

Άσκηση 1. Έστω ένας αρμονικός ταλαντωτής με δύναμη τριβής ο οποίος περιγράφεται από την εξίσωση

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad k, c > 0.$$

Γράψτε την εξίσωσή του σαν ένα δυναμικό σύστημα δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού. Σχεδιάστε (είτε με μολύβι είτε με υπολογιστή) το διάγραμμα φάσης. (Μελετήστε δύο περιπτώσεις (α) $c^2 - 4k > 0$ και (β) $c^2 - 4k < 0$.)

Άσκηση 2. Βρείτε το είδος και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας και σχεδιάστε τα διαγράμματα φάσης για τα ακόλουθα γραμμικά συστήματα

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \dot{x}_1 &= x_1 + x_2, & \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 \\ (\beta) \quad \dot{x}_1 &= x_1 - 5x_2, & \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \\ (\gamma) \quad \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2, & \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 \\ (\delta) \quad \dot{x}_1 &= -x_1 - 2x_2, & \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Άσκηση 3. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για την εξίσωση $\ddot{x} = -x - ax^3$. Μελετήστε τις περιπτώσεις $a = 0, a > 0, a < 0$. (Αν χρησιμοποιήσετε υπολογιστή, σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για μία περίπτωση, π.χ. $a = 0.01$ ή $a = -0.01$.)

Άσκηση 4. Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς x_1, x_2 δύο ειδών τα οποία ανταγωνίζονται για το ίδιο είδος τροφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - ax_2) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_2(1 - x_2 - bx_1) \end{aligned}$$

όπου όλες οι σταθερές $a, b, \rho > 0$.

(α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (μελετήστε όλες τις δυνατές τιμές των παραμέτρων, αλλά υποθέστε $a \neq 1, b \neq 1$).

(β) Βρείτε το είδος και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας.

Άσκηση 5. (γ) Στο μοντέλο της προηγούμενης άσκησης υποθέστε για τις παραμέτρους τιμές της επιλογής σας και σχεδιάστε με την βοήθεια υπολογιστή το διάγραμμα φάσης.

Άσκηση 6. Θεωρήστε το μοντέλο διάδοσης επιδημίας

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta xy \\ \dot{y} &= \beta xy - \gamma y \\ \dot{z} &= \gamma y,\end{aligned}\tag{1}$$

όπου β, γ είναι θετικές σταθερές και

$x(t)$: οι υγιείς οι οποίοι δεν έχουν αρρωστήσει.

$y(t)$: οι άρρωστοι.

$z(t)$: αυτοί που έχουν αναρρώσει και άρα έχουν ανοσία.

(α) Αποδείξτε ότι ο συνολικός πληθυσμός είναι σταθερός.

(β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας στο επίπεδο (x, y) (αγνοήστε την μεταβλητή z).

(γ) Βρείτε την εξίσωση των καμπυλών του διαγράμματος φάσης στο επίπεδο (x, y) .

Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης στο επίπεδο (x, y) χρησιμοποιώντας υπολογιστή (είτε δικό σας κώδικα, είτε ένα πακέτο γραφικών, είτε matlab, κλπ).

Άσκηση 7. (συνέχεια της προηγούμενης άσκησης) (δ) Υπολογίστε τον αριθμό των υγιών x για τον οποίο έχουμε μέγιστο αριθμό ασθενών. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα στο διάγραμμα φάσης που σχεδιάσατε.

(ε) Έστω $N = 1000$ ο συνολικός πληθυσμός. Έστω ότι, για μια συγκεκριμένη επιδημία, έχουμε $x = 999$ υγιείς και $y = 1$ άρρωστο. Ποιός είναι ο αριθμός z αυτών που πέρασαν την αρρώστια όταν η επιδημία εκλείψει (δηλ. όταν $y = 0$) (Υποθέστε, π.χ., $\beta = 1, \gamma = 300$. Αρκεί ένα κατά προσέγγιση αποτέλεσμα.)

Σημειώσεις

- Αρκεί να παραδώσετε λυμένες 3 ασκήσεις από αυτό το φυλλάδιο.
- Τα διαγράμματα φάσης αρκεί να γίνουν με το μολύβι και να είναι σχηματικά (εάν δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή).