηση ενός σωματίου στην επιφάνεια υγρού.

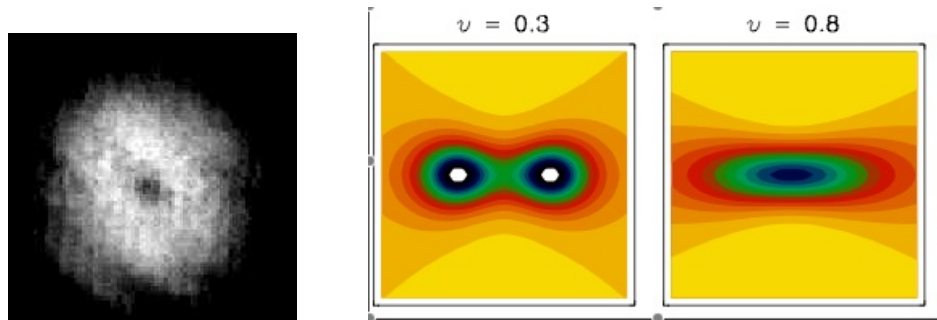
Η περιγραφή της κίνησης των ρευστών και άρα και της δυναμικής των δινών βασίζεται στις εξισώσεις της μηχανικής ρευστών οι οποίες είναι μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Απλοποίηση της περιγραφής δινών προκύπτει στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι κάθε δίνη είναι μακριά από κάθε άλλη και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε προσεγγιστικά ότι όλη η δομή βρίσκεται σε ένα σημείο. Επιπλέον, μπορεί ναδειχθεί ότι για μία δίνη οι ποσότητες

$$(12.1) \quad I_x = \int x\gamma \, dx dy, \quad I_y = \int y\gamma \, dx dy$$

είναι διατηρήσιμες. Στις σχέσεις αυτές γ είναι η vorticity το ολοκλήρωμα της οποίας $\Gamma := \int \gamma \, dx dy$ δίνει την ισχύ της δίνης. Εφόσον θεωρούμε την δίνη σημειακή τα παραπάνω ολοκληρώματα δίνουν ουσιαστικά την θέση της σημειακής δίνης πολλαπλασιασμένη με την ισχύ της.

Μετά από τις παραπάνω παρατηρήσεις βλέπουμε ότι οι διατηρήσιμες ποσότητες (12.1) είναι παρόμοιες με τις (9.4) τις οποίες είδαμε στην περίπτωση του ηλεκτρικού φορτίου σε μαγνητικό πεδίο. Οι διαφορές μεταξύ τους είναι ότι οι τελευταίες περιέχουν και χρονικές παραγώγους της θέσης ενώ οι πρώτες δεν περιέχουν τέτοιες. Επίσης, τον ρόλο του γινομένου του φορτίου με το μαγνητικό πεδίο qB στις Εξ. (9.4) παίζει, στην περίπτωση των δινών, η ισχύς της δίνης Γ . Η μαθηματική λοιπόν περιγραφή του ηλεκτρικού φορτίου σε μαγνητικό πεδίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο για την περιγραφή της δυναμικής των δινών σε ρευστά.

12.2. Δίνες σε υπερρευστά. Ορισμένα ρευστά επιδεικνύουν ασυνήθιστες ιδιότητες όταν βρίσκονται σε ιδιαίτερα χαμηλές θερμοκρασίες. Η πιο εντυπωσιακή ίσως ιδιότητα τους είναι ότι ρέουν χωρίς η κίνησή τους να επιβραδύνεται από φαινόμενα τριβής. Υγρά που παρουσιάζουν αυτή την ιδιότητα ονομάζονται υπερρευστά. Τα σημαντικότερα υπερρευστά είναι το Ήλιο σε θερμοκρασίες $T < 2.7$ Kelvin το οποίο είναι τότε σε υγρή κατάσταση. Επίσης, υπερρευστά είναι οι ατμοί αλκαλικών μετάλλων (Li, Na, K, Rb, Cs) οι οποίοι παγιδεύονται με μαγνητικά πεδία και ψύχονται σε θερμοκρασίες $T \sim 10 - 100$ nanoKelvin με οπτικά (LASER) και άλλα μέσα.



ΣΧΗΜΑ 6. [Αριστερά:] Φωτογραφία δίνης σε υπερρευστό (το λευκό χρώμα σημαίνει μέγιστη πυκνότητα και το μαύρο μηδενική πυκνότητα του υπερρευστού). [Δεξιά:] Αριθμητική προσομοίωση ζευγών δινών σε υπερρευστό (ο χρωματικός κώδικας αποδίδει την πυκνότητα του υπερρευστού).

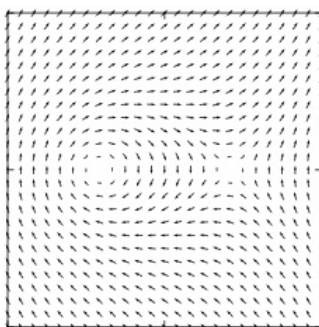
Μία επιπλέον ιδιότητα των υπερρευστών είναι ότι οι δίνες που δημιουργούνται σε αυτά έχουν ισχύ η οποία είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας βασικής ποσότητας ισχύος. Τέτοιες δίνες ονομάζονται κβαντισμένες (quantized vortices). Η ιδιότητα αυτή των δινών σχετίζεται

πάντως με την ιδιότητα της ροής χωρίς τριβή. Τα υπερρευστά και οι δίνες τους μελετώνται με την βοήθεια των νόμων της κβαντικής φυσικής. Περιγράφονται, σε ορισμένες περιπτώσεις, από μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές διαφέρουν πολύ από εκείνες για τα συνήθη ρευστά που αναφέραμε παραπάνω.

Αν θεωρήσουμε τις υπερρευστές δίνες σαν σημειακές τότε μπορούμε να μελετήσουμε προσεγγιστικά την δυναμική τους απλοποιώντας σημαντικά το πρόβλημα. Ένα σημαντικό σημείο είναι ότι η ισχύς των υπερρευστών δινών μπορεί να περιγραφεί σαν ένα τοπολογικό χαρακτηριστικό του πεδίου που περιγράφει το υπερρευστό (αυτό είναι ένα μιγαδικό πεδίο το οποίο ονομάζεται σε αυτές τις περιπτώσεις *κυματοσυνάρτηση*). Διατηρήσιμες ποσότητες ανάλογες των (12.1) υπάρχουν και σε αυτή την περίπτωση, αλλά τώρα η ολική ισχύς $\Gamma := \int \gamma dx dy$ παίρνει διάκριτες τιμές και συνδέεται με τοπολογικά χαρακτηριστικά της ροής του υπερρευστού.

Μετά από τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε ότι η μαθηματική περιγραφή του ηλεκτρικού φορτίου σε μαγνητικό πεδίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο για την περιγραφή της δυναμικής των υπερρευστών δινών.

12.3. Μαγνητικές δίνες. Παρά το ότι συνδέουμε συνήθως τις δίνες με τα ρευστά, η αλήθεια είναι ότι η δίνες, ως μαθηματικές δομές διανυσματικών πεδίων, εμφανίζονται σε πολλά διαφορετικά συστήματα. Ένα παράδειγμα είναι τα μαγνητικά υλικά στα οποία έχουμε τις λεγόμενες *μαγνητικές δίνες*.



ΣΧΗΜΑ 7. Αριθμητική προσομοίωση ζεύγους μαγνητικών δινών (τα βελάκια αποδίδουν τον προσανατολισμό των μαγνητικών ροπών των ατόμων).

Εκεί προκύπτουν από την θεωρία διατηρήσιμες ποσότητες της μορφής

$$I_x = \int xq \, dx dy, \quad I_y = \int yq \, dx dy$$

οι οποίες μοιάζουν με τις (9.4) και (12.1). Όμως στην περίπτωση των μαγνητικών δινών δεν υπάρχει ροή πραγματικού ρευστού αλλά το q δίνει κάποια τοπολογικά χαρακτηριστικά της τοπικής μαγνήτισης (η οποία είναι ένα διανυσματικό πεδίο) του μαγνήτη. Η ισχύς της δίνης είναι $Q = \int q \, dx dy$ ακέραιο πολλαπλάσιο μιάς βασικής ποσότητας. Μπορεί ναδειχθεί ότι, στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι οι μαγνητικές δίνες είναι σημειακές, η δυναμική τους συμπεριφορά μοντελοποιείται από εξισώσεις ανάλογες με αυτές που χρησιμοποιήσαμε για την μαθηματική περιγραφή ηλεκτρικών φορτίων σε μαγνητικό πεδίο.

13. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΔΙΝΩΝ

13.1. **Μία απομονωμένη δίνη.** Η σύγκριση των σχέσεων (9.4) για τα ηλεκτρικά φορτία και (12.1) για τις δίνες δείχνει ότι στις δίνες δεν έχουμε χρονική παράγωγο κάποιας μεταβλητής. Για να αναπτύξουμε λοιπόν το κατάλληλο μοντέλο για την περιγραφή τους θεωρούμε την Lagrangian (9.2) χωρίς τους όρους με τις χρονικές παραγώγους \dot{x}^2, \dot{y}^2 . Για την περίπτωση *μαγνητικής δίνης* θέτουμε τον ακέραιο αριθμό Q στην θέση του (qB) και παίρνουμε την Lagrangian η οποία περιγράφει την δυναμική μίας δίνης:

$$(13.1) \quad L = \frac{Q}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Σημειώστε ότι ο αριθμητικός συντελεστής που εμφανίζεται στην Lagrangian δεν πρόκειται να εμφανιστεί στις εξισώσεις. Όμως, αυτός περιλαμβάνεται στην Lagrangian (13.1) για λόγους συνέπειας με την πλήρη (μερική διαφορική) εξίσωση κίνησης της δίνης (η πλήρης εξήγηση για τον αριθμητικό συντελεστή είναι πέραν του σκοπού των σημειώσεων).

Οι εξισώσεις Lagrange για τις μεταβλητές x, y είναι

$$(13.2) \quad \begin{aligned} -\frac{Q}{2}\dot{y} &= \frac{Q}{2}\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = 0 \\ \frac{Q}{2}\dot{x} &= -\frac{Q}{2}\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = 0, \end{aligned}$$

όπου θεωρήσαμε την περίπτωση $Q \neq 0$. Αυτές είναι ανάλογες των εξισώσεων (9.3) αλλά εδώ λείπουν οι δεύτερες χρονικές παράγωγοι, πράγμα που δίνει μία πολύ απλή μορφή στις εξισώσεις (13.2).

Οι νόμοι διατήρησης (13.2) δίνουν την λύση $x = const., y = const.$ και οδηγούν στο συμπέρασμα ότι μία απομονωμένη δίνη (που δεν δέχεται δυνάμεις) είναι πάντα στάσιμη σε ένα μαγνητικό υλικό.

Άσκηση. Γράψτε την Lagrangian για μία μαγνητική δίνη σε εξωτερικό πεδίο. Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης. [Δουλέψτε όπως στο κεφάλαιο 10 των σημειώσεων.]

13.2. **Ζεύγος αλληλεπιδρώντων δινών.** Επεκτείνουμε την Lagrangian (13.1) ώστε να περιγράφει δύο αλληλεπιδρώσες δίνες. Άρα χρησιμοποιούμε δύο ζεύγη μεταβλητών $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ και επίσης δύο ακεραίους Q_i . Επίσης χρειαζόμαστε ένα δυναμικό αλληλεπίδρασης $V(\ell)$ όπως και στην περίπτωση της Lagrangian (10.1). Στην παρούσα περίπτωση η ενεργειακή κατάσταση δύο μαγνητικών δινών υποδεικνύει την δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης

$$V(\ell) = -\kappa_1\kappa_2 \ln(\ell), \quad \ell := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

(Η πλήρης επεξήγηση αυτής της επιλογής ξεφεύγει από τους στόχους αυτών των σημειώσεων.) Έτσι προκύπτει τελικά η ακόλουθη Lagrangian

$$L = \frac{Q_1}{2} (x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) + \frac{Q_2}{2} (x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2) + \kappa_1\kappa_2 \ln(\ell).$$

Τα σύμβολα στην τελευταία εξίσωση επεξηγούνται ως εξής:

- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ είναι οι θέσεις των δύο δινών.
- Q_1, Q_2 είναι ακεραίοι αριθμοί που χαρακτηρίζουν την δομή των δύο δινών.

- ο κ_1, κ_2 είναι ακέραιοι αριθμοί (οι οποίοι σχετίζονται με ειδικότερα χαρακτηριστικά της δομής κάθε δίνης) για τους οποίους ισχύει $Q_i = \pm \kappa_i$ και όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί είναι από φυσική άποψη πραγματοποιήσιμοι. Άρα υπάρχουν τέσσερις δυνατές περιπτώσεις για τις δύο μαγνητικές δίνες με δεδομένα Q_1, Q_2 .

