

Άσκηση 1. Έστω ένα σωματίο μάζας m το οποίο βρίσκεται σε αρμονικό δυναμικό [$V(x) = 1/2kx^2$]. Η τροχιά του δίνεται από την συνάρτηση $x(t) = x_{\max} \cos(\omega t - \phi_0)$ όπου x_{\max} , ϕ_0 είναι γνωστές σταθερές. Βρείτε την ενέργεια του σωματίου.

Άσκηση 2. Έστω ένα σωματίο μάζας m με ενέργεια $E = E_0$ το οποίο βρίσκεται σε αρμονικό δυναμικό [$V(x) = 1/2kx^2$]. Γράψτε τη θέση του σωματίου σαν συνάρτηση του χρόνου εάν ξέρετε ότι (α) το σωματίο βρίσκεται στην θέση $x = 0$ την χρονική στιγμή $t = 0$, (β) το σωματίο βρίσκεται στην θέση $x = 0$ την χρονική στιγμή $t = 1$.

Άσκηση 3. Υποθέτουμε ότι ένα σώμα μάζας m κρέμεται από ένα ελατήριο (δηλαδή, το ελατήριο εκτείνεται στην κάθετη διεύθυνση). Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η δύναμη του ελατηρίου συν την βαρυτική δύναμη. Γράψτε και λύστε την εξίσωση κίνησης.

Άσκηση 4. Γράψτε την δυναμική ενέργεια για το απλό εκκρεμές. Υπολογίστε την δύναμη και την εξίσωση κίνησης που προκύπτει από αυτό το δυναμικό (δυναμική ενέργεια) και επίσης γράψτε το δυναμικό, την δύναμη και την εξίσωση κίνησης στην αρμονική προσέγγιση (δηλ. όταν η γωνία απόκλισης από την θέση ισορροπίας είναι μικρή).

Άσκηση 5. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι για σωματίο με σταθερή μάζα ισχύει για την κινητική ενέργεια T η εξίσωση:

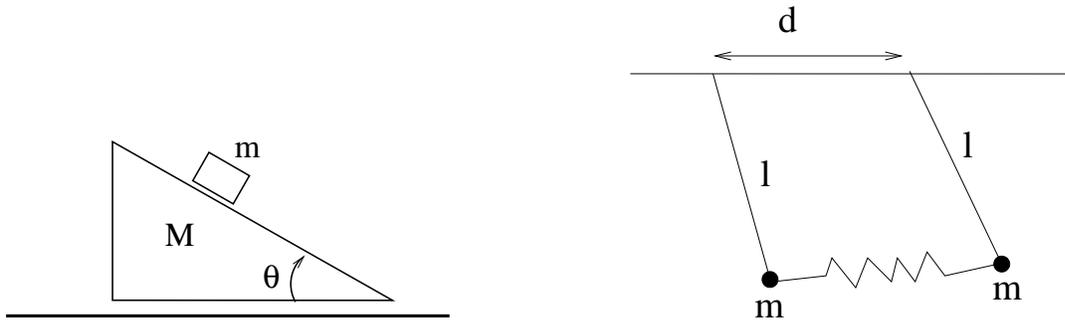
$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Αν η μάζα του σωματίου είναι μεταβαλλόμενη δείξτε ότι ισχύει η εξίσωση:

$$\frac{d(mT)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{p}.$$

Άσκηση 6. Βρείτε την ταχύτητα σωματίου (v_ρ, v_ϕ, v_z) σε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z), όπου $\mathbf{v} = v_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + v_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + v_z \hat{\mathbf{e}}_z$. Γράψτε την Λαγκρανζιανή και τις εξισώσεις Lagrange για ένα γενικό δυναμικό $V = V(\rho, \phi, z)$.

Άσκηση 7. Σωματίο μάζας m είναι ελεύθερο να ολισθαίνει επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο (βλ. σχήμα). Το κεκλιμένο επίπεδο έχει μάζα M και είναι ελεύθερο να ολισθαίνει επάνω σε επίπεδη οριζόντια βάση. (α) Γράψτε κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες για το σύστημα, (β) γράψτε την Λαγκρανζιανή του συστήματος, (γ) γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης.



Άσκηση 8. Δύο εκκρεμή μάζας m και μήκους l συνδέονται με αβαρές ελατήριο σταθεράς k (βλ. σχήμα). Το μήκος ισορροπίας του ελατηρίου d είναι το ίδιο με την απόσταση μεταξύ των σημείων στήριξης των εκκρεμών. Να γράψετε την Λαγκρανζιανή του συστήματος καθώς και τις εξισώσεις Lagrange. Βρείτε τις απλοποιημένες εξισώσεις κίνησης στην περίπτωση ταλαντώσεων μικρού πλάτους ($\theta_1, \theta_2 \ll 1$).

Άσκηση 9. Έστω σωματίο μάζας m το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται πάνω σε σφαίρα ακτίνας l . Γράψτε την Λαγκρανζιανή του συστήματος χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) . Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. Επιλύστε τις εξισώσεις στην περίπτωση που (α) η γωνία ϕ είναι σταθερή, (β) στην περίπτωση που η γωνία θ είναι σταθερή. (γ) Γράψτε τις απλοποιημένες εξισώσεις κίνησης για την περίπτωση που η γωνία θ είναι μικρή (αλλά όχι σταθερή).

Άσκηση 10. Βρείτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το ολοκλήρωμα δράσης

$$I = \int f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n) dx.$$

Άσκηση 11. Βρείτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το ολοκλήρωμα δράσης

$$I = \int \int f(x_1, x_2, y, dy/dx_1, dy/dx_2) dx_1 dx_2,$$

όπου $y = y(x_1, x_2)$.

Ειδικότερα θέματα για μελέτη

Θέμα 1. Γραψτε την εξίσωση κίνησης για τον αναρμονικό ταλαντωτή με $V(x) = 1/2 k_2 x^2 + 1/4 k_4 x^4$. Βρείτε μια προσεγγιστική μεθοδο για να υπολογίσετε την περίοδο και το πλάτος ταλάντωσης του.

Θέμα 2. Κίνηση σωματίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Βρείτε την Λαγκρανζιανή τού συστήματος.

Σημειώσεις

- Αρκεί να παραδώσετε λυμένες 6 ασκήσεις από αυτό το φυλλάδιο.
- Τα ειδικότερα θέματα είναι αρκετά προχωρημένα και η μελέτη τους είναι απολύτως προαιρετική. Είναι θέματα για μελέτη τα οποία θα πρότεινα να τα κοιτάξετε στα αντίστοιχα κεφάλαια της βιβλιογραφίας.