

Μαθηματική Μοντελοποίηση I [EM281]

Εξετάσεις, 22 Ιανουαρίου 2010

Θέμα 1. (40 μονάδες = 10+10+10+10) Θεωρούμε δύο δίνες με φορτία $Q_1 = 1$, $Q_2 = 2$ και θέσεις $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ αντίστοιχα, για τις οποίες έχουμε την Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{Q_1}{2} (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + \frac{Q_2}{2} (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) + Q_1 Q_2 \ln(\ell),$$

όπου $\ell := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

(α) Βρείτε και γράψτε τις εξισώσεις κίνησης.

(β) Βρείτε την ενέργεια του συστήματος $E := \sum_i [\dot{x}_i (\partial L / \partial \dot{x}_i) + \dot{y}_i (\partial L / \partial \dot{y}_i)] - L$ (η οποία είναι διατηρήσιμη ποσότητα).

(γ) Δείξτε ότι οι ποσότητες $I_x = Q_1 x_1 + Q_2 x_2$, $I_y = Q_1 y_1 + Q_2 y_2$ είναι διατηρήσιμες.

(δ) Εκλέξτε αρχικές θέσεις $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ για τις δίνες έτσι ώστε $I_x = 0, I_y = 0$. Βρείτε τότε την τροχιά της μίας από τις δύο δίνες [π.χ., $y_2 = y_2(x_2)$ ή $y_1 = y_1(x_1)$] [Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τις ποσότητες από τα ερωτήματα (β), (γ)].

Θέμα 2. (25 μονάδες = 5+10+10) Σώμα μάζας m κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση δυναμικού

$$V(x) = -Kx e^{-\alpha x},$$

όπου K, α είναι θετικές σταθερές.

(α) Βρείτε την θέση ισορροπίας της μάζας.

(β) Κάνετε την αρμονική (παραβολική) προσέγγιση γύρω από την θέση ισορροπίας.

(γ) Γράψτε την εξίσωση κίνησης και βρείτε την συχνότητα ταλαντώσεων γύρω από την θέση ισορροπίας.

Θέμα 3. (40 μονάδες = 10+10+10+10) Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς x των υγιών και y των αρρώστων ατόμων αντίστοιχα, κατά την διάρκεια μιας επιδημίας:

$$\dot{x} = B - \mu x - \gamma xy$$

$$\dot{y} = \gamma xy - \nu y$$

όπου B, γ, μ, ν είναι θετικές σταθερές. Στην πρώτη εξίσωση οι όροι στο δεξιό μέλος περιγράφουν αντίστοιχα: γεννήσεις, θανάτους και μολύνσεις από την επιδημία. Στην δεύτερη εξίσωση οι όροι στο δεξιό μέλος περιγράφουν αντίστοιχα: μολύνσεις από την επιδημία και θανάτους.

(α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος για κάθε τιμή των σταθερών.

Θεωρήστε τώρα τις τιμές $B = 100, \gamma = 1, \mu = 5, \nu = 10$.

(β) Βρείτε το είδος και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας.

(γ) Σημειώστε στο διάγραμμα φάσεων τα σημεία ισορροπίας και σχεδιάστε τις φασικές καμπύλες γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας.

(δ) Ας υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός (τρομοκρατημένος από την επιδημία) μειώνει τις συναντήσεις του στα δύο τρίτα ($2/3$) σε σχέση με το αρχικό μοντέλο. Ποιό θα είναι το νέο ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος;