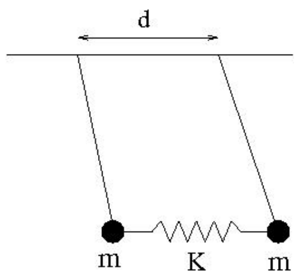
Μαθηματική Προσομοίωση Ι
Εξετάσεις, Ιανουάριος 2009

Θέμα 1ο (30 μονάδες): Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται σε βαρυτικό δυναμικό $V = V(r)$ όπου r, θ είναι πολικές συντεταγμένες.
(α) Γράψτε την Lagrangian και τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος σε πολικές συντεταγμένες. (Βρείτε πρώτα την ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την σχέση γιά τα διαφορικά $d\hat{\boldsymbol{e}}_r = \hat{\boldsymbol{e}}_\theta d\theta$, όπου $\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις αντίστοιχες κατευθύνσεις.)
(β) Βρείτε το ολοκλήρωμα της στροφορμής.
(γ) Θεωρήστε τώρα ότι στο σώμα ασκείται μία επιπλέον δύναμη τριβής $\boldsymbol{f} = -\lambda \boldsymbol{v}$ όπου λ είναι μία σταθερά και $\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητά του. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι η γενικευμένη δύναμη τριβής που αντιστοιχεί στην συντεταγμένη r είναι $(\boldsymbol{f} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r)$ και η γενικευμένη δύναμη για την θ είναι $(r\boldsymbol{f} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta)$.)
(δ) Εάν δίνεται η αρχική στροφορμή (έστω J_0 γιά χρόνο $t = 0$) του συστήματος, βρείτε την στροφορμή γιά τους χρόνους $t > 0$.

Θέμα 2ο (30 μονάδες): Δύο σώματα μάζας m το καθένα εξαρτώνται από αβαρείς ράβδους μήκους ℓ. Οι μάζες είναι συνδεδεμένες με ελατήριο σταθεράς K. Το φυσικό μήκος του ελατηρίου d είναι ίσο με την απόσταση μεταξύ των σημείων από τα οποία εξαρτώνται τα σώματα (όπως φαίνεται στο σχήμα).
(α) Γράψτε την Lagrangian και τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος υποθέτοντας μόνο μικρές αποκλίσεις των σωμάτων από τις θέσεις ισορροπίας (δηλ. χρησιμοποιήστε την αρμονική προσέγγιση. Μπορείτε να αγνοήσετε την κίνηση των μαζών στην κατακόρυφη διεύθυνση).
(β) Βρείτε τις συχνότητες ταλάντωσης του συστήματος.



Σχημα 1

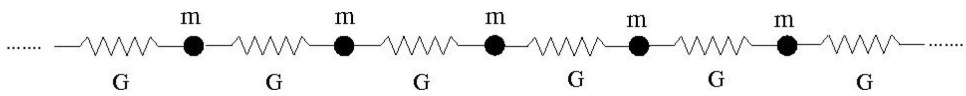
Θέμα 3 (30 μονάδες): Έστω μία άπειρη αλυσίδα ατόμων μάζας m συζευγμένων με ελατήρια σταθεράς G (δείτε το σχήμα). Η απόσταση μεταξύ γειτονικών ατόμων στην θέση ισορροπίας είναι d. Δίνεται η Lagrangian του συστήματος

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left[m\, \dot{q}_\ell^2 - G\, (q_{\ell+1} - q_\ell)^2 \right],$$

όπου q_ℓ είναι οι αποκλίσεις των ατόμων από την ισορροπία.
(α) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης της αλυσίδας.
(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $q_n = A\, e^{i(knd-\omega t)}$ είναι λύση των εξισώσεων όταν η συχνότητα ω και το κυματάνυσμα k ικανοποιούν την συνθήκη

$$\omega^2 = \frac{4G}{m} \sin^2\left(\frac{kd}{2}\right).$$

(γ) Θεωρήστε $k = \pi/d$. Βρείτε λύση της εξίσωσης για την οποία όλα τα άτομα βρίσκονται στην θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $t = 0$ (δηλ. $q_n(t=0) = 0$).



Σχημα 2

Θέμα 4 (30 μονάδες): Έστω το ακόλουθο μοντέλο το οποίο περιγράφει τους πληθυσμούς x_1, x_2 δύο ειδών τα οποία ανταγωνίζονται για το ίδιο είδος τροφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1\,(1 - x_1 - a x_2) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_2\,(1 - x_2 - b x_1) \end{aligned}$$

όπου όλες οι σταθερές $a, b, \rho > 0$.
(α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (μελετήστε όλες τις δυνατές τιμές των παραμέτρων, αλλά υποθέστε $a \neq 1$, $b \neq 1$, $ab \neq 1$).
Θεωρήστε από εδώ και στο εξής τις τιμές των παραμέτρων $a = 2/3$, $b = 3/4$, $\rho = 1$.
(β) Βρείτε το είδος και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας.
(γ) Τοποθετήστε τα σημεία ισορροπίας στο διάγραμμα φάσης. Γιά ένα από τα σημεία ισορροπίας (μπορείτε να διαλέξετε όποιο θέλετε) σχεδιάστε με σαφήνεια τις καμπύλες του διαγράμματος φάσης στη γειτονιά του συγκεκριμένου σημείου.
(δ) Ποιοί είναι οι πληθυσμοί των δύο ειδών για $t \to \infty$;
(Γιά απλότητα θα αποδεχθούμε κλασματικούς αριθμούς για τους πληθυσμούς x_1, x_2.)