

**Άσκηση 1.** Σωματίο μάζας  $m$  είναι περιορισμένο σε παραλληλεπίπεδο κουτί με μήκη πλευρών  $a, b, c$ . Η ενέργεια του σωματίου (στην βασική κατάσταση) δίνεται από την κβαντική μηχανική και είναι

$$E = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Αν υποθέσουμε ότι το κουτί έχει δεδομένο όγκο

$$V = abc,$$

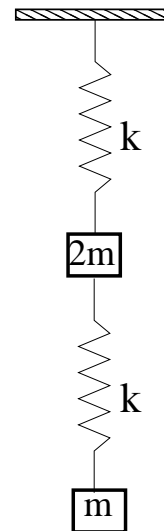
βρείτε τα  $a, b, c$  έτσι ώστε η ενέργεια να είναι ελάχιστη.

**Άσκηση 2.** Υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας ποσό χρημάτων  $S = 200$  για την αγορά δυο αγαθών. Στη θεωρία της μικροοικονομικής ορίζεται συνάρτηση ωφελείας  $U(x, y) = x^{1/2} y^{1/2}$  όπου  $x$  είναι η ποσότητα του ενός αγαθού και  $y$  η ποσότητα του δεύτερου αγαθού. Θεωρούμε επίσης ότι οι τιμές ανά μονάδα ποσότητας είναι  $p_1 = 1$  και  $p_2 = 2$  αντίστοιχα. Βρείτε ποιές ποσότητες  $x$  και  $y$  πρέπει να αγοραστούν ώστε να μεγιστοποιηθεί η ωφέλεια.

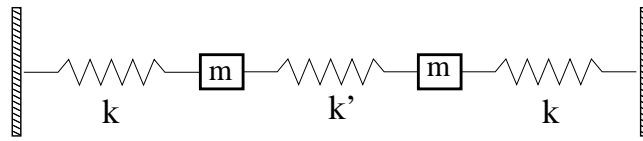
**Άσκηση 3.** Μάζα  $2m$  κρέμεται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς  $k$  και μήκους ισορροπίας  $d$ . Από αυτήν τη μάζα κρέμεται δεύτερο ελατήριο της ίδιας σταθεράς (και ίδιου μήκους ισορροπίας) από το οποίο εξαρτάται μια δεύτερη μάζα  $m$ . Θεωρήστε μόνο κατακόρυφη κίνηση των μαζών.

(α) Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

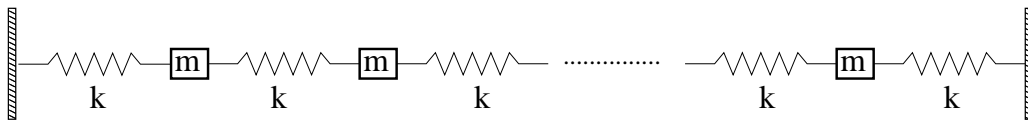
(β) Η επάνω μάζα  $2m$  μετακινείται προς τα κάτω κατά απόσταση  $l$  από την θέση ισορροπίας της, ενώ η δεύτερη μάζα παραμένει στην αρχική θέση ισορροπίας της. Ακολούθως το σύστημα αφήνεται να ταλαντωθεί. Βρείτε την κίνηση των δύο μαζών, δηλ. την θέση τους σαν συνάρτηση του χρόνου.



**Άσκηση 4.** Έστω δύο σώματα ίδιας μάζας  $m$  τα οποία συνδέονται με ελατήριο σταθεράς  $k'$ . Τα δύο σώματα είναι προσδεδεμένα σε σταθερά σημεία με δύο άλλα ελατήρια τα οποία έχουν σταθερά  $k$ . (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων. (β) Βρείτε την γενική λύση των εξισώσεων. (γ) Βρείτε τις κανονικές συντεταγμένες ταλάντωσης.



**Άσκηση 5.** Έστω μια αλυσίδα  $n$  σωματίων ίδιας μάζας  $m$  τα οποία είναι συνδεδεμένα με ελατήρια σταθεράς  $k$ . Η πρώτη και η τελευταία μάζα είναι προσδεδεμένες σε σταθερά σημεία. Βρείτε τις συχνότητες ταλάντωσης του συστήματος.



### Ειδικότερα θέματα για μελέτη

**Θέμα 1.** Χρησιμοποιήστε ένα από τα πακέτα Maple, Mathematica, Matlab ή κάποιον άλλο και κάνετε τα ακόλουθα:

- α) Σχεδιάστε την λύση για τον αρμονικό ταλαντωτή σαν συνάρτηση του χρόνου.
- β) Βρείτε αριθμητικά την θέση  $x(t)$  για τον αναρμονικό ταλαντωτή. Συγκρίνετε το πλάτος ταλάντωσης με την προσεγγιστική λύση από την βιβλιογραφία.
- γ) Θεωρήστε αλυσίδα  $n$  σωματίων ( $n = 5$ ) που συνδέονται με ελατήρια. Τα δύο σώματα στις άκρες της αλυσίδας είναι προσαρμοσμένα με ελατήρια σε σταθερά σημεία. Ολοκληρώστε τις εξισώσεις κίνησης με αρχική συνθήκη  $x_1(t = 0) = 1$ ,  $x_i(t = 0) = 0$  ( $i = 2, \dots, n$ ),  $\dot{x}_i(t = 0) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).
- δ) Επαναλάβετε το ερώτημα (γ) για σωματάρια που αλληλεπιδρούν με αναρμονικό δυναμικό.

### Σημειώσεις

- Αρκεί να παραδώσετε λυμένες 3 ασκήσεις από αυτό το φυλλάδιο.
- Τα ειδικότερα θέματα είναι διατυπωμένα με γενικό τρόπο και η μελέτη τους είναι απολύτως προαιρετική.