

## 3. Φυλλάδιο ασκήσεων ΙΙΙ

[Παράδοση μέχρι Τρίτη 14 Μαΐου 2013]

**Άσκηση 3.1.** Βρείτε την παράγωγο της  $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$  στο σημείο  $(1, 2)$  κατά την κατεύθυνση  $\mathbf{v} = 3/5\mathbf{i} + 4/5\mathbf{j}$ .

**Άσκηση 3.2.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2$$

της οποίας το γράφημα είναι η επιφάνεια  $S: z = f(x, y)$ . (i) Σχεδιάστε ορισμένες ισοσταθμικές καμπύλες στο επίπεδο  $(x, y)$ . Πώς ονομάζονται (στην γεωμετρία) οι καμπύλες που σχεδιάσατε; (ii) Γράψτε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο  $(\sqrt{2}, 1, 0)$ . (iii) Βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο  $(\sqrt{2}, 1, 0)$ .

**Άσκηση 3.3.** Το βαρυτικό δυναμικό δίνεται από την

$$V = -\frac{GmM}{r},$$

όπου  $G, m, M$  είναι σταθερές και  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  (σφαιρική συντεταγμένη). Βρείτε την βαρυτική δύναμη  $\mathbf{F}$  η οποία παράγεται από την κλίση αυτού του δυναμικού:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

όπου  $\hat{\mathbf{r}}$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

**Άσκηση 3.4.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$  σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

**Άσκηση 3.5.** Έστω  $f(x, y) = g(ax + by)$ , όπου  $a, b$  είναι σταθερές και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ναδειχθεί ότι

$$b\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial f}{\partial y}.$$

**Άσκηση 3.6.** Να βρεθεί η μερική παράγωγος δεύτερης τάξης  $\partial^2 f/\partial u^2$  της σύνθετης συνάρτησης  $f(u, v)$  που ορίζεται από τις ισότητες

$$f(u, v) = g(x, y) = x + y, \quad x = u^2 - v^2, \quad y = e^{uv}.$$

**Άσκηση 3.7.** Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$h(x, y) = \frac{a(x + y)}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad a: \text{σταθερά.}$$

Σχεδιάστε ορισμένες ισοσταθμικές καμπύλες στο επίπεδο  $(x, y)$ .