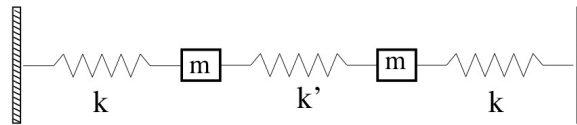


Μαθηματική Προσομοίωση I [EM281]

Εξετάσεις, 20 Σεπτεμβρίου 2009

Θέμα 1. (30 μονάδες) Έστω σώμα μάζας m το οποίο κινείται σε κύκλο ακτίνας a .
(α) Θεωρήστε ότι στο σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις και (i) γράψτε την Λαγκρανζιανή, (ii) γράψτε την εξίσωση κίνησης και (iii) βρείτε μία διατηρήσιμη ποσότητα της κίνησης.
(β) Θεωρήστε τώρα ότι το ίδιο σώμα δέχεται δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητάς του $\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v}$. Γράψτε την εξίσωση κίνησής του.
[Υπενθυμίζεται ότι η γενικευμένη δύναμη Q που αντιστοιχεί σε μία γενικευμένη συντεταγμένη q είναι $Q = \mathbf{f} \cdot (\partial \mathbf{r} / \partial q)$.]

Θέμα 2. (35 μονάδες) Δύο σώματα ίδιας μάζας m συνδέονται με ελατήριο σταθεράς k' . Τα δύο σώματα είναι προσδεδεμένα σε σταθερά σημεία με δύο άλλα ελατήρια τα οποία έχουν σταθερά k (όπως στο σχήμα). (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων. (β) Βρείτε τις συχνότητες ταλάντωσης του συστήματος.



Θέμα 3. (35 μονάδες) Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς x, y, z των υγειών, αρρώστων και άνοσων ατόμων αντίστοιχα, κατά την διάρκεια μιας επιδημίας:

$$\dot{x} = -xy + \mu$$

$$\dot{y} = xy - y$$

$$\dot{z} = y - \mu$$

όπου μ είναι θετική σταθερά.

- (α) Δείξτε ότι ο συνολικός πληθυσμός $x + y + z$ παραμένει σταθερός.
(β) Βρείτε το σημείο ισορροπίας του συστήματος (αφού περιοριστείτε στο επίπεδο (x, y))
(γ) Βρείτε το είδος και την ευστάθεια του (εξετάστε όλες τις δυνατές τιμές $\mu > 0$).
(δ) Σχεδιάστε στο διάγραμμα φάσης τις φασικές καμπύλες γύρω από το σημείο ισορροπίας για μία τιμή του μ της επιλογής σας.