Θα ασχοληθούμε στα επόμενα με την περίπτωση $\kappa_1 = Q_1, \kappa_2 = Q_2$, άρα γράφουμε

$$(13.3) \quad L = \frac{Q_1}{2} (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + \frac{Q_2}{2} (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) + Q_1 Q_2 \ln(\ell).$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$(13.4) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow \dot{y}_1 = Q_2 \frac{x_2 - x_1}{\ell^2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x_2} \Rightarrow \dot{y}_2 = Q_1 \frac{x_1 - x_2}{\ell^2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y_1} \Rightarrow \dot{x}_1 = Q_2 \frac{y_1 - y_2}{\ell^2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y_2} \Rightarrow \dot{x}_2 = Q_1 \frac{y_2 - y_1}{\ell^2}. \end{aligned}$$

Άσκηση. Γράψτε τις Εξ. (13.4) χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές μεταβλητές $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$ [Υπόδειξη: δείτε το αποτέλεσμα στο βιβλίο P.K. Newton, “*The N-Vortex Problem*”, (Springer, 2001)]. □

13.2.1. *Διατηρήσιμες ποσότητες.* Για το μοντέλο (13.3) έχουμε τις ακόλουθες διατηρήσιμες ποσότητες.

Ενέργεια. Την βρίσκουμε με τον συνήθη τρόπο

$$(13.5) \quad W = x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + y_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - L = -Q_1 Q_2 \ln(\ell).$$

Οδηγός της κίνησης. Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (13.4) βρίσκουμε ότι $Q_1 \dot{x}_1 + Q_2 \dot{x}_2 = 0$ και $Q_1 \dot{y}_1 + Q_2 \dot{y}_2 = 0$, δηλαδή έχουμε τις διατηρήσιμες ποσότητες

$$(13.6) \quad I_x := Q_1 x_1 + Q_2 x_2, \quad I_y := Q_1 y_1 + Q_2 y_2.$$

Παρατηρούμε ότι αυτές οι ποσότητες είναι ανάλογες του οδηγού της κίνησης των Εξ. (9.4). (Πάντως, για να αντιστοιχούν στον οδηγό της κίνησης πρέπει να κανονικοποιηθούν κατάλληλα όπως ζητάει η επόμενη άσκηση.) Επίσης είναι οι διατηρήσιμες ποσότητες οι οποίες αναφέρθηκαν στον προηγούμενο κεφάλαιο για μαγνητικές δίνες και αποτέλεσαν τον βασικό οδηγό ο οποίος μας οδήγησε στην μελέτη του μοντέλου (13.3).

Άσκηση. Με κατάλληλη κανονικοποίηση των σχέσεων (13.6) γράψτε ποσότητα η οποία να δίνει με συνέπεια έναν ορισμό της θέσης του ζεύγους δινών (δηλ., τον οδηγό της κίνησης). Σε ποιά περίπτωση αυτό δεν είναι δυνατόν; □

Στροφορμή. Για το μοντέλο που μελετάμε είναι επίσης γνωστό ότι η ποσότητα

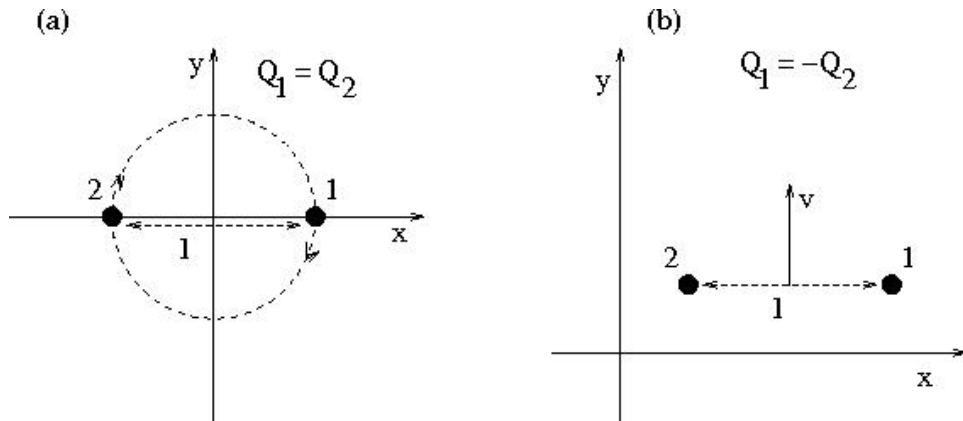
$$(13.7) \quad M = \frac{Q_1}{2} (x_1^2 + y_1^2) + \frac{Q_2}{2} (x_2^2 + y_2^2)$$

είναι διατηρήσιμη. Αυτό αποδεικνύεται με άμεσο υπολογισμό

$$\frac{dM}{dt} = Q_1(x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1) + Q_2(x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2) = 0$$

όπου για τις χρονικές παραγώγους χρησιμοποιήσαμε τις Εξ. (13.4).

Στα επόμενα θα μελετήσουμε δύο ειδικές περιπτώσεις χρησιμοποιώντας τις διατηρήσιμες ποσότητες τις οποίες είδαμε σε αυτήν την παράγραφο.



ΣΧΗΜΑ 8. (a) Ένα ζεύγος δινών με $Q_1 = Q_2 = 1$ κάνει κυκλική κίνηση (σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή) με γωνιακή συχνότητα $\omega = 2/l^2$. (b) Ένα ζεύγος δινών με $Q_1 = -Q_2 = 1$ κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $v = 1/l$. (l είναι η απόσταση μεταξύ των δινών.)

13.2.2. Περίπτωση $Q_1 = Q_2 = 1$. Έχουμε τις ακόλουθες διατηρήσιμες ποσότητες

$$\begin{aligned} W &= \ln(\ell) \\ I_x &= x_1 + x_2 \\ I_y &= y_1 + y_2 \\ M &= \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2). \end{aligned}$$

Οι I_x και I_y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και επίσης η τιμή τους μπορεί να αλλάξει με απλή μετάθεση της αρχής του συστήματος συντεταγμένων. Εκλέγουμε λοιπόν την αρχή του συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε $I_x = 0$, $I_y = 0$. Άρα έχουμε τις

$$(13.8) \quad x_2 = -x_1, \quad y_2 = -y_1.$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης η απόσταση μεταξύ των δύο δινών γράφεται $\ell = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$. Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$(13.9) \quad W = \ln(\ell) \Rightarrow \ell = \ell_0 (= \text{const.}).$$

Άσκηση. Δείξτε ότι η διατήρηση της στροφορμής δεν δίνει επιπλέον αποτελέσματα από τα παραπάνω.

Λύση: Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (13.8) γράφουμε την στροφορμή ως

$$M = x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{2} \ell^2 \Rightarrow \ell = \ell_0 (= \text{const.}).$$

Δηλαδή βρίσκουμε ένα αποτέλεσμα το οποίο ήδη γνωρίζουμε. \square

Συμπερασματικά, η Εξ. (13.8) δείχνει ότι οι δίνες βρίσκονται (για όλους τους χρόνους) εκατέρωθεν ενός σημείου (σε αντιδιαμετρικές θέσεις) το οποίο έχει εκλεγεί ως αρχή των αξόνων, ενώ η Εξ. (13.9) δείχνει ότι κινούνται σε κύκλο με διάμετρο ℓ_0 (και κέντρο την αρχή των αξόνων).

Γιά να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής εργαζόμαστε ως εξής. Θεωρούμε τις δύο από τις Εξ. (13.4) για τις μεταβλητές x_1, y_1 και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις τις οποίες βρήκαμε από τους νόμους διατήρησης:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= Q_2 \frac{x_2 - x_1}{\ell^2} \Rightarrow \dot{y}_1 = -\frac{2x_1}{\ell_0^2} \\ \dot{x}_1 &= Q_2 \frac{y_1 - y_2}{\ell^2} \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{2y_1}{\ell_0^2} \end{aligned}$$

Παίρνοντας την χρονική παράγωγο της πρώτης και χρησιμοποιώντας την δεύτερη βρίσκουμε

$$\ddot{y}_1 = -\frac{2}{\ell_0^2} \dot{x}_1 \Rightarrow \ddot{y}_1 + \frac{4}{\ell_0^4} y_1 = 0.$$

Μία ανάλογη εξίσωση μπορούμε να εξάγουμε και για την x_1 . Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν περιοδική κίνηση με συχνότητα

$$\omega = \frac{2}{\ell_0^2}.$$

Άρα τα φορτία κινούνται σε κυκλική τροχιά με συχνότητα αντιστόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους αποστάσεως.

Άσκηση. Έστω δίνες με $Q_1 = Q_2 = 1$ οι οποίες βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $(x_1, y_1) = (1, 0)$ και $(x_2, y_2) = (-1, 0)$. Βρείτε την τροχιά τους.

Άσκηση. Δείξτε ότι για $Q_1 \neq 0 \neq Q_2$ οι Εξ. (13.4) δεν έχουν στατικές λύσεις, δηλ., δεν έχουν λύσεις της μορφής $(x_1, y_1) = \text{const.}$, $(x_2, y_2) = \text{const.}$

Άσκηση. Γράψτε τις Εξ. (13.4) σε πολικές συντεταγμένες για $Q_1 = Q_2$. Βρείτε την συχνότητα περιστροφής του ζεύγους.

13.2.3. Περίπτωση $Q_1 = -Q_2 = 1$. Έχουμε τις ακόλουθες διατηρήσιμες ποσότητες

$$\begin{aligned} W &= \ln(\ell) \\ I_x &= x_1 - x_2 \\ I_y &= y_1 - y_2 \\ M &= \frac{1}{2} [(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)]. \end{aligned}$$

Με κατάλληλη στροφή του συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να εκλέξουμε τον άξονα y κάθετα στην γραμμή που ενώνει τις δύο δίνες και άρα να επιτύχουμε την

$$(13.10) \quad y_1 = y_2 \Rightarrow I_y = 0.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\ell = \sqrt{I_x^2 + I_y^2},$$

άρα η απόσταση ℓ μεταξύ των δινών είναι σταθερή (έστω $\ell = \ell_0$) και επίσης η πρώτη διατηρήσιμη ποσότητα περιέχεται στις δύο επόμενες. Μάλιστα, αφού έχουμε εκλέξει $I_y = 0$ έχουμε

$$\ell^2 = \ell_0^2 = I_x^2,$$

Για την τελευταία διατηρήσιμη ποσότητα έχουμε

$$M = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \frac{I_x}{2}(x_1 + x_2),$$

ώστε η $x_1 + x_2$ είναι επίσης διατηρήσιμη ποσότητα. Άρα έχουμε

$$(13.11) \quad x_1 - x_2 = \text{const.}, \quad x_1 + x_2 = \text{const.} \Rightarrow x_1 = \text{const.}, \quad x_2 = \text{const.}$$

δηλ., οι συντεταγμένες x_1, x_2 είναι σταθερές κατά την διάρκεια της κίνησης.

Συμπερασματικά, η Εξ. (13.11) δείχνει ότι το ζεύγος δινών δεν κινείται κατά τον άξονα x (δηλ., κατά την διεύθυνση της γραμμής που τις συνδέει) και άρα είναι δυνατόν να κινούνται μόνο κατά την κατεύθυνση y (δηλ., κάθετα στην γραμμή που τις συνδέει).

Γιά να βρούμε την ταχύτητα κίνησης του ζεύγους εργαζόμαστε ως εξής. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα είναι $v = \dot{y}_1 = \dot{y}_2$ (αφού $y_1 = y_2$). Οπότε από την δεύτερη Εξ. (13.4) έχουμε

$$\dot{y}_2 = Q_1 \frac{x_1 - x_2}{\ell^2} \Rightarrow v = \frac{I_x}{\ell_0^2} \Rightarrow v = \frac{1}{I_x} \quad \text{ή} \quad v = \pm \frac{1}{\ell_0}.$$

Η ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της (σταθερής) απόστασης μεταξύ των δινών και είναι θετική ή αρνητική (προς τον θετικό ή αρνητικό άξονα y αντίστοιχα) αναλόγως με το πρόσημο της ποσότητας $I_x = x_1 - x_2$.

Άσκηση. Έστω δίνες με $Q_1 = -Q_2 = 1$ οι οποίες βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $(x_1, y_1) = (1, 0)$ και $(x_2, y_2) = (-1, 0)$. Βρείτε την τροχιά τους.

Άσκηση. Θεωρήστε την Lagrangian (11.1) και επαναλάβετε τα βήματα αυτού του κεφαλαίου για να βρείτε τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

14. ΚΡΥΣΤΑΛΛΙΚΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ

14.1. Πλέγμα Bravais. Απλές παρατηρήσεις μας λένε ότι πολλά υλικά έχουν κρυσταλλική δομή (π.χ., η ζάχαρη, το αλάτι, κλπ). Πειράματα έχουν δείξει ότι τα μέταλλα, όπως και τα περισσότερα στερεά υλικά, έχουν κρυσταλλική δομή η οποία οφείλεται στο ότι τα άτομα των υλικών είναι διατεταγμένα σε κανονικές αποστάσεις δημιουργώντας ένα τέλειο πλέγμα. Η ύπαρξη του πλέγματος (δηλ., η κρυσταλλική δομή των μετάλλων) έχει αποδειχθεί με κατ' ευθείαν παρατηρήσεις σε πρόσφατα πειράματα με τεχνολογίες που παρακολουθούν την περιοδική δομή των υλικών. Ιστορικά, η πρώτη απόδειξη δώθηκε από πειράματα κρυσταλλογραφίας ακτίνων X του Bragg.

Η έννοια του πλέγματος είναι θεμελιώδης για την μελέτη των στερεών. Η βασικότερη ίσως έννοια σε αυτήν την περιοχή είναι η έννοια του πλέγματος Bravais. Δίνουμε δύο ισοδύναμους ορισμούς του πλέγματος Bravais:

- (α) Μία άπειρη διάταξη σημείων η οποία είναι ακριβώς η ίδια από όποιο σημείο και αν ιδωθεί.
 (β) Το πλέγμα το οποίο αποτελείται από όλα τα σημεία με διάνυσμα θέσης

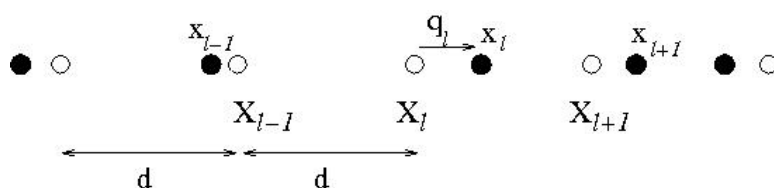
$$\mathbf{R} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3,$$

όπου $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ είναι τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και n_1, n_2, n_3 παίρνουν όλες τις ακέραιες τιμές.

Παραδείγματα πλεγμάτων Bravais μπορείτε να βρείτε σε όλα τα βιβλία φυσικής στερεάς κατάστασης (και αλλού). Στις τρεις διαστάσεις έχουμε το κυβικό πλέγμα bcc (body centered cubic), το πλέγμα fcc (face centered cubic) και άλλα. Στις δύο διαστάσεις έχουμε το τετραγωνικό πλέγμα, κλπ.

Για να περιγράψουμε ένα στερεό θεωρούμε ότι σε κάθε σημείο του πλέγματος έχουμε ένα άτομο, αλλά μπορούμε να έχουμε και πύο σύνθετες περιπτώσεις όπου σε κάθε σημείο του πλέγματος έχουμε δύο ή περισσότερα άτομα.

14.2. Μονοδιάστατος κρύσταλλος. Θεωρούμε ότι έχουμε ταυτόσημα άτομα σε ένα πλέγμα, το οποίο έχει τις ιδιότητες του πλέγματος Bravais, και είναι μονοδιάστατο. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μία αλυσίδα στην οποία οι αποστάσεις μεταξύ γειτονικών σημείων είναι ίσες.



ΣΧΗΜΑ 9. Οι θέσεις των ατόμων σε ένα μονοδιάστατο πλέγμα. Οι κύκλοι δίνουν τις θέσεις των ατόμων στην κατάσταση ισορροπίας. Οι μαυρισμένοι κύκλοι δίνουν τις θέσεις των ατόμων σε μία τυχαία στιγμή, όταν αυτά βρίσκονται σε κίνηση.

Ορίζουμε τις ακόλουθες μεταβλητές για κάθε πλεγματική θέση l :

X_l οι θέσεις ισορροπίας των ατόμων.

x_l οι θέσεις των ατόμων σε τυχούσα χρονική στιγμή (κατά την οποία μπορεί βέβαια να μην

είναι στην θέση ισορροπίας τους).

Θεωρούμε επίσης τις αποκλίσεις από τις θέσεις ισορροπίας $q_\ell = x_\ell - X_\ell$.

Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων έχει την γενική μορφή

$$V = V(\dots, x_{\ell-1}, x_\ell, x_{\ell+1}, \dots),$$

δηλαδή εξαρτάται από τις θέσεις των ατόμων. Η θέση ισορροπίας \mathbf{X} του συστήματος ορίζεται από την σχέση

$$(14.1) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_\ell} \right)_{\mathbf{X}} = 0, \quad \mathbf{X} := (X_1, X_2, \dots, X_\ell, \dots).$$

Αναπτύσσουμε το δυναμικό V σε σειρά Taylor μέχρι τον τετραγωνικό όρο

$$V = V(\dots, X_\ell + q_\ell, \dots) = V^0 + \sum_\ell V_\ell q_\ell + \frac{1}{2} \sum_\ell \sum_{\ell'} V_{\ell\ell'} q_\ell q_{\ell'} + \dots,$$

όπου ο δείκτης ℓ παίρνει τιμές από $-\infty$ έως ∞ και

$$V^0 := V(\mathbf{X}), \quad V_\ell := \left(\frac{\partial V}{\partial x_\ell} \right)_{\mathbf{X}}, \quad V_{\ell\ell'} := \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\ell \partial x_{\ell'}} \right)_{\mathbf{X}}.$$

Το V^0 είναι μία σταθερά και άρα θα μπορούσε να παραλειφθεί από την δυναμική ενέργεια. Οι ποσότητες V_ℓ μηδενίζονται βάσει του ορισμού (14.1) της θέσης ισορροπίας. Τελικά, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε για το δυναμικό την μορφή

$$(14.2) \quad U = \frac{1}{2} \sum_\ell \sum_{\ell'} V_{\ell\ell'} q_\ell q_{\ell'}.$$

14.3. Συνθήκες αναλλοίωτου. Φυσικές και μαθηματικές ιδιότητες του κρυστάλλου επιβάλλουν μία ειδικότερη μορφή των ποσοτήτων $V_{\ell\ell'}$. Αυτές οι ιδιότητες είναι οι ακόλουθες.

1) Η U δεν πρέπει να εξαρτάται από τον τρόπο αρίθμησης των σημείων. Δηλαδή, αν θέσουμε $\ell = 0$ σε οποιοδήποτε θέση της αλυσίδας δεν αλλάζει το αποτέλεσμα. Με άλλα λόγια, η μορφή του U είναι αμετάβλητη στην μετάθεση $\ell \rightarrow \ell + p$ (p ένας ακέραιος), ώστε $V_{\ell\ell'} = V_{\ell+p, \ell'+p}$. Η συνθήκη ικανοποιείται αν τα ℓ και ℓ' εμφανίζονται μόνο ως $\ell - \ell'$, δηλαδή

$$(14.3) \quad V_{\ell\ell'} = V_{\ell-\ell'}.$$

2) Δεν αλλάζει το αποτέλεσμα εάν μετράμε από δεξιά προς αριστερά ή αντίθετα. Η συνθήκη ικανοποιείται αν

$$(14.4) \quad V_{\ell-\ell'} = V_{\ell'-\ell}.$$

3) Μία συνολική μετατόπιση του κρυστάλλου δεν αλλάζει την ενέργεια του. Δηλαδή, αν θέσουμε για όλες τις μετατοπίσεις $q_\ell = \delta$ (δ μία σταθερά) θα έχουμε $U = 0$. Η συνθήκη δίνει την σχέση

$$\frac{1}{2} \left[\sum_\ell \sum_{\ell'} V_{\ell-\ell'} \right] \delta^2 = 0 \Rightarrow \sum_{\ell'} V_{\ell-\ell'} = 0,$$

η οποία ισχύει για κάθε ℓ . Γράφουμε τώρα $\sum_{\ell'} V_{\ell-\ell'} = V_0 + \sum'_{\ell'} V_{\ell-\ell'}$, όπου ο τόνος στο σύμβολο της άθροισης σημαίνει ότι αθροίζουμε σε όλες τις τιμές του ℓ' εκτός της $\ell' = 0$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω εξάγομε τελικά την σχέση

$$(14.5) \quad \sum_{\ell'} V_{\ell-\ell'} = -V_0.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (14.3), (14.4), (14.5) για να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης των ατόμων.

14.4. Εξισώσεις κίνησης. Η κινητική ενέργεια είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των ατόμων

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\ell} m \dot{q}_{\ell}^2.$$

Η Lagrangian είναι

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\ell} m \dot{q}_{\ell}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\ell} \sum_{\ell'} V_{\ell\ell'} q_{\ell} q_{\ell'}.$$

Οι εξισώσεις κίνησης για κάθε ένα από τα άτομα είναι

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow m \ddot{q}_n + \sum_{\ell'} V_{n\ell'} q_{\ell'} = 0, \quad n = -\infty, \dots, \infty.$$

Άσκηση. Βρείτε, γράφοντας αναλυτικά τις πράξεις, την προηγούμενη εξίσωση. \square

Χρησιμοποιούμε την πρώτη συνθήκη αναλλοίωτου (14.3) και βρίσκουμε

$$\sum_{\ell'} V_{n\ell'} q_{\ell'} = \sum_{\ell'} V_{n-\ell'} q_{\ell'}.$$

Χρησιμοποιούμε την τρίτη συνθήκη αναλλοίωτου (14.5) και έχουμε

$$\sum_{\ell'} V_{n-\ell'} q_{\ell'} = V_0 q_n + \sum_{\ell'} V_{n-\ell'} q_{\ell'} = - \left[\sum_{\ell'} V_{n-\ell'} \right] q_n + \sum_{\ell'} V_{n-\ell'} q_{\ell'} = \sum_{\ell'} V_{n-\ell'} (q_{\ell'} - q_n)$$

και επειδή για $\ell' = n$ έχουμε $V_{n-n}(q_n - q_n) = 0$, μπορούμε να γράψουμε τελικά

$$\sum_{\ell} V_{n\ell} q_{\ell} = \sum_{\ell} V_{n-\ell} (q_{\ell} - q_n).$$

Θέτουμε τώρα $n - \ell = p$ και χρησιμοποιούμε την δεύτερη σχέση αναλλοίωτου (14.4) (ώστε $V_{n-\ell} = V_{\ell-n}$ ή $V_p = V_{-p}$) για να βρούμε

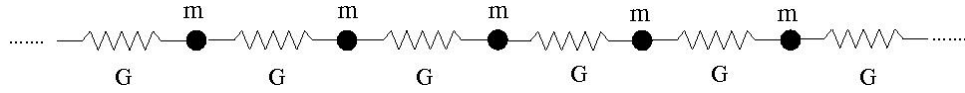
$$\sum_{\ell} V_{n\ell} q_{\ell} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} V_p (q_{n-p} - q_n) = \sum_{p=1}^{\infty} V_p (q_{n-p} - 2q_n + q_{n+p}).$$

Η εξίσωση κίνησης τελικά γράφεται στη μορφή

$$m \ddot{q}_n + \sum_{p=1}^{\infty} V_p (q_{n-p} - 2q_n + q_{n+p}) = 0.$$

15. ΑΠΕΙΡΗ ΑΛΥΣΙΔΑ ΜΑΖΩΝ ΣΤΖΕΥΓΜΕΝΩΝ ΜΕ ΕΛΑΤΗΡΙΑ

15.1. **Εξισώσεις κίνησης και λύσεις.** Έστω μία αλυσίδα ατόμων μάζας m που εκτείνεται από το $-\infty$ έως το ∞ . Η κάθε μάζα συνδέεται με ελατήρια (σταθεράς G) με τους άμεσους γείτονές της. Όλες οι μάζες είναι ίδιες καθώς και όλα τα ελατήρια.



ΣΧΗΜΑ 10. Άπειρη αλυσίδα ατόμων μάζας m τα οποία συνδέονται με ελατήρια σταθεράς G με τους άμεσους γείτονές τους. Οι αποστάσεις μεταξύ γειτονικών ατόμων στην θέση ισορροπίας είναι d .

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} m \dot{q}_{\ell}^2.$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$V = \dots + \frac{1}{2}G(q_{\ell} - q_{\ell-1})^2 + \frac{1}{2}G(q_{\ell+1} - q_{\ell})^2 + \dots = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} G (q_{\ell+1} - q_{\ell})^2.$$

Αν αναπτύξουμε τα τετράγωνα παρατηρούμε ότι αυτή η δυναμική ενέργεια είναι της μορφής που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η Lagrangian είναι

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} [m \dot{q}_{\ell}^2 - G (q_{\ell+1} - q_{\ell})^2].$$

Σύμφωνα με την παραπάνω Lagrangian έχουμε αλληλεπίδραση μόνο μεταξύ αμέσων γειτόνων.

Άσκηση. Δείξτε ότι αυτή η Lagrangian είναι της μορφής που μελετήσαμε στο προηγούμενο μάθημα και βρείτε τα V_p .

Οι εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας σε τυχούσα θέση n είναι

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} \Rightarrow m \ddot{q}_n = -G(q_n - q_{n-1}) + G(q_{n+1} - q_n) \Rightarrow$$

$$(15.1) \quad m \ddot{q}_n - G(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}) = 0, \quad n = -\infty, \dots, \infty.$$

Για να βρούμε λύσεις των παραπάνω εξισώσεων κάνουμε τα ακόλουθα βήματα. Υποθέτουμε εξάρτηση από τον χρόνο

$$(15.2) \quad q_n = a_n e^{-i\omega t},$$

όπου ω είναι συχνότητα που πρέπει να υπολογιστεί και a_n είναι μια μεταβλητή που εξαρτάται από την θέση του σωματίου. Η Εξ. (15.1) γίνεται

$$(15.3) \quad m\omega^2 q_n + G(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}) = 0.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι μπορούμε να βρούμε λύση της παραπάνω αν δοκιμάσουμε την μορφή

$$(15.4) \quad a_n = A e^{ikX_n} = A e^{iknd},$$

όπου A είναι μία σταθερά, $X_n = nd$ είναι η θέση ισορροπίας του σωματίου n και d είναι η απόσταση μεταξύ γειτονικών σωματίων. Η μορφή (15.4) είναι περιοδική στον χώρο και το k είναι ένας αριθμός που σχετίζεται με την περίοδο (αν λ είναι η περίοδος τότε $k = 2\pi/\lambda$).

Αντικαθιστούμε την (15.4) στην Εξ. (15.3) η οποία δίνει

$$m\omega^2 + G(e^{ikd} - 2 + e^{-ikd}) = 0 \Rightarrow m\omega^2 + 2G[\cos(kd) - 1] = 0.$$

Εδώ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\sin^2 \phi/2 = (1 - \cos \phi)/2$ και έχουμε τελικά

$$(15.5) \quad \omega^2 = \frac{4G}{m} \sin^2 \left(\frac{kd}{2} \right),$$

η οποία δίνει την σχέση μεταξύ της συχνότητας ω και του κυματάριθμου k και λέγεται *σχέση διασποράς*.

Συνδυάζοντας τις Εξ. (15.2) και (15.4) έχουμε την λύση

$$(15.6) \quad q_n = A e^{i(knd - \omega t)}.$$

Το A είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Είναι σαφές ότι οι λύσεις (15.6) παριστάνουν κύματα.

15.2. Παρατηρήσεις. Για την κατανόηση των λύσεων (15.6) των εξισώσεων (15.1) έχουμε τις εξής παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 1: Βρίσκουμε ότι

$$q_{n+1} = A e^{i[kd(n+1) - \omega t]} = A e^{i[knd - \omega t]} e^{ikd} = q_n e^{ikd},$$

άρα kd είναι η διαφορά φάσης μεταξύ γειτονικών σωματίων.

Αν λ είναι το μήκος κύματος τότε $k = 2\pi/\lambda$. Στην περίπτωση $k \rightarrow 0$, η παραπάνω διαφορά φάσης $kd \rightarrow 0$ και το μήκος κύματος πηγαίνει στο άπειρο.

Στην περίπτωση $kd = \pi \Rightarrow k = \pi/d$ βρίσκουμε $q_n = A e^{i(n\pi - \omega t)} = (-1)^n A e^{-i\omega t}$, δηλαδή όλα τα σωματάρια ταλαντώνονται με μια συχνότητα ω αλλά γειτονικά σωματάρια έχουν αντίθετες αποκλίσεις $\pm A$. Από την σχέση διασποράς βρίσκουμε για την συχνότητα $\omega^2(k = \pi/d) = 4G/m$.

Παρατήρηση 2: Για κάθε k έχουμε ως λύση των εξισώσεων ένα κύμα με συχνότητα ταλάντωσης που δίνεται από την σχέση διασποράς (15.5). Αυτή είναι η συχνότητα ταλάντωσης κάθε σωματίου για την συγκεκριμένη λύση.

Παρατήρηση 3: Η φάση του κύματος στην θέση n είναι $\phi := knd - \omega t = kX_n - \omega t$. Η φάση αυτή καθορίζει πλήρως την τιμή της κυματικής λύσης (15.6). Η φάση διαδίδεται. Για να βρούμε την ταχύτητα διάδοσης της φάσης (και του κύματος) θεωρούμε την φάση $\phi = kX_{n_1} - \omega t_1$ στην θέση n_1 την στιγμή t_1 και επίσης την ίδια φάση σε μία μεταγενέστερη στιγμή t_2 σε μία διαφορετική θέση n_2 , άρα γράφουμε $\phi = kX_{n_2} - \omega t_2$. Βρίσκουμε

$$kX_{n_1} - \omega t_1 = kX_{n_2} - \omega t_2 \Rightarrow \frac{X_{n_2} - X_{n_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k}.$$

Στην τελευταία σχέση το v_ϕ δηλώνει την ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η φάση.

Για παράδειγμα, αν πάρουμε $k \rightarrow 0$ έχουμε $\sin(kd/2) \approx kd/2$, άρα

$$\omega^2 = \frac{4G}{m} \frac{k^2 d^2}{4} \Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{G}{m} d^2 \Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{G}{m}} d,$$

η οποία είναι μάλιστα η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο στερεό.

Παρατήρηση 4: Βλέπουμε ότι

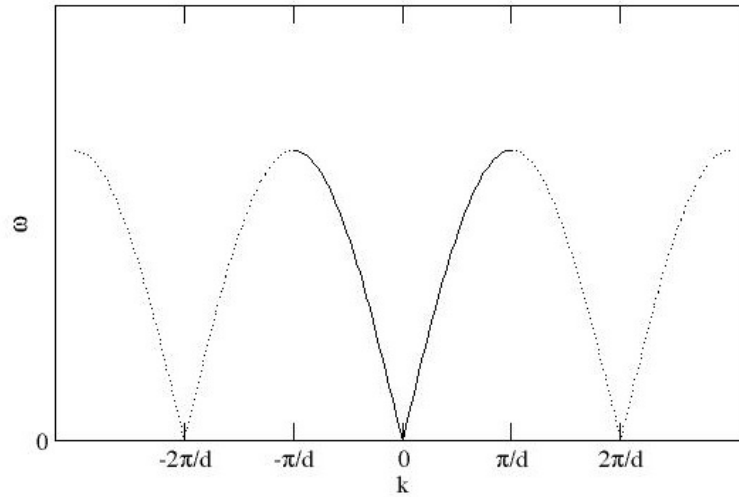
$$\omega^2 \leq \frac{4G}{m}.$$

Άρα μία αλυσίδα ατόμων υποστηρίζει ταλαντώσεις συχνότητας μόνο μικρότερες τις πιο πάνω τιμές. Δηλαδή το σύστημα δρα σαν φίλτρο για μεγαλύτερες συχνότητες.

15.3. Συζήτηση του Brillouin [4]. Ας ξεκινήσουμε από το δεδομένο ότι η αλυσίδα σωματίων δέχεται κυματικές λύσεις, οι οποίες βέβαια θα είναι της μορφής (15.6), ενώ η χωρική διαμόρφωση του κύματος είναι η (15.4). Η μεταβολή της φάσης μεταξύ γειτονικών σωματίων είναι kd . Αν τώρα υποθέσουμε ένα νέο k' το οποίο δίνει μεταβολή φάσης $k'd = kd + 2m\pi$ (όπου m ακέραιος), η παραπάνω λύση δεν μεταβάλλεται: $e^{ik'nd} = e^{i(knd+2m\pi)} = e^{iknd}$. Συμπεραίνουμε ότι τα k και $k' = k + 2m\pi/d$ δίνουν τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις και άρα πρέπει να δώσουν και το ίδιο ω . Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $\omega = \omega(k)$ θα είναι μία περιοδική συνάρτηση του k με περίοδο $2\pi/d$. Πραγματικά, είδαμε ότι από την πλήρη λύση των εξισώσεων προέκυψε η σχέση (15.5):

$$(15.7) \quad \omega = \sqrt{\frac{4G}{m}} \left| \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \right|,$$

η οποία έχει, ως προς k , περίοδο $2\pi/d$. Όστε, για να περιγράψουμε τις ιδιότητες του συστήματος αρκεί να εκλέξουμε ένα διάστημα μήκους $2\pi/d$ στον άξονα k . Η εκλογή $-\pi/d < k < \pi/d$ λέγεται πρώτη ζώνη Brillouin.



ΣΧΗΜΑ 11. Η συχνότητα ω είναι περιοδική συνάρτηση του κυματάριθμου k , όπως στην Εξ. (15.7). Η πρώτη ζώνη Brillouin σημειώνεται με την συνεχή γραμμή.

16. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΦΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ

16.1. Το απλό εκκρεμές. Η εξίσωση κίνησης για το απλό εκκρεμές είναι

$$(16.1) \quad m\ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0,$$

όπου m, g, ℓ είναι σταθερές. Παρατηρούμε ότι

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta}$$

και γράφουμε την εξίσωση (16.1) ως

$$m\ell^2 \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} + mg\ell \sin \theta = 0.$$

Έτσι, ενώ είχαμε εξίσωση για την μεταβλητή θ με τον χρόνο t , τώρα έχουμε περάσει σε μία εξίσωση για το $\dot{\theta}$ ως συνάρτηση του θ . Ολοκληρώνουμε την τελευταία εξίσωση

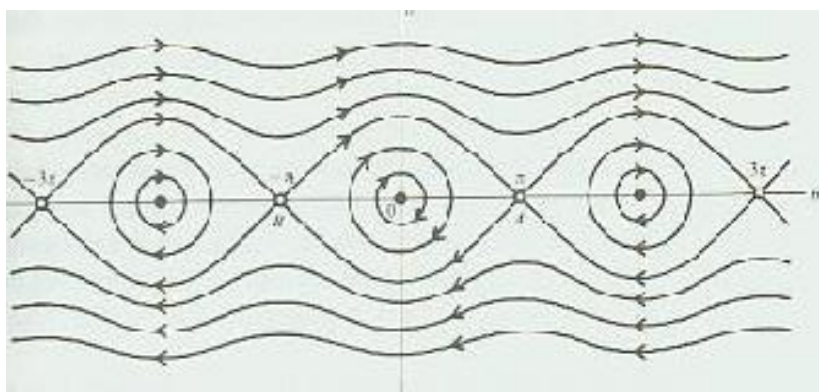
$$m\ell^2 \int \dot{\theta} d\dot{\theta} + mg\ell \int \sin \theta d\theta = 0$$

και βρίσκουμε

$$(16.2) \quad \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta = C,$$

το οποίο είναι ολοκλήρωμα της κίνησης (είναι το ολοκλήρωμα της ενέργειας). Εάν υποθέσουμε κάποιες αρχικές συνθήκες $\theta(t=0), \dot{\theta}(t=0)$ τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης και έτσι να βρούμε την σταθερά C . Δηλαδή, κάθε τιμή της C αντιστοιχεί σε διαφορετικές λύσεις του προβλήματος.

Η αρχική εξίσωση (16.1) δεν μπορεί να λυθεί έτσι ώστε να δωθεί η λύση σε κλειστή μορφή. Όμως, με την βοήθεια του ολοκληρώματος (16.2) μπορούμε να δώσουμε ένα διάγραμμα της κίνησης του συστήματος στον χώρο των καταστάσεων του. Η κάθε κατάσταση του συστήματος καθορίζεται από τις τιμές των δύο μεταβλητών θ και $\dot{\theta}$. Ο χώρος των δύο αυτών μεταβλητών [δηλαδή, το επίπεδο $(\theta, \dot{\theta})$] λέγεται χώρος των φάσεων. Η Εξ. (16.2) ορίζει καμπύλες στον χώρο των φάσεων.



ΣΧΗΜΑ 12. Διάγραμμα φάσεων για το απλό εκκρεμές. (Από το βιβλίο [6].)

Για την κατανόηση του διαγράμματος φάσεων του απλού εκκρεμούς, το οποίο δίνεται στο Σχήμα 3, θα εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις. Πρώτα όμως θα παρατηρήσουμε ότι η Εξ. (16.2) δίνει $C \geq -mgl \cos \theta$ και άρα έχουμε $C \geq -mgl$.

16.1.1. *Σημεία ισορροπίας.* Θεωρούμε $C = -mgl$, οπότε η εξίσωση (16.2) ικανοποιείται μόνο για $\dot{\theta} = 0$, και $\theta = 0, \pm 2\pi, \dots$. Αυτές οι τιμές παριστάνονται με μεμονομένα σημεία στο διάγραμμα φάσεων, ενώ οι αντίστοιχες λύσεις των εξισώσεων (16.1) είναι $\theta(t) = 0, \pm 2\pi, \dots$

Εξετάζουμε επίσης τα σημεία $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$, $\dot{\theta} = 0$. Για τα σημεία αυτά, η εξίσωση κίνησης (16.1) δίνει $\ddot{\theta} = 0$ (δηλαδή έχει λύσεις $\theta(t) = \pm\pi, \dots$). Άρα αυτά είναι σημεία ισορροπίας. Προκύπτουν από την (16.2) για $C = mgl$.

Όλα τα προαναφερθέντα σημεία λέγονται σημεία ισορροπίας και αντιστοιχούν σε θέσεις όπου το εκκρεμές παραμένει ακίνητο.

16.1.2. *Περιοδική κίνηση.* Για $C \approx -mgl$ (αλλά $C > -mgl$) μπορούμε να γράψουμε $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ ώστε η (16.2) γράφεται

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = C \Rightarrow \dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\theta^2 = C',$$

όπου $C' = C + mgl$ είναι μία νέα σταθερά. Η τελευταία εξίσωση δίνει μία οικογένεια ελλείψεων στο διάγραμμα φάσεων, οι οποίες περιβάλλουν το σημείο ισορροπίας $\theta = 0$. Γιά $C' = 0$ βρίσκουμε το σημείο ισορροπίας ($\theta = 0 = \dot{\theta}$) και για κάθε $C' > 0$ έχουμε μία έλλειψη.

Η κίνηση του εκκρεμούς παρίσταται διαγράφοντας μία έλλειψη. Η φορά διαγραφής είναι από αριστερά προς τα δεξιά για $\dot{\theta} > 0$ και από δεξιά προς αριστερά για $\dot{\theta} < 0$, σύμφωνα με τα βελάκια που σημειώνονται στις καμπύλες του διαγράμματος φάσεων. Αυτές οι καμπύλες περιγράφουν περιοδική ταλαντωτική κίνηση.

16.1.3. *Περιστροφική κίνηση.* Έστω $C > mgl$, οπότε η (16.2) δίνει $\dot{\theta}^2 > 0$ (δηλ. $\dot{\theta} \neq 0$). Αυτό σημαίνει ότι το θ είναι μία μονότονη συνάρτηση του χρόνου. Για $\dot{\theta} > 0$ παίρνουμε μη κλειστές καμπύλες με φορά από αρνητικά θ προς θετικά, ενώ για $\dot{\theta} < 0$ παίρνουμε αντίστοιχες καμπύλες με αντίθετη φορά. Οι καμπύλες αυτές αντιστοιχούν σε συνεχή περιστροφική κίνηση του εκκρεμούς.

Είδαμε λοιπόν τα ακόλουθα:

- Κάθε ζευγάρι $(\theta, \dot{\theta})$ είναι μία κατάσταση του συστήματος και καθορίζει την χρονική του εξέλιξη μέσω του προβλήματος αρχικών τιμών. Αυτή η εξέλιξη περιμένουμε να περιγράφεται εν γένει με μία συνεχή καμπύλη στο διάγραμμα φάσεων.
- Ο χρόνος t δεν εμφανίζεται στο διάγραμμα φάσεων αλλά η χρονική εξέλιξη υποδηλώνεται από τα βελάκια στις φασικές καμπύλες.
- Σημαντικά σημεία του διαγράμματος φάσεων είναι τα *σημεία ισορροπίας* τα οποία παριστάνουν λύσεις $\theta = \text{const.}$ της εξίσωσης κίνησης.
- Οι τροχιές γύρω από σημείο ισορροπίας μπορεί να είναι κλειστές καμπύλες οπότε ονομάζουμε το σημείο ισορροπίας *ευσταθές*. Γενικότερα, αν μία μικρή διαταραχή από το σημείο ισορροπίας δεν οδηγεί (μέσω κάποιων φασικών καμπυλών) μακριά από αυτό τότε ονομάζουμε το σημείο ισορροπίας *ευσταθές*.

- ο Εάν μία μικρή διαταραχή από το σημείο ισορροπίας οδηγήσει (μέσω κάποιων φασικών καμπυλών) μακριά από αυτό τότε ονομάζουμε το σημείο ισορροπίας *ασταθές*.

16.2. Εξισώσεις 2ης τάξης ως σύστημα εξισώσεων 1ης τάξης. Γενικεύουμε την περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος και υποθέτουμε την εξίσωση 2ης τάξης

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

η οποία περιγράφει, π.χ., την κίνηση ενός μηχανικού συστήματος. Η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται από τις τιμές των x, \dot{x} . Για να λύσουμε την εξίσωση (το πρόβλημα αρχικών τιμών) χρειαζόμαστε τις τιμές των μεταβλητών σε κάποια χρονική στιγμή $[x(t_0), \dot{x}(t_0)]$. Αυτό δίνει την αφορμή να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση σε μία νέα μορφή όπου τα x και \dot{x} θα εμφανίζονται σαν ανεξάρτητες μεταβλητές. Δίνουμε ένα νέο όνομα στο \dot{x}

$$\dot{x} = y$$

και η αρχική εξίσωση γράφεται

$$\dot{y} = f(x, y).$$

Οι δύο τελευταίες αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων 1ης τάξης το οποίο είναι ισοδύναμο με την αρχική εξίσωση 2ης τάξης.

Το διάγραμμα φάσεων του συστήματος των εξισώσεων είναι στο επίπεδο (x, y) . Η κίνηση του συστήματος ικανοποιεί την εξίσωση

$$(16.3) \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f(x, y)}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}.$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί κατ' αρχήν να δώσει λύσεις $y = y(x)$ οι οποίες ορίζουν τις καμπύλες του διαγράμματος φάσεων στο επίπεδο (x, y) .

Παράδειγμα: Βρείτε το διάγραμμα φάσεων για την εξίσωση $\ddot{x} + a \sin x = 0$.

Αυτή είναι η εξίσωση για το απλό εκκρεμές. Γράφουμε

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -a \sin x.$$

Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται αν θέσουμε $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ και λύσουμε το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει:

$$y = 0 \quad -a \sin x = 0.$$

Οι λύσεις είναι $y = 0, x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Παρατηρήστε ότι όλα τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται στον άξονα x .

Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων δίνονται από την

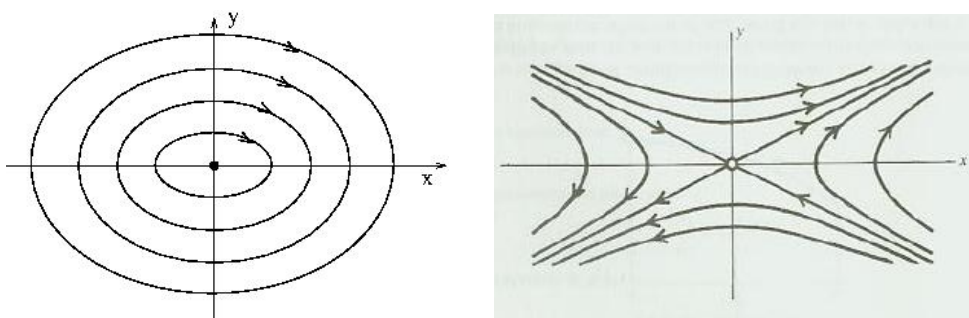
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a \sin x}{y} \Rightarrow \int y dy = -a \int \sin x dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 - a \cos x = C.$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου C παίρνουμε μία καμπύλη στο διάγραμμα φάσεων (Σχήμα 12).
□

Παράδειγμα: Βρείτε το διάγραμμα φάσεων για την εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Αυτή είναι η εξίσωση για τον αρμονικό ταλαντωτή. Γράφουμε

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x.$$



ΣΧΗΜΑ 13. Αριστερά: Διάγραμμα φάσεων για ένα κέντρο στην αρχή των αξόνων. Δεξιά: Διάγραμμα φάσεων για ένα σαγματικό σημείο στην αρχή των αξόνων. (Δεξιά: από το βιβλίο [6].)

Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας το οποίο βρίσκεται αν θέσουμε $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$. Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων δίνονται από την

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y} \Rightarrow \int y dy + \int \omega^2 x dx = 0 \Rightarrow y^2 + \omega^2 x = C.$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου C παίρνουμε μία καμπύλη, η οποία είναι έλλειψη. Οι ελλείψεις περιβάλλουν το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ (Σχήμα 13). \square

Παράδειγμα: Βρείτε το διάγραμμα φάσεων για την εξίσωση $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$.
Γράφουμε

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \omega^2 x.$$

Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας το οποίο βρίσκεται αν θέσουμε $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$. Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων δίνονται από την

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{y} \Rightarrow \int y dy - \int \omega^2 x dx = 0 \Rightarrow y^2 - \omega^2 x^2 = C.$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου $C \neq 0$ παίρνουμε μία καμπύλη, η οποία είναι υπερβολή, στο διάγραμμα φάσεων (Σχήμα 13). Για $C = 0$ παίρνουμε ευθείες ($y = \pm \omega x$) που παριστάνουν φασικές καμπύλες οι οποίες τέμνονται στο σημείο ισορροπίας $(0,0)$. \square

17. ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΒΙΟΛΟΓΙΑ

17.1. Απλά πληθυσμιακά μοντέλα. Υποθέτουμε ένα βιολογικό είδος. Θα θέλαμε να μελετήσουμε την ανάπτυξη του πληθυσμού του $N = N(t)$. Στην απλούστερη περίπτωση μπορούμε να γράψουμε ένα μοντέλο που λαμβάνει υπ' όψιν γεννήσεις και θανάτους με αντίστοιχους σταθερούς ρυθμούς αύξησης και μείωσης του πληθυσμού

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN, \quad b, d > 0.$$

Το μοντέλο δίνει αύξηση (λόγω γεννήσεων) και μείωση (λόγω θανάτων) ανάλογες του πληθυσμού και αγνοεί άλλα φαινόμενα, π.χ., μετανάστευση κλπ. Η λύση της εξίσωσης είναι

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t}, \quad N_0 = N(t=0).$$

Αν $b > d$ ο πληθυσμός αυξάνει απεριόριστα. Άρα το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να ισχύει για μεγάλο N . Διορθώνουμε το μοντέλο ως εξής

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right).$$

Γιά $N \ll K$ το μοντέλο αυτό δίνει παρόμοια αποτελέσματα με το προηγούμενο, άρα r είναι ο ρυθμός ανάπτυξης του πληθυσμού όταν το N είναι μικρό. Το K είναι το μέγεθος του πληθυσμού πάνω από το οποίο αυτός επιβαρύνει υπέρμετρα το περιβάλλον και για $N \sim K$ ο νέος νόμος είναι σημαντικά διαφορετικός από τον προηγούμενο. Η λύση της εξίσωσης είναι

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)} \rightarrow K \quad (\text{όταν } t \rightarrow \infty).$$

Τα μοντέλα που περιγράφηκαν εδώ είναι συνήθως ανεπαρκή για να περιγράψουν πραγματικά συστήματα, αλλά μπορούν να βελτιωθούν και να γίνουν πιο ρεαλιστικά.

17.2. Μοντέλο κυνηγού-θηράματος (Lotka-Volterra). Σε μία λίμνη ζουν δύο είδη ψαριών: το Α, το οποίο ζει τρώγοντας χόρτα (τα οποία υποθέτουμε ότι υπάρχουν σε αφθονία) και το Β (κυνηγός) το οποίο τρέφεται τρώγοντας το Α (θήραμα). Χρειαζόμαστε ένα μοντέλο για την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο ειδών.

Έστω $x(t)$ ο πληθυσμός του είδους Α και $y(t)$ ο πληθυσμός του Β. Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός του Α αυξάνει με έναν απλό νόμο όταν αυτό αφήνεται χωρίς εξωτερικές επιδράσεις. Σε χρόνο δt έχουμε αύξηση δx κατά

$$ax \delta t, \quad a > 0$$

όπου έχει ληφθεί υπ' όψιν ένας σταθερός αριθμός γεννήσεων και θανάτων.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο ρυθμός μείωσης του Α είναι ανάλογος των συναντήσεων μεταξύ Α και Β:

$$-cxy \delta t, \quad c > 0$$

διότι τα Α τρώγονται από τα Β.

Άρα έχουμε συνολική μεταβολή

$$\delta x = ax \delta t - cxy \delta t$$

το οποίο σε διαφορική μορφή γράφεται

$$(17.1) \quad \dot{x} = ax - cxy.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι (απουσία του είδους Α, δηλ., της τροφής) για το Β έχουμε περισσότερους θανάτους από ότι γεννήσεις, άρα μία μεταβολή δy της μορφής

$$-by \delta t, \quad b > 0.$$

Αλλά επίσης μπορούμε να υποθεσουμε αύξηση του Β ανάλογη με τις συναντήσεις μεταξύ Α και Β:

$$dxy \delta t, \quad d > 0.$$

Τελικά έχουμε

$$(17.2) \quad \dot{y} = -by + dxy.$$

Έχουμε να μελετήσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων πρώτης τάξης (17.1),(17.2). Σημειώνουμε ότι υπάρχει ο περιορισμός $x \geq 0$, $y \geq 0$ (οι πληθυσμοί πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί).

Σημεία ισορροπίας. Το πρώτο βήμα για την μελέτη του συστήματος είναι να βρούμε τα σημεία ισορροπίας του, δηλαδή εκείνα τα σημεία για τα οποία έχουμε $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$:

$$ax - cxy = 0, \quad -bx + dxy = 0.$$

Οι λύσεις των εξισώσεων δίνουν τα δύο σημεία

$$(17.3) \quad (0, 0) \quad (b/d, a/c).$$

Το πρώτο σημείο μας λέει απλώς ότι εάν αρχικώς δεν έχουμε κανένα Α και κανένα Β τότε κανένα είδος δεν πρόκειται να δημιουργηθεί. Το δεύτερο σημείο ισορροπίας παριστάνει μια κατάσταση του συστήματος στην οποία οι πληθυσμοί των δύο ειδών παραμένουν αμετάβλητοι στον χρόνο.

Φασικές καμπύλες. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τις καμπύλες του διαγράμματος φάσεων. Αυτές ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-b + cx)y}{(a - cy)x},$$

η οποία μπορεί να λυθεί αν διαχωρίσουμε τα x και y :

$$\int \frac{a - cy}{y} dy = \int \frac{-b + dx}{x} dx,$$

και παίρνουμε λύση

$$(17.4) \quad (cy - a \ln y) + (dx - b \ln x) = C.$$

Το C είναι μία αυθαίρετη σταθερά, η οποία παίζει τον ρόλο της παραμέτρου της οικογένειας καμπυλών του διαγράμματος φάσεων.

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (17.4) είναι της μορφής $f(x) + g(y)$, όπου $f(x) = dx - b \ln x$ και $g(y) = cy - a \ln y$. Έχω ελάχιστο της $f(x)$ και, αντίστοιχως, της $g(y)$ για

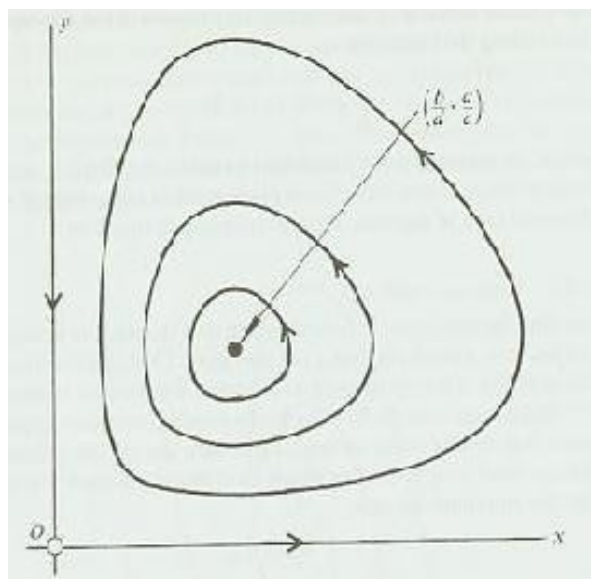
$$(17.5) \quad \frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{b}{x} - d = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{d}, \quad \frac{dg}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{a}{y} - c = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{c}.$$

Η συνάρτηση $f(x) + g(y)$ έχει ελάχιστο στο σημείο όπου $d[f(x) + g(y)]/dx = 0 \Rightarrow df(x)/dx = 0$ και $d[f(x) + g(y)]/dy = 0 \Rightarrow dg(y)/dy = 0$, δηλαδή στο σημείο (17.5).

Γύρω από το σημείο ισορροπίας (17.5) οι καμπύλες του διαγράμματος φάσεων είναι κλειστές καμπύλες. Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε το διάγραμμα φάσεων. Κάθε καμπύλη έχει μια κατεύθυνση η οποία δείχνει την αλλαγή της κατάστασης με την ροή του χρόνου. Την κατεύθυνση μπορούμε να την βρούμε, π.χ., υπολογίζοντας το πρόσημο του \dot{x} σε ένα σημείο $x = b/d, y > a/c$. Αν βρούμε την κατεύθυνση σε ένα σημείο όλες οι άλλες κατευθύνσεις προκύπτουν από ιδιότητες συνέχειας.

Εφ' όσον οι καμπύλες είναι κλειστές οι πληθυσμοί $x(t)$, $y(t)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Η χρονική στιγμή που ο πληθυσμός Β είναι μέγιστος είναι περίπου ένα τέταρτο της περιόδου μετά από την στιγμή που ο πληθυσμός Α ήταν στο μέγιστο. Όταν το Β τρώει το Α ο πληθυσμός του αυξάνει και αυτός του Α μειώνεται. Αυτό έχει σαν συνέπεια να μειωθεί αργότερα το Β. Ακολούθως αυξάνεται το Α διότι δεν υπάρχει πολύ από το Β για

να το φάει και ο κύκλος ξαναρχίζει. Τέτοιες συμπεριφορές έχουν παρατηρηθεί σε βιολογικά συστήματα.



ΣΧΗΜΑ 14. Το διάγραμμα φάσεων του μοντέλου Lotka-Volterra (από το βιβλίο Jordan & Smith, "Nonlinear Ordinary Differential Equations".)

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι, αναλόγως των αρχικών συνθηκών, κάθε σύστημα κινείται για πάντα πάνω σε μία από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος φάσεων. Μόνο εάν υποθέσουμε ότι υπάρξει κάποια ξαφνική αλλαγή στις συνθήκες του περιβάλλοντος, π.χ., έλλειψη φυτικής τροφής κάποια χρονιά, τότε το σύστημα θα μεταβεί σε κάποια άλλη από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος φάσεων (αυτό βέβαια δεν περιγράφεται από το παρόν μοντέλο). Σε κάθε περίπτωση το σύστημα παραμένει εγκλωβισμένο σε μία από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μειονέκτημα του μοντέλου. Σε πολλά βιολογικά συστήματα θα περίμενε κανείς ότι το σύστημα θα είχε μια συγκεκριμένη κατάσταση ισοροπίας (πιθανόν μία περιοδική κατάσταση) στην οποία θα επανερχόταν μετά από κάθε προσωρινή διαταραχή των εξωτερικών συνθηκών. Η συμπεριφορά του παρόντος μοντέλου πάντως είναι χαρακτηριστική για όλα τα συστήματα τα οποία έχουν ένα πρώτο ολοκλήρωμα της μορφής (16.3).

17.3. Μοντέλα ανταγωνισμού δύο ειδών. Μία άλλη κατηγορία προβλημάτων είναι αυτά που αναφέρονται σε δύο είδη τα οποία ανταγωνίζονται για το ίδιο είδος τροφής. Τα μοντέλα που τα περιγράφουν είναι παρόμοια με το Lotka-Volterra. Η σημαντικότερη προσθήκη είναι ότι Μπορούμε να εισάγουμε την, λεγόμενη, λογιστική ανάπτυξη στο μοντέλο Lotka-Volterra οπότε αυτό γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right)\end{aligned}$$

Αυτό θεωρείται ότι δίνει αποτελέσματα πιο κοντά στην πραγματικότητα.

17.4. Μοντέλο επιδημιών. Θεωρούμε την εξάπλωση επιδημίας σε έναν σταθερό πληθυσμό. Σε δεδομένη στιγμή t έχουμε

$x(t)$: οι υγιείς οι οποίοι δεν έχουν αρρωστήσει και άρα είναι δυνατόν να αρρωστήσουν.

$y(t)$: οι άρρωστοι.

$z(t)$: αυτοί που έχουν αναρρώσει και άρα έχουν ανοσία.

Υποθέτουμε τώρα ένα σταθερό ρυθμό επαφών μεταξύ των υγιών και των αρρώστων εκ των οποίων ένα ποσοστό οδηγεί στην μετάδοση της ασθένειας. Άρα σε χρόνο δt έχω

$$\delta x = -\beta xy \delta t$$

νέους αρρώστους.

Υποθέτω επίσης ότι οι άρρωστοι αναρρώνουν με ρυθμό γ , άρα

$$\delta y = \beta xy \delta t - \gamma y \delta t.$$

Η αύξηση του πληθυσμού αυτών με ανοσία είναι

$$\delta z = \gamma y \delta t.$$

Σε διαφορική μορφή οι παραπάνω σχέσεις δίνουν το σύστημα των εξισώσεων

$$(17.6) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\beta xy \\ \dot{y} &= \beta xy - \gamma y \\ \dot{z} &= \gamma y. \end{aligned}$$

Γιά το σύστημα αυτό βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = 0 \Rightarrow x + y + z = N,$$

ώστε λέμε ότι έχουμε ένα ολοκλήρωμα των εξισώσεων, που εδώ εκφράζει το γεγονός ότι ο συνολικός πληθυσμός N είναι σταθερός. Παρατηρούμε ότι η τρίτη εξίσωση του συστήματος προκύπτει από τις δύο πρώτες αν χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα.

Γιά το διάγραμμα φάσεων στο επίπεδο (x, y) έχουμε

(α) *Σημεία ισορροπίας:* Θέτουμε $\dot{x} = 0 = \dot{y} \Rightarrow$ και βρίσκουμε

$$(17.7) \quad xy = 0, \quad (\beta x - \gamma)y = 0 \Rightarrow y = 0, \quad x > 0,$$

δηλαδή όλα τα σημεία του άξονα x (για $x > 0$) είναι σημεία ισορροπίας.

(β) Οι εξισώσεις των καμπυλών του διαγράμματος φάσεων:

$$(17.8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\beta xy - \gamma y}{-\beta xy} = -1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{x}\right) dx \Rightarrow y = \frac{\gamma}{\beta} \ln x - x + C$$

όπου το C είναι μία σταθερά (η παράμετρος της οικογένειας των καμπυλών). Επειδή τώρα

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{\gamma}{\beta},$$

ο αριθμός των αρρώστων y είναι μέγιστος (για μία συγκεκριμένη καμπύλη) όταν ο αριθμός των υγιών είναι $x = \gamma/\beta$.

18. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ

Έχουμε δει πώς στην μηχανική μια εξίσωση δεύτερης τάξης μπορεί να γραφεί σαν δύο εξισώσεις πρώτης τάξης. Συστήματα εξισώσεων πρώτης τάξης, προκύπτουν επίσης σαν μοντέλα συστημάτων στην μηχανική, στην βιολογία και αλλού. Τα συστήματα αυτά είναι της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x, y) \\ \dot{y} &= Y(x, y).\end{aligned}$$

Αυτά που μας ενδιαφέρει να ξέρουμε σε τέτοια συστήματα είναι
(α) Τα σημεία ισορροπίας, δηλαδή τα σημεία στα οποία

$$X(x, y) = 0, \quad Y(x, y) = 0.$$

(β) Το διάγραμμα φάσεων, οι καμπύλες του οποίου δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}.$$

(γ) Οι λύσεις του συστήματος

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

19. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Η μελέτη συστημάτων εξισώσεων αρχίζει από τα πιο απλά συστήματα που είναι τα γραμμικά. Εάν για μία μεταβλητή ο ρυθμός αύξησής της είναι ανάλογος της τιμής της, τότε η δυναμική της περιγράφεται από την γραμμική εξίσωση

$$\dot{x} = ax \Rightarrow x(t) = ce^{at},$$

το οποίο έχουμε δει ότι είναι ένα απλό μοντέλο για αύξηση πληθυσμού.

19.1. Συστήματα με δύο μεταβλητές. Ένα γραμμικό σύστημα με δύο μεταβλητές έχει την γενική μορφή

$$(19.1) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy.\end{aligned}$$

Το σημείο ισορροπίας βρίσκεται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

εκτός εάν η ορίζουσα των συντελεστών στις παραπάνω εξισώσεις είναι μηδέν.

