

Μαθηματική Μοντελοποίηση Ι (χειμερινό εξάμηνο 2009/2010)

2. Φυλλάδιο ασκήσεων ΙΙ

2.1. **Άσκηση.** (α) Γράψτε την (γενική) Lagrangian για μία μαγνητική δίνη σε εξωτερικό δυναμικό. (β) Θεωρήστε παραβολικό δυναμικό το οποίο να παγιδεύει την δίνη και γράψτε την (ειδικότερη) Lagrangian. (γ) Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης. [Δουλέψτε όπως στο κεφάλαιο 10 των σημειώσεων.]

2.2. **Άσκηση.** Θεωρήστε δύο δίνες με φορτία $Q_1, Q_2 > 0$ και $Q_1 \neq Q_2$. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. (β) Λύστε αριθμητικά τις εξισώσεις κίνησης ή βρείτε αναλυτικά την τροχιά τους (χρησιμοποιήστε τις διατηρήσιμες ποσότητες). (γ) Σχεδιάστε τις τροχιές των δινών για (μη-τετριμένη) αρχική συνθήκη της επιλογής σας. [Στην αριθμητική λύση να εκλεγούν συγκεκριμένα Q_1, Q_2 και αρχικές συνθήκες. Όλα αυτά τα δεδομένα αναμένεται να είναι διαφορετικά για τον κάθε φοιτητή.]

2.3. **Άσκηση.** Έστω μία άπειρη αλυσίδα ατόμων μάζας m συζευγμένων με ελατήρια σταθεράς G (δείτε το σχήμα). Η απόσταση μεταξύ γειτονικών ατόμων στην θέση ισορροπίας είναι d .

(α) Γράψτε την Lagrangian του συστήματος.

(β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης της αλυσίδας.

(γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $q_n = A e^{i(knd - \omega t)}$ είναι λύση των εξισώσεων όταν η συχνότητα ω και το κυματόνισμα k ικανοποιούν την συνθήκη

$$\omega^2 = \frac{4G}{m} \sin^2 \left(\frac{kd}{2} \right).$$

(δ) Θεωρήστε $k = \pi/d$. Βρείτε λύση της εξίσωσης για την οποία όλα τα άτομα βρίσκονται στην θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $t = 0$ [δηλ. $q_n(t = 0) = 0$].

