Μαθηματική Μοντελοποίηση Ι

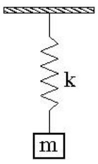
1. Φυλλάδιο ασκήσεων Ι - Λύσεις ορισμένων ασκήσεων

1.1. Άσκηση. Ένα σωμάτιο μάζας m βρίσκεται σε παραβολικό δυναμικό $V(x) = 1/2kx^2$. Γράψτε την θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου, όταν σε χρόνο $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = 1$ και έχει ταχύτητα $v = 0$. Ποιά είναι η ενέργειά του;

$$x(t) = \cos(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

$$E = \frac{1}{2}k.$$

1.2. Άσκηση. Έστω ότι ένα σωμάτιο μάζας m εξαρτάται από ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους ℓ και είναι ελεύθερο να κινείται κατακόρυφα. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η δύναμη του ελατηρίου συν την βαρυτική δύναμη.



(α) Γράψτε την δύναμη που ασκείται στο σώμα.
(β) Ποιά είναι η δυναμική ενέργεια που δίνει αυτή την δύναμη;
(γ) Βρείτε την εξίσωση κίνησης και δώστε τη λύση της.

Δείτε την λύση, π.χ., στο βιβλίο του Fowles.

1.3. Άσκηση. Σώμα μάζας m κινείται στον άξονα x σε δυναμική ενέργεια

$$V(x) = -Kx\, e^{-\alpha x},$$

όπου K, α είναι θετικές σταθερές. Βρείτε την θέση ισορροπίας της μάζας και την περίοδο ταλάντωσεων γύρω από αυτήν.

Γιά να βρούμε την θέση ισορροπίας θα εξετάσουμε πού μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος

$$\frac{dV}{dx} = -K\,(1 - \alpha x)\, e^{-\alpha x},$$
$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow (1 - \alpha x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha},$$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι

$$x_0 \equiv \frac{1}{\alpha}.$$

Γιά να μελετήσουμε την δυναμική του σωματίου γύρω από το x_0 χρειαζόμαστε την δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{d^2V}{dx^2}|_{x=x_0} = -K[-\alpha - \alpha(1-\alpha x_0)]\, e^{\alpha x_0} = \alpha K(2-\alpha x_0)\, e^{\alpha x_0} = \frac{aK}{e} > 0.$$

Μία προσέγγιση του δυναμικού γύρω από το x_0 (γιά $|x-x_0| \ll 1$) δίνεται από το ανάπτυγμα Taylor

$$V(x) = V(x_0) + \frac{dV}{dx}|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{d^2V}{dx^2}|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \ldots \approx -\frac{K}{\alpha e} + \frac{\alpha K}{2e}(x-x_0)^2.$$

Ας θέσουμε

$$\xi \equiv x - x_0 = x - \frac{1}{\alpha}$$

Τότε ορίζουμε δυναμική ενέργεια

$$V_1(\xi) \equiv V(x) - V(x_0) = \frac{\alpha K}{2e}\xi^2$$

και επίσης έχουμε κινητική ενέργεια

$$T_1 = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2.$$

Οπότε έχουμε Λαγκρανζιανή

$$L = T_1 - V_1 = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 - \frac{\alpha K}{2e}\xi^2.$$

Από εδώ προκύπτει η εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{\xi} + \frac{\alpha K}{e}\xi = 0 \Rightarrow \ddot{\xi} + \frac{\alpha K}{me}\xi = 0,$$

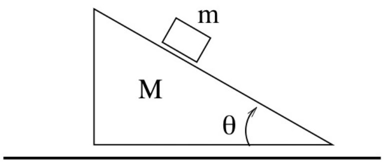
της οποίας οι λύσεις παριστάνουν ταλαντωτική κίνηση με συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha K}{me}}$$

και περίοδο ταλάντωσης

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{me}{\alpha K}}$$

Σημειώσεις. Αν είτε το α είτε το K είναι αρνητικά τότε το δυναμικό έχει μέγιστο στην θέση ισορροπίας και αυτό είναι ασταθές (δεν έχουμε ταλαντωτική κίνηση).
Αν όμως $\alpha K > 0$ (έστω και αν $\alpha, K < 0$) η παραπάνω λύση της άσκησης είναι σωστή.

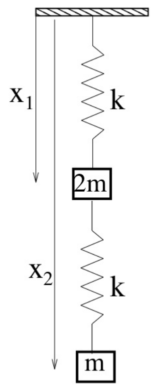


1.4. **Άσκηση.** Σωμάτιο μάζας m είναι ελεύθερο να ολισθαίνει επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο (βλ. σχήμα). Το κεκλιμένο επίπεδο έχει μάζα M και είναι ελεύθερο να ολισθαίνει επάνω σε επίπεδη οριζόντια βάση. (α) Γράψτε κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες γιά το σύστημα, (β) γράψτε την Λαγκρανζιανή του συστήματος, (γ) γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης.

Δείτε την λύση, π.χ., στο βιβλίο του Fowles.

1.5. **Άσκηση.** (ΦΙ) Σώμα μάζας $2m$ κρέμεται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k και μήκους ισορροπίας ℓ. Από αυτήν τη μάζα κρέμεται δεύτερο ελατήριο της ίδιας σταθεράς (και ίδιου μήκους ισορροπιας) από το οποίο εξαρτάται μια δεύτερη μάζα m. Θεωρήστε μόνο κατακόρυφη κίνηση των μαζών.

(α) Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.
(β) Η επάνω μάζα $2m$ μετακινείται προς τα κάτω κατά απόσταση d από την θέση ισορροπίας της, ενώ η δεύτερη μάζα παραμένει στην αρχική θέση ισορροπίας της. Ακολούθως το σύστημα αφήνεται να ταλαντωθεί. Βρείτε την κίνηση των δύο μαζών, δηλ. την θέση τους σαν συνάρτηση του χρόνου.



(α) Σκοπός μας είναι να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης, δηλαδή, τις εξισώσεις Lagrange. Διαλέγουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις αποστάσεις των δύο μαζών από το σημείο εξάρτησης. Τις ονομάζουμε x_1 και x_2.
Η κινητική ενέργεια των δύο μαζών είναι

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}m(2\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2). \tag{1.5.1}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών των δύο μαζών λόγω του βαρυτικού πεδίου και των δυναμικών ενεργειών των δύο ελατηρίων:

$$\begin{aligned} V &= -(2m)gx_1 - mgx_2 + \frac{1}{2}k(x_1-\ell)^2 + \frac{1}{2}k(x_2-x_1-\ell)^2 \\ &= -mg(2x_1+x_2) + \frac{1}{2}k[(x_1-\ell)^2 + (x_2-x_1-\ell)^2], \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό των συντεταγμένων x_1, x_2, το μήκος του επάνω ελατηρίου είναι x_1 ενώ το μήκος του κάτω ελατηρίου είναι $x_2 - x_1$.
Ώστε η Lagrangian είναι

$$L = \frac{1}{2}m(2\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + mg(2x_1 + x_2) - \frac{1}{2}k[(x_1 - \ell)^2 + (x_2 - x_1 - \ell)^2]. \tag{1.5.3}$$

Από εδώ εξάγουμε τις εξισώσεις Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2m\ddot{x}_1 - 2mg + k(x_1 - \ell) - k(x_2 - x_1 - \ell) = 0 \\
&\Rightarrow \quad 2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 2mg \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad m\ddot{x}_2 - mg + k(x_2 - x_1 - \ell) = 0. \\
&\Rightarrow \quad m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = mg + k\ell.
\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Πρώτα θα βρούμε την θέση ισορροπίας του συστήματος. Θέτουμε $x_1 = \eta_1,\ x_2 = \eta_2$, όπου η_1, η_2 είναι σταθερές (άρα $\ddot{x}_1 = 0 = \ddot{x}_2$) και λύνουμε το γραμμικό σύστημα που προκύπτει:

$$\begin{aligned}
2k\eta_1 - k\eta_2 = 2mg \quad &\Rightarrow \quad \eta_1 = \frac{3mg}{k} + \ell \\
-k\eta_1 + k\eta_2 = mg + k\ell \quad &\Rightarrow \quad \eta_2 = \frac{4mg}{k} + 2\ell.
\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Τώρα παρατηρώ ότι αν ορίσουμε ως νέες μεταβλητές τις $x_1' = x_1 - \eta_1$ και $x_2' = x_2 - \eta_2$, δηλαδή τις αποκλίσεις από την θέση ισορροπίας, και τις αντικαταστήσουμε στις Εξ. (1.5.4) παίρνουμε ένα ομογενές σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
2m\ddot{x}_1' + 2kx_1' - kx_2' &= 0 \\
m\ddot{x}_2' + kx_2' - kx_1' &= 0.
\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Υποθέτουμε ταλαντωτική λύση του συστήματος:

$$x_1' = A\,\cos(\omega t + \phi), \quad x_2' = B\,\cos(\omega t + \phi).$$

Αντικατάσταση στις εξισώσεις δίνει

$$\begin{aligned}
(2k - 2m\omega^2)A - kB &= 0 \\
-kA + (k - m\omega^2)B &= 0.
\end{aligned} \tag{1.5.7}$$

Για να έχουμε μη-τετριμένη λύση του συστήματος πρέπει η ορίζουσα των συντελεστων να είναι μηδέν:

$$2(k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow (k - k/\sqrt{2} - m\omega^2)(k + k/\sqrt{2} - m\omega^2) \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Άρα οι συχνότητες (των κανονικών τρόπων) ταλάντωσης του συστήματος είναι οι

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}. \tag{1.5.8}$$

(β) Χρειαζόμαστε την γενική λύση του προβλήματος. Για $\omega^2 = \omega_1^2$ το γραμμικό σύστημα (1.5.7) δίνει $B = -\sqrt{2}\,A$ ενώ γιά $\omega^2 = \omega_2^2$ παίρνουμε $B = \sqrt{2}\,A$. Δηλαδή έχουμε τις λύσεις του συστήματος

$$x_1' = A\cos(\omega_1 t + \phi), \quad x_2' = -\sqrt{2}A\cos(\omega_1 t + \phi),$$

και

$$x_1' = A\cos(\omega_2 t + \phi), \quad x_2' = \sqrt{2}A\cos(\omega_2 t + \phi),$$

όπου το A είναι το πλάτος της ταλαντωσης και ϕ μία φάση (αυθαίρετες σταθερές).
Οι γενική λύση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα των παραπάνω δύο λύσεων:

$$\begin{aligned} x_1' &= A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2' &= -\sqrt{2}A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \sqrt{2}A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

όπου τα A_1, A_2, ϕ_1, ϕ_2 είναι πραγματικές σταθερές. Θα τις προσδιορίσουμε ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.
Οι αρχικές συνθήκες που δίνονται στο ερώτημα (β) γράφονται ως εξής:

$$x_1'(t=0) = d, \quad x_2'(t=0) = 0, \quad \dot{x}_1'(t=0) = 0, \quad \dot{x}_2'(t=0) = 0. \tag{1.5.10}$$

Η Εξ. (1.5.9) δίνουν

$$\begin{aligned} x_1'(t=0) &= A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2), \\ x_2'(t=0) &= -\sqrt{2}A_1\cos(\phi_1) + \sqrt{2}A_2\cos(\phi_2). \end{aligned} \tag{1.5.11}$$

Επίσης, παραγωγίζοντας τις (1.5.9) και θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{x}_1'(t=0) &= -\omega_1 A_1\sin(\phi_1) - \omega_2 A_2\sin(\phi_2), \\ \dot{x}_2'(t=0) &= \omega_1\sqrt{2}A_1\sin(\phi_1) - \omega_2\sqrt{2}A_2\sin(\phi_2). \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Αντικαθιστούμε τις (1.5.10) στις (1.5.12) και παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega_1 A_1\sin(\phi_1) - \omega_2 A_2\sin(\phi_2), \\ 0 &= \omega_1\sqrt{2}A_1\sin(\phi_1) - \omega_2\sqrt{2}A_2\sin(\phi_2). \end{aligned}$$

από όπου βρίσκουμε $\sin(\phi_1) = 0 = \sin(\phi_2) \Rightarrow \phi_1 = 0, \pi,\ \phi_2 = 0, \pi$. Αντικαθιστούμε τις (1.5.10) στις (1.5.11) και παίρνουμε

$$\begin{aligned} d &= A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2), \\ 0 &= -\sqrt{2}A_1\cos(\phi_1) + \sqrt{2}A_2\cos(\phi_2). \end{aligned}$$

Εκλέγουμε $\phi_1 = 0 = \phi_2$ και βρίσκουμε

$$A_1 = \frac{d}{2} = A_2.$$

Ώστε η ζητούμενη λύση είναι

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{d}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{d}{2}\cos(\omega_2 t) \\ x_2' &= -\frac{d}{\sqrt{2}}\cos(\omega_1 t) + \frac{d}{\sqrt{2}}\cos(\omega_2 t). \end{aligned}$$

Για οποιαδήποτε εκλογή των $\phi_1 = 0, \pi$ και $\phi_2 = 0, \pi$ προκύπτει η ίδια λύση.

1.6. **Άσκηση.** (ΦΙ) Έστω σώμα μάζας m το οποίο κινείται σε κύκλο ακτίνας a.
(α) Θεωρήστε ότι στο σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις και (i) γράψτε την Λαγκρανζιανή, (ii) γράψτε την εξίσωση κίνησης και (iii) βρείτε μία διατηρήσιμη ποσότητα της κίνησης.
(β) Θεωρήστε τώρα ότι το ίδιο σώμα δέχεται δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητάς του $\boldsymbol{f} = -\lambda\, \boldsymbol{v}$. Γράψτε την εξίσωση κίνησής του.

(α) Ας περιγράψουμε την θέση του σώματος με μία γωνία θ η οποία καθορίζει πλήρως την θέση του επάνω στον κύκλο. Η κινητική του ενέργεια είναι $T = 1/2\, ma^2\, \dot{\theta}^2$ ενώ η δυναμική του ενέργεια είναι $V = 0$ αφού δεν του ασκείται καμμία δύναμη που να προκύπτει από δυναμικό. Άρα έχουμε Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2}\, ma^2\, \dot{\theta}^2.$$

Η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(ma^2\dot{\theta}) = 0.$$

Άρα μία διατηρήσιμη ποσότητα είναι η

$$ma^2\dot{\theta}.$$

(β) Η δύναμη τριβής που ασκείται στο σωμάτιο είναι της μορφής $\boldsymbol{f} = -\lambda\boldsymbol{v}$, όπου λ μία σταθερά και $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητά του. Όμως $\boldsymbol{v} = a\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$
Η γενικευμένη δύναμη τριβής είναι

$$Q_\theta = \boldsymbol{f} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{d\theta} = -\lambda a\dot{\theta}\, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{d\theta}.$$

Αλλά $\boldsymbol{r} = a\,\hat{\boldsymbol{e}}_r = a(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}})$, άρα $\partial\boldsymbol{r}/\partial\theta = a\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, άρα

$$Q_\theta = -\lambda a^2\dot{\theta}.$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta$$

και έχουμε την εξίσωση κίνησης

$$\frac{d}{dt}(ma^2\,\dot{\theta}) = -\lambda a^2\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\lambda}{a}\,\dot{\theta} = 0.\square$$