Βρίσκουμε λύσεις των Εξ. (19.1) δοκιμάζοντας την μορφή

$$(19.2) \quad x = r e^{\lambda t}, \quad y = s e^{\lambda t},$$

όπου r, s, λ είναι σταθερές. Αντικατάσταση στις (19.1) δίνει τις

$$(19.3) \quad (a - \lambda)r + bs = 0, \quad cr + (d - \lambda)s = 0.$$

Θεωρούμε ως αγνώστους τους r, s και ζητάμε να μηδενίζεται η ορίζουσα του συστήματος, ώστε εξάγουμε την συνθήκη για το λ

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0,$$

η οποία λέγεται *χαρακτηριστική εξίσωση* του συστήματος και στην περίπτωση μας έχει δύο λύσεις λ_1, λ_2 . Για κάθε τιμή του λ οι εξισώσεις (19.3) δίνουν τη σχέση μεταξύ r και s .

Η γενική λύση είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων που βρήκαμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= r_1 e^{\lambda_1 t} + r_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= s_1 e^{\lambda_1 t} + s_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Θα επαναλάβουμε τώρα την παραπάνω διαδικασία σε μια διαφορετική γλώσσα. Το γραμμικό σύστημα (19.1) γράφεται στην μορφή

$$(19.4) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Αντικατάσταση της (19.2) δίνει το πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\lambda \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix},$$

άρα εκθετικά λ είναι οι (δύο) ιδιοτιμές του πίνακα 2×2 του συστήματος και οι λύσεις για τα (r, s) είναι τα ιδιοδιανύσματα του.

19.2. Πραγματικές ιδιοτιμές. Ας δούμε πρώτα την περίπτωση που οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικές (δηλαδή, ο πίνακας του συστήματος έχει πραγματικές ιδιοτιμές).

Παράδειγμα. (σάγμα) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - 3y \\ \dot{y} &= 2y \end{aligned}$$

Βρίσκουμε λύσεις δοκιμάζοντας την μορφή

$$x = r e^{\lambda t}, \quad y = s e^{\lambda t}.$$

Αντικαθιστούμε στο σύστημα εξισώσεων και βρίσκουμε

$$(\lambda + 1)r + 3s = 0, \quad (\lambda - 2)s = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Για $\lambda = -1$ βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $(r, s) = (1, 0)$ και για $\lambda = 2$ βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $(r, s) = (1, -1)$.

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ y(t) &= -c_2 e^{2t} \end{aligned}$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθερές.

Σχεδίαση διαγράμματος φάσεων. Για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα φάσης [στο επίπεδο (x, y)] παρατηρούμε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα $[(1, 0)$ και $(1, -1)]$ μένουν αναλλοίωτες από τις εξισώσεις κίνησης. Για να το δούμε αυτό υποθέτουμε ότι για κάποια χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε $[x(t = 0), y(t = 0)] = r(1, 0)$ το οποίο είναι το πρώτο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα του συστήματος. Η λύση του συστήματος βρίσκεται αν θέσουμε στην γενική λύση $c_2 = 0$ και $c_1 = r$, οπότε βρίσκουμε $[x(t), y(t)] = r(1, 0)e^{-t}$, άρα η λύση παραμένει επάνω στο ιδιοδιάνυσμα. Επίσης παρατηρήστε ότι η λύση πλησιάζει την αρχή των αξόνων (το σημείο ισορροπίας). Ομοίως για $[x(t = 0), y(t = 0)] = r(1, -1)$, θέτουμε $c_1 = 0$ και $c_2 = r$ στην γενική λύση και έχουμε $[x(t), y(t)] = r(1, -1)e^{2t}$, δηλαδή η λύση παραμένει στο ιδιοδιάνυσμα, αλλά απομακρύνεται από το σημείο ισορροπίας.

Συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες $r(1, 0)$ και $r(1, -1)$ είναι δύο φασικές καμπύλες. Η φορά της κίνησης είναι προς την αρχή των αξόνων για την ευθεία $r(1, 0)$ (διότι $\lambda = -1 < 0$ και άρα το x μειώνεται εκθετικά) ενώ για την κίνηση στην ευθεία $r(1, -1)$ έχουμε απομάκρυνση από την αρχή των αξόνων (διότι $\lambda = 2 > 0$ και άρα τα (x, y) αυξάνονται εκθετικά). Όλες οι υπόλοιπες καμπύλες του διαγράμματος σχεδιάζονται εάν σκεφτούμε ότι πρέπει να υπάρχει συνέχεια με τις δύο ευθείες που προαναφέρθηκαν.

Ένα σημείο ισορροπίας με δύο πραγματικές ετερόσημες ιδιοτιμές λέγεται *σαγματικό σημείο* και είναι ένα ασταθές σημείο ισορροπίας.

Παράδειγμα. (κόμβος) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= 3x - 4y\end{aligned}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

με λύσεις $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(2, 3)$, $(1, 1)$.

Η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned}x(t) &= 2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}, \\ y(t) &= 3c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}.\end{aligned}$$

Σχεδίαση διαγράμματος φάσεων. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}}{3c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}}$$

από όπου βρίσκουμε

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{2}{3}, \quad t \rightarrow \infty \quad \text{και} \quad \frac{x(t)}{y(t)} = 1, \quad t \rightarrow -\infty.$$

Συμπεραίνουμε ότι όλες οι φασικές καμπύλες είναι παράλληλες με το ιδιοδιάνυσμα $(2, 3)$ της μεγαλύτερης (κατ' απόλυτη τιμή) ιδιοτιμής μιά μεγάλους χρόνους ($t \rightarrow \infty$), ενώ είναι παράλληλες με το ιδιοδιάνυσμα $(2, 3)$ της μικρότερης (κατ' απόλυτη τιμή) ιδιοτιμής μιά μικρούς χρόνους ($t \rightarrow -\infty$).

Σχεδιάζουμε τις ευθείες που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές και με βάση την παραπάνω παρατήρηση σχεδιάζουμε και τις υπόλοιπες φασικές καμπύλες.

Ένα σημείο ισορροπίας με δύο πραγματικές ομόσημες ιδιοτιμές λέγεται *κόμβος*. Όταν οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές (όπως σε αυτό το παράδειγμα) έχουμε έναν ευσταθή *κόμβο*.

Γενική θεωρία: Διαγωνοποίηση. Το γραμμικό σύστημα (19.1) που μελετάμε μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} := (x_1, x_2),$$

όπου A είναι ο πίνακας 2×2 των συντελεστών (όπως και στην Εξ. (19.4)). Για την μελέτη αυτού του πίνακα, αλλά και γενικότερα πινάκων $n \times n$, ανακαλούμε ένα σημαντικό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας.

Θεώρημα: Εάν οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ενός πίνακα A διάστασεων $n \times n$ είναι πραγματικές και διάκριτες, τότε οποιοδήποτε σύνολο των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ είναι βάση του \mathbf{R}^n , ο πίνακας $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ είναι αντιστρέψιμος και

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

Για να βρούμε την γενική λύση του γραμμικού συστήματος ορίζουμε ένα νέο διάνυσμα μεταβλητών

$$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x},$$

γιά το οποίο έχουμε

$$\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = P^{-1}A\mathbf{x} = P^{-1}AP\mathbf{y}.$$

Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι

$$\dot{\mathbf{y}} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]\mathbf{y}.$$

Η γενική λύση είναι

$$\mathbf{y}(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]\mathbf{y}(0),$$

όπου $\mathbf{y}(0)$ είναι η αρχικές συνθήκες εκφρασμένες στις μεταβλητές \mathbf{y} . Τελικά, στις αρχικές μεταβλητές έχουμε την γενική λύση

$$\mathbf{x}(t) = P \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}\mathbf{x}(0),$$

όπου $\mathbf{x}(0)$ είναι η αρχικές συνθήκες.

Παρατήρηση: Δεδομένου ότι συνήθως μελετάμε συστήματα δύο εξισώσεων είναι χρήσιμο να θυμηθούμε ότι για έναν 2×2 πίνακα P ο αντίστροφος P^{-1} είναι

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

όπου $\Delta = ad - bc$ η ορίζουσα.

Παράδειγμα. (σαγματικό σημείο) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 3x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2$$

του οποίου ο πίνακας είναι

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ και δύο αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= 2y_2 \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$. Η γενική λύση του είναι $y_1(t) = c_1e^{-t}$, $y_2(t) = c_2e^{2t}$ ή σε άλλη μορφή

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \mathbf{y}(0).$$

(Όπου θέσαμε $y_1(0) = c_1$, $y_2(0) = c_2$.)

Τελικά έχουμε

$$\mathbf{x}(t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}(0) \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_1(0)e^{-t} + x_2(0)(e^{-t} - e^{2t}) \\ x_2(t) = x_2(0)e^{2t} \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα φάσης στα επίπεδα (y_1, y_2) και (x_1, x_2) . Έχουμε ένα σαγματικό σημείο.

19.3. Μιγαδικές ιδιοτιμές. Ας δούμε τώρα την περίπτωση που οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικές (δηλαδή, ο πίνακας του συστήματος έχει μιγαδικές ιδιοτιμές).

Παράδειγμα. Έστω το σύστημα

$$(19.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_2 \\ \dot{x}_2 &= bx_1 + ax_2 \end{aligned}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - a)^2 + b^2 = 0, \Rightarrow \lambda = a \pm ib.$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(1, \mp i)$. Άρα

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r_1e^{(a+ib)t} + r_2e^{(a-ib)t} = e^{at}[r_1e^{ibt} + r_2e^{-ibt}] \\ x_2(t) &= -ir_1e^{(a+ib)t} + ir_2e^{(a-ib)t} = e^{at}\frac{1}{i}[r_1e^{ibt} - r_2e^{-ibt}] \end{aligned}$$

Εκλέγουμε $r_2^* = r_1 := c_1/2 + ic_2/2$ όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, ώστε να πετύχουμε πραγματική λύση:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{at} 2\operatorname{Re}[r_1 e^{ibt}] = e^{at} [c_1 \cos bt - c_2 \sin bt] \\x_2(t) &= e^{at} 2\operatorname{Im}[r_1 e^{ibt}] = e^{at} [c_1 \sin bt + c_2 \cos bt].\end{aligned}$$

Η λύση αυτή γράφεται και στην μορφή

$$\mathbf{x}(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} \mathbf{x}(0),$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ και $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(t=0)$ είναι οι αρχικές συνθήκες.

Πολικές συνεταγμένες: Ορίζουμε την μιγαδική μεταβλητή $z = x_1 + ix_2$. Ένας σύντομος υπολογισμός δείχνει ότι το σύστημα (19.5), γράφεται στην μορφή

$$\dot{z} = (a + ib)z.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την πολική μορφή για την μιγαδική μεταβλητή $z = r(t)e^{i\theta(t)}$, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar \Rightarrow r = r_0 e^{at} \\ \dot{\theta} &= b \Rightarrow \theta = bt + \theta_0.\end{aligned}$$

Αυτή η μορφή της λύσης δείχνει ότι η χρονική εξέλιξη κάθε σημείου στο διάγραμμα φάσης δίνει περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων, ενώ ταυτοχρόνως πλησιάζει (για $a < 0$) ή απομακρύνεται (για $a > 0$) από αυτό. Λέμε ότι η αρχή των αξόνων είναι ένα σπειροειδές σημείο ισορροπίας. Αυτό είναι ευσταθές για $a < 0$ και ασταθές για $a > 0$.

Κέντρο: Στην περίπτωση $a = 0$ έχουμε κλειστές τροχιές και λέμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι κέντρο.

Οποιοδήποτε σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2\end{aligned}$$

για τον οποίο έχουμε μιγαδικές ιδιοτιμές έχει ένα σπειροειδές σημείο ισορροπίας. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα: Εάν ένας πραγματικός πίνακας A διαστάσεων $2n \times 2n$ έχει διάκριτες ιδιοτιμές $\lambda_j = a_j + ib_j$ και $\lambda_j^* = a_j - ib_j$ και ιδιοδιανύσματα $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$, $\mathbf{w}_j^* = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j$, τότε $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n\}$ είναι βάση του \mathbb{R}^{2n} , ο πίνακας $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n]$ είναι αντιστρέψιμος και

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}.$$

Έστω εάν ορίσουμε ένα νέο διάνυσμα μεταβλητών $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$, έχουμε

$$\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = P^{-1}A\mathbf{x} = P^{-1}AP\mathbf{y} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \mathbf{y}.$$

Άρα ισχύει

$$\mathbf{x}(t) = P \operatorname{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}(0).$$

Παράδειγμα. (σπειροειδές σημείο) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = -1 \pm i$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(x_1, x_2) = (1, -2 \pm i)$. Άρα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ τότε βρίσκουμε $\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = P^{-1}A\mathbf{x} = P^{-1}AP\mathbf{y}$. Από το παραπάνω θεώρημα (ή από κατ' ευθείαν υπολογισμό του $P^{-1}AP$) έχω

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}.$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα (με $a = -1, b = 1$) συνάγουμε

$$\mathbf{y}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \mathbf{y}(0)$$

Τελικά

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = Pe^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \mathbf{y}(0) = Pe^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{x}(0) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t} [x_1(0) \cos t + (2x_1(0) + x_2(0)) \sin t] \\ x_2(t) &= e^{-t} [x_2(0) \cos t - (5x_1(0) + 2x_2(0)) \sin t] \end{aligned}$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα φάσης στο επίπεδο (x_1, x_2) . Έχουμε ένα ευσταθές σπειροειδές σημείο.

Παράδειγμα: (σπειροειδές σημείο) Βρείτε την γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 - 3x_2. \end{aligned}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i,$$

όπου $\lambda_2 = \lambda_1^*$. Για $\lambda = \lambda_1$ και $\lambda = \lambda_2$ βρίσκουμε αντιστοίχως

$$s_1 = (-2 + i)r_1, \quad s_2 = (-2 - i)r_2.$$

Άρα η γενική λύση γράφεται

$$\begin{aligned}x_1(t) &= r_1 e^{(-1+i)t} + r_2 e^{(-1-i)t}, \\x_2(t) &= r_1(-2+i) e^{(-1+i)t} + r_2(-2-i) e^{(-1-i)t}.\end{aligned}$$

Αν ζητάμε πραγματικές λύσεις τότε πρέπει να θέσουμε $r_2 = r_1^*$ και γράφοντας $r_1 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}ic_2$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-t}(c_1 \cos t - c_2 \sin t), \\x_2(t) &= -e^{-t}[(2c_1 + c_2) \cos t + (c_1 - 2c_2) \sin t].\end{aligned}$$

Σχεδιασμός διαγράμματος φάσεων. Σχεδιάζουμε μία σπείρα στην οποία τα βέλη οδηγούν προς το σημείο ισορροπίας, διότι το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι αρνητικό. Υπάρχουν δύο τέτοιες σπείρες (αριστερόστροφη και δεξιόστροφη). Επιλέγουμε εκείνη που ικανοποιεί τις εξισώσεις, πράγμα που το ελέγχουμε με υπολογισμό των \dot{x}_1, \dot{x}_2 σε ορισμένα σημεία του διαγράμματος φάσεων.

19.4. **Διάγραμμα σημείων ισορροπίας.** Έστω η γενική μορφή

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2.\end{aligned}$$

Θέτουμε $\delta = \det A = ad - bc$ και $\tau = \text{trace} A = a + d$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$$

(α) Για $\delta < 0$ έχουμε σαγματικό σημείο.

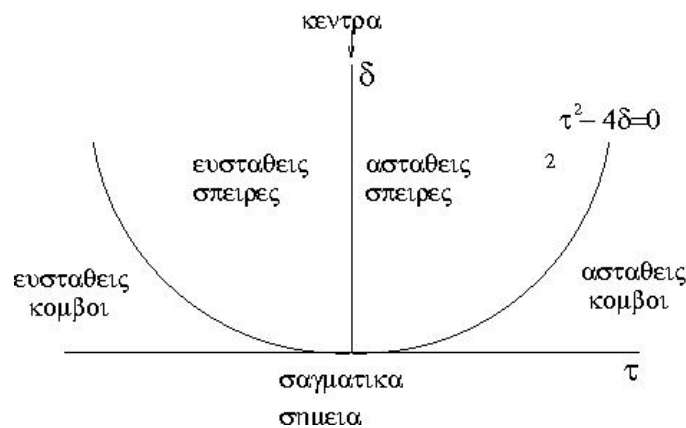
(β) Για $\delta > 0$ και $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ έχουμε κόμβο.

Είναι ευσταθής για $\tau < 0$ και ασταθής για $\tau > 0$.

(γ) Για $\delta > 0$ και $\tau^2 - 4\delta < 0$ έχουμε σπειροειδές σημείο (για $\tau \neq 0$).

Είναι ευσταθές για $\tau < 0$ και ασταθές για $\tau > 0$.

(δ) Για $\delta > 0$ και $\tau = 0$ έχουμε κέντρο.



ΣΧΗΜΑ 15. Διάγραμμα σημείων ισορροπίας στο χώρο των παραμέτρων.

20. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΗΜΕΙΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Θεώρημα: Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος τότε Για κάθε αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ και επίσης, αν $\mathbf{x}_0 \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$.

Θεώρημα: Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν θετικό πραγματικό μέρος τότε Για κάθε αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ και επίσης, αν $\mathbf{x}_0 \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$.

Ορισμός: Έστω $\lambda_j = a_j + ib_j$ οι ιδιοτιμές του πίνακα ενός γραμμικού συστήματος και $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε ονομάζουμε τους χώρους

$$E^s = \text{Span}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \mid a_j < 0\}$$

$$E^u = \text{Span}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \mid a_j > 0\}$$

$$E^c = \text{Span}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \mid a_j = 0\}$$

ευσταθή, ασταθή και κεντρικό υπόχωρο του συστήματος αντίστοιχα.

Παράδειγμα: Για ένα σύστημα δύο εξισώσεων με ένα σαγματικό σημείο ο ευσταθής και ο ασταθής υπόχωρος είναι ο καθένας μία ευθεία.

Παράδειγμα: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ και ιδιοδιανύσματα $\mathbf{w}_{1,2} = [0, 1, 0]^T \pm i[1, 0, 0]^T$ και επίσης $\lambda_3 = 3$ με ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}_3 = [0, 0, 1]^T$. Ο ευσταθής υπόχωρος E^s είναι το επίπεδο (x_1, x_2) και ο ασταθής υπόχωρος E^u είναι ο άξονας x_3 .

Θεώρημα: Οι υπόχωροι E^s, E^u, E^c ενός πίνακα $n \times n$ μένουν αναλλοίωτοι από τις αντίστοιχες εξισώσεις. Επίσης,

$$\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c.$$

Ορισμός: Ένα σημείο ισορροπίας \mathbf{x}_0 λέγεται *ευσταθές* αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ έχουμε

$$\mathbf{x}(t) \in N_\epsilon(\mathbf{x}_0).$$

Το σημείο ισορροπίας λέγεται *ασταθές* εάν δεν είναι ευσταθές.

Παραδείγματα: Ένα σαγματικό σημείο είναι ασταθές.

Ένας κόμβος μπορεί να είναι ασταθής (θετικές ιδιοτιμές) ή ευσταθής (αρνητικές ιδιοτιμές).

Ένα σπειροειδές σημείο μπορεί να είναι ασταθές (ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος) ή ευσταθές (ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος).

Ένα κέντρο είναι ευσταθές.

Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Παραδείγματα: Εάν ένα σπειροειδές σημείο είναι ευσταθές τότε είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Ένα κέντρο είναι ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

21. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Έστω το μη γραμμικό σύστημα n εξισώσεων

$$(21.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

όπου \mathbf{x} είναι το διάνυσμα των n μεταβλητών και \mathbf{f} είναι διάνυσμα n συναρτήσεων. Για παράδειγμα, για ένα σύστημα δύο εξισώσεων έχουμε την μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Θεωρούμε ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος \mathbf{x}_0 και τον ιακωβιανό πίνακα υπολογισμένο στο σημείο ισορροπίας (υποθέτουμε σύστημα δύο εξισώσεων)

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} df_1/dx_1 & df_1/dx_2 \\ df_2/dx_1 & df_2/dx_2 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0}.$$

Θα δούμε ότι το γραμμικό σύστημα

$$(21.2) \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$$

διατηρεί (στην γενική περίπτωση), κοντά στο σημείο ισορροπίας \mathbf{x}_0 την μορφή του διαγράμματος φάσης του μη γραμμικού συστήματος (εκτός ειδικών περιπτώσεων).

Θεώρημα (The stable manifold theorem). Έστω E ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbf{R}^n που περιέχει την αρχή των αξόνων, επίσης $\mathbf{f} \in C^1(E)$, όπου $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ και ότι $D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ έχει k ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και $n - k$ ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος. Τότε υπάρχει μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα S διαστάσεως k η οποία είναι εφαπτόμενη στον ευσταθή υπόχωρο E^s του γραμμικοποιημένου συστήματος (21.2) στο σημείο $\mathbf{0}$ τέτοια ώστε για κάθε αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0 \in S$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Επίσης, υπάρχει μία πολλαπλότητα U διαστάσεως $n - k$ εφαπτόμενη στον ασταθή υπόχωρο E^u του γραμμικοποιημένου συστήματος στο σημείο $\mathbf{0}$ τέτοια ώστε για κάθε αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0 \in U$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Οι πολλαπλότητες S και U είναι αναλλοίωτες στις εξισώσεις.

Με βάση το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να πούμε ότι, αν ένα σημείο ισορροπίας έχει όλες τις ιδιοτιμές με μη-μηδενικό πραγματικό μέρος (οπότε λέγεται *υπερβολικό σημείο ισορροπίας*), τότε η συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την συμπεριφορά του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Παράδειγμα: Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης του μη γραμμικού συστήματος

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = 1 - x_1 x_2.$$

Θέτουμε $f_1 = x_1 - x_2$, $f_2 = 1 - x_1 x_2$. Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται ως

$$f_1 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

$$f_2 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1 = x_2.$$

Άρα έχουμε τα σημεία $(-1, -1)$ και $(1, 1)$.

Ο γραμμικοποιημένος πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} df_1/dx_1 & df_1/dx_2 \\ df_2/dx_1 & df_2/dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}.$$

Για το σημείο $(-1, -1)$ ορίζω $\xi_1 = x_1 + 1$, $\xi_2 = x_2 + 1$ και έχουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, άρα το σημείο είναι ένα ασταθές σπειροειδές σημείο. Η φορά περιστροφής της σπείρας μπορεί να βρεθεί ως εξής. Στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις θεωρούμε, π.χ., $\xi_2 = 0$, $\xi_1 > 0$ (δηλ., είμαστε στον θετικό άξονα x_1) και βρίσκουμε $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 > 0$, άρα η κίνηση επάνω στην σπείρα είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογίου.

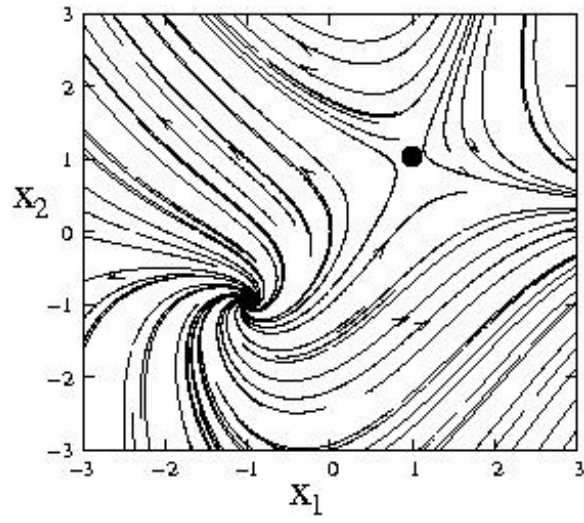
Για το σημείο $(1, 1)$ ορίζουμε $\xi_1 = x_1 - 1$, $\xi_2 = x_2 - 1$ και έχουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, άρα το σημείο είναι ένα σαγματικό σημείο. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(1, 1 \mp \sqrt{2})$ και ορίζουν αντίστοιχα τον ασταθή και ευσταθή υπόχωρο.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] G.R. Fowles, "Analytical mechanics" (CBS College Publishing, 1986).
- [2] H. Goldstein, "Classical Mechanics" (Addison Wesley, 1980).
- [3] Ι. Δ. Χατζηδημητρίου, "Θεωρητική μηχανική", 3η έκδοση (Γιαχούδη-Γιαννούλη, Θεσσαλονίκη, 2000).
- [4] L. Brillouin, "Wave Propagation in Periodic Structures" (Academic Press, 1960).
- [5] Lawrence Perko, "Differential Equations and Dynamical Systems", Third edition (Springer, New York, 2001).
- [6] D.W. Jordan and P. Smith, "Nonlinear ordinary differential equations" (Oxford University Press, 1987).
- [7] Τάσος Μούντης, "Μη γραμμικές συνήθειες διαφορικές εξισώσεις" (Εκδοσεις Πνευματικού, 1997).
- [8] A. Hastings, "Populations Biology" (Springer, New York, 1997).



ΣΧΗΜΑ 16. Διάγραμμα φάσης για το μη γραμμικό πρόβλημα του παραπάνω παραδείγματος. Έχουμε ένα ασταθές σπειροειδές σημείο και ένα σαγματικό σημείο (σημειώνονται μαύρους κύκλους στο σχήμα). Έχει σημειωθεί με βέλη η φορά ορισμένων καμπυλών.