

Μαθηματική Μοντελοποίηση Ι (χειμερινό εξάμηνο 2009/2010)

3. Φυλλάδιο ασκήσεων ΙΙΙ

3.1. **Άσκηση.** Βρείτε το είδος και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας και σχεδιάστε πρόχειρα τα διαγράμματα φάσεων για τα ακόλουθα γραμμικά συστήματα

$$(\alpha) \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = 5x_1 - 4x_2$$

$$(\beta) \dot{x}_1 = x_1 - 5x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

$$(\gamma) \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$$

3.2. **Άσκηση.** Θεωρήστε το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \quad \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2.$$

Κληρώστε 4 αριθμούς από το 1 έως το 10 και θεωρήστε ότι οι αριθμοί που κληρώθηκαν δίνουν τις τιμές των a, b, c, d . Βρείτε το είδος και την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για το γραμμικό σύστημα που κληρώσατε. Σχεδιάστε με όσο καλύτερη ακρίβεια μπορείτε το διάγραμμα φάσεων.

3.3. **Άσκηση.** Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων για τον αναρμονικό ταλαντωτή

$$\ddot{x} = -x + \epsilon x^3, \quad \epsilon > 0.$$

(Αν χρησιμοποιήσετε υπολογιστή, σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων για ϵ της επιλογής σας, π.χ., $\epsilon = 0.01$.)

3.4. **Άσκηση.** Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς x_1, x_2 δύο ειδών τα οποία ανταγωνίζονται για το ίδιο είδος τροφής:

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - ax_2)$$

$$\dot{x}_2 = \rho x_2(1 - x_2 - bx_1)$$

όπου για τις σταθερές ισχύει $a, b, \rho > 0$.

(α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (μελετήστε όλες τις δυνατές τιμές των παραμέτρων, αλλά υποθέστε $a \neq 1, b \neq 1$).

(β) Βρείτε το είδος και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας.