2. Φυλλάδιο ασκήσεων II

[Παράδοση μέχρι Δευτέρα 1 Απριλίου 2013]

Άσκηση 2.1. Δίνεται η παραμετρική έκφραση καμπύλης

$$\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{\imath} + (\sin t)\hat{\jmath} + t^2\,\hat{k}.$$

(α) Δείξτε ότι το σημείο $(0, 1, \pi^2/4)$ ανήκει στην καμπύλη, (β) βρείτε την παραμετρική έκφραση της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο, (γ) βρείτε σημείο της εφαπτομένης ευθείας σε απόσταση μίας μονάδας από το P.

Άσκηση 2.2. Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $(\vec{T})$ της καμπύλης $y = x^2 - 1$ σε τυχόν σημείο της.

Άσκηση 2.3. Θεωρούμε σημείο με συνάρτηση θέσης την $\vec{r}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$ το οποίο διαγράφει μία καμπύλη (η οποία ονομάζεται κυκλοειδής καμπύλη). (α) Κάνετε γραφική παράσταση της καμπύλης. (β) Βρείτε την ταχύτητα, το μέτρο της και το μήκος τόξου που αντιστοιχεί σε μία περιστροφή.

Άσκηση 2.4. Βρείτε το καρτεσιανό ισοδύναμο των ακόλουθων πολικών εξίσωσεων

$$(\alpha)\ \ r = 4\cos\theta \qquad (\beta)\ \ r = \frac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}.$$

Προσδιορίσθε το σχήμα της κάθε καμπύλης.

Άσκηση 2.5. Κάνοντας χρήση πολικών συντεταγμένων, περιγράψτε και σχεδιάστε τις ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ με τιμή

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Άσκηση 2.6. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο εκτός του $(0,0)$.

Άσκηση 2.7. Να εξετασθεί αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$(\alpha) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + 2x^2y^2 + xy^3}{(x^2+y^2)^2} = 0 \qquad (\beta) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{(x^2+y^4)^3} = 0.$$

Άσκηση 2.8. Να δειχθεί με τον ορισμό του ορίου ότι

$$(\alpha) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0 \qquad (\beta) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5 + 4x^2y^3 - 2y^5}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